

自分の手を動かしてどの程度まで章末問題を解く試みをしていただけたであろうか？数学は自然科学のなかでも実験がほとんどない科目である（数値実験などはあるが）。しかしその代わりに練習問題や計算を自分で確かめることが理解のために重要である。以下の解答は諸君が少なくとも、すでに解く試みをした上で参照することを前提としている。

第 1 章 章末問題解答.

1 (i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{4}{n^2}} = \frac{1}{3}.$$

(ii) 例題 1.5 と同様にして

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(iii) $\sqrt{n} - 1 \leq [\sqrt{n}] \leq \sqrt{n}$ より,

$$\frac{n - \sqrt{n}}{n} \leq \frac{n - [\sqrt{n}]}{n} \leq \frac{n - \sqrt{n} + 1}{n}$$

で $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \sqrt{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{1} = 1$. 同様にして、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \sqrt{n} + 1}{n} = 1$.

はさみうちの原理（定理 1.3）より、答えは 1.

2. $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} r^n$ において

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha - n}{n} r \right| = r < 1$$

なので定理 1.8 (ii) よりわかる。

3. (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ において両辺の極限をとって、 $a = ra + c$, よって $a = \frac{c}{1-r}$.

(ii) $a_{n+1} - \frac{c}{1-r} = ra_n + c - \frac{c}{1-r} = r \left(a_n - \frac{c}{1-r} \right)$ で $b_n = a_n - \frac{c}{1-r}$ とおくと $b_{n+1} = rb_n$ なので $b_n = r^{n-1}b_1$. $0 < r < 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n-1}b_1 = 0$ (命題 1.2). したがって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{c}{1-r}$.

4. (i) $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ において $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2+a_n}$ より $a = \sqrt{2+a}$. ゆえに $a^2 = a+2$. $a_n \geq 0$ から $a \geq 0$ がわかるので (定理 1.4 (i)), $a = 2$.

(ii) $a_{n+1} - 2 = \sqrt{2+a_n} - 2 = \frac{a_n-2}{\sqrt{2+a_n}+2}$. $\sqrt{2+a_n} \geq 0$ より $\sqrt{2+a_n}+2 \geq 2$ なので $\frac{1}{\sqrt{2+a_n}+2} \leq \frac{1}{2}$. ゆえに $|a_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|a_n - 2|$. 定理 1.8 (i) より $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

5. (i) $n = 1$ のときは $a_1 = \sqrt{3}$ なので成立. $n = k$ まで成立するとする. $a_{k+1} = \sqrt{3a_k} > 0$ で $a_{k+1} > 0$. よってすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n > 0$.

次に単調増加列であることを証明するためには、

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{3a_n} - a_n = \sqrt{a_n}(\sqrt{3} - \sqrt{a_n})$$

なので $a_n \leq 3$ を示せばよい. $n = 1$ のときは正しい. $n = k$ まで正しい

とする. $a_{k+1} = \sqrt{3}\sqrt{a_k} \leq \sqrt{3}\sqrt{3} \leq 3$. よって数学的帰納法よりすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq 3$. ゆえに $a_{n+1} - a_n \geq 0$.

(ii) 定理 1.5 より $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ は存在する. よって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3a_n}$. ゆえに $a = \sqrt{3a}$. したがって、 $a = 3$ または $a = 0$. 一方、 a_n は単調増加数列であるので、 $a_n \geq a_1 = \sqrt{3}$ であり、 $a \geq \sqrt{3}$ である. よって $a = 3$.

6. $d_n = a_n + \varepsilon$ とおくと $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$.

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = a + \frac{d_1 + \cdots + d_n}{n}$$

なので $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_1 + \cdots + d_n}{n} = 0$ を証明すれば十分である. かってな $\varepsilon > 0$ に対して N を十分大きく選べば $n \geq N$ ならば、 $|d_n| < \varepsilon/2$. そのとき、

$$\begin{aligned} \left| \frac{d_1 + \cdots + d_n}{n} \right| &= \left| \frac{d_1 + \cdots + d_N}{n} + \frac{d_{N+1} + \cdots + d_n}{n} \right| \\ &\leq \frac{N\varepsilon_0}{n} + \frac{(n-N)\varepsilon}{2n} \leq \frac{N\varepsilon_0}{n} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

ここで $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ なので、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|d_n| \leq \varepsilon_0$ となる $\varepsilon_0 > 0$ をうまく選ぶことができることも用いた (定理 1.1 (ii)). 一方、 $\varepsilon > 0$ に対して $N' > 0$ を十分大きくとると、 $n \geq N'$ ならば $\frac{N\varepsilon_0}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ とできる. よって $n \geq \max\{N, N'\}$ とすると、 $\left| \frac{d_1 + \cdots + d_n}{n} \right| < \varepsilon$ がわかる.

したがって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_1 + \dots + d_n}{n} = 0$.

7. $|a_n - 1| = \left| \frac{3}{2n+3} \right|$ より $\left| \frac{3}{2n+3} \right| < \varepsilon \iff n > \frac{3}{2\varepsilon} - \frac{3}{2}$. $\varepsilon > 0$ に対して $N = N(\varepsilon)$ を $\frac{3}{2\varepsilon} - \frac{3}{2}$ より大きな自然数とする。このとき $n \geq N$ ならば $n > \frac{3}{2\varepsilon} - \frac{3}{2}$. よって $\left| \frac{3}{2n+3} \right| < \varepsilon$.

8. $\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} = 1$, $\inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} = 0$ 最大値を与える要素は 1. 最小値を与える要素は、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\frac{1}{n} > 0$ なので存在しない。

第 2 章章末問題解答.

以下、級数の n 番目の項を a_n で表す。

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right| = 1$ なので定理 2.3 より収束しない。

2. (i) $a_n = \frac{2}{n(n+1)}$ で例題 2.1 と同様にしてと部分分数分解して、

$$\frac{2}{n(n+1)} = 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right). \quad S_N = \sum_{n=1}^N a_n = 2 - \frac{2}{N+1} \longrightarrow 2.$$

(ii)

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3 \cdot 2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n \longrightarrow \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$S_{2n-1} = S_{2n} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \longrightarrow \frac{1}{3}.$$

よって $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \cdots = \frac{1}{3}$.

最後の議論は次のようにしてより厳密にできる；かつてな $n \in \mathbb{N}$ に対して $|S_{2n} - \frac{1}{3}| \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $|S_{2n-1} - \frac{1}{3}| \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$. よってすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left|S_n - \frac{1}{3}\right| \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

ここで $\lfloor n/2 \rfloor$ は $n/2$ を越えない最大の自然数を表すものとする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lfloor n/2 \rfloor = \infty$ なので $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor n/2 \rfloor} = 0$.

3. (i) 例題 2.2 と同様に考える。 $2n - 1 \geq n$ に注意して $\frac{1}{n(2n-1)} \leq \frac{1}{n^2}$ で命題 2.1 (ii) と定理 2.6 (i) より収束。

(ii) $n \geq 2$ に対して、 $n + 2 \leq 2n$ なので $\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}n}$. よって命題 2.1 (ii) と定理 2.6 (ii) を用いて発散。

(iii) $n^2 + 1 \geq n^2$ より $\frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$. 命題 2.1 (ii) と定理 2.6 (i) より収束。

4. (i) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{2}$. 定理 2.7 (i) より収束。

(ii) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2n+3} \rightarrow \frac{1}{2}$ なので定理 2.7 (i) より収束。

5. $a_n^{1/n} = \frac{n}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2}$ なので定理 2.8 (i) より収束。

6.

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)n = \frac{n(r-1)}{n+1} \rightarrow r-1.$$

定理 2.9 より $r < 0$ の場合は収束し、 $r > 0$ の場合は発散。 $r = 0$ のときは、 $a_n = 0$ なので収束。

7. (i) 定理 2.12 より

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1.\end{aligned}$$

したがって、定理 2.7 (i) より収束。

(ii) すべての $n \in \mathbf{N}$ に対して $|a_n| \leq \frac{C}{n^2}$ となる定数 $C > 0$ がとれることを示す。そのために、 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|n^2$ が存在することを示そう。実際、そのとき定理 1.1 (ii) よりそのような定数 C の存在がわかる。さて定理 2.12 より

$$|a_n|n^2 = \frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n-1}} = \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$$

である。よって定理 2.6 (i) と命題 2.1 (ii) よりこの級数は収束する。

(iii) 定理 2.12 より $a_n^{1/n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \longrightarrow e^{-1}$ 。よって定理 2.8 (i) より収束。

8. (i) 定理 2.13 より収束。 (ii) $\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n}}$ 。定理 2.6 (ii)

と命題 2.1 (ii) より発散。

第 3 章章末問題解答。

1. (i) $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$ より $1 \leq x \leq 2$ が定義域、そのとき、
 $0 \leq -x^2 + 3x - 2 \leq \frac{1}{4}$ なので値域は $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$.

(ii) $x \neq -3$ が定義域. 値域は $y \neq 0$.

2. $f(g(x)) = \sqrt{(x^3 - x)^2 + 1} = \sqrt{x^6 - 2x^4 + x^2 + 1}$. 定義域は実数全体.

3. (i) 定義域は $x \geq -2$, 値域は $y \geq 1$, $x = (y - 1)^2 - 2$. (ii) 定義域は $x \geq 0$, 値域は $y \geq 0$, $x = y^2$.

4. (i)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x+2} = \frac{1}{4}.$$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

5. 例題 3.5 や例題 1.5 と同様にして

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{-x}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} &= \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} -x \frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{2x} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} (\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}) = -\sqrt{a}. \end{aligned}$$

6. (i) 左辺 = $\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1$.

(ii), (iii) 右辺を展開して左辺になることを確かめればよい。例えば (ii)

については ;

$$\text{右辺} = \frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2} \frac{e^{x_2} + e^{-x_2}}{2} + \frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{2} \frac{e^{x_1} + e^{-x_1}}{2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{x_1+x_2} + e^{x_1-x_2} - e^{-x_1+x_2} - e^{-x_1-x_2}}{4} + \frac{e^{x_1+x_2} + e^{-x_1+x_2} - e^{x_1-x_2} - e^{-x_1-x_2}}{4} \\
&= \frac{e^{x_1+x_2} - e^{-x_1-x_2}}{2} = \sinh(x_1 + x_2).
\end{aligned}$$

7. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. $t = e^x$ において $t^2 - 2yt + 1 = 0$. $t = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$.

$x \geq 0$ で $t = e^x \geq 1$ である。このことから上の式の \pm の符号を決めるこ

とができる ; $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ で相加相乗平均を考えると $y \geq 1$ である (また

はグラフを考えてもわかる)。 $y > 1$ のとき、 $y - \sqrt{y^2 - 1} < 1$ であるこ

とは以下のことから確かめられる。 $y - 1 > 0$ のとき、

$$y - 1 < \sqrt{y^2 - 1} \iff (y - 1)^2 < y^2 - 1$$

$$\iff -2y + 1 < -1 \iff y > 1.$$

よって $t = e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$ がわかった。したがって $x = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$.

$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ に対しても同様にして $e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$. $e^x > 0$ なので

$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$. よって $x = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$.

8. (i) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$. $\arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$. $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

$$\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

(ii) $\theta = \arcsin x$, $\varphi = \arccos x$ とおくと、 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$,

$x = \sin \theta = \cos \varphi$. $\cos \varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ なので $\sin \theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$.

$-\frac{\pi}{2} \leq \theta, \frac{\pi}{2} - \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ であって $y = \sin x$ は $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ で 1 対 1 なので

$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$. よって証明終わり.

9. (i) 命題 3.8 より

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} \frac{1}{\frac{\sin \beta x}{\beta x}} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

(ii) 倍角公式 (例題 3.1) より

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 = 2.$$

(iii) $y = \frac{1}{x}$ とおくと

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \sin \alpha y = \alpha \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha y}{\alpha y} = \alpha.$$

(iv) $0 \leq \left| \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} \right| \leq \sqrt{x}$ より、定理 3.3 を用いて、極限は 0.

(v) $y = \frac{1}{x}$ とおく。 $\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{y} \right)^y = e^\alpha$.

10. $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} e^{-\frac{1}{x}} = 0, \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow \infty} e^y = \infty$ より $x = 0$

で不連続。しかし、右側連続である: $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x)$.

11. $f(x) = (x^3 - 1) \cos x + \sqrt{2} \sin x - 1$ とおく。 $f(0) = -2 < 0$,

$f(\pi/2) = \sqrt{2} - 1 > 0$ なので、定理 3.8 (ii) より $f(x) = 0$ となる x が $(0, \frac{\pi}{2})$ に存在する。

第 4 章章末問題解答.

1. (i)

$$\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{h\sqrt{h+2}}{h} = \sqrt{2},$$

$$\lim_{h \rightarrow 0, h < 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0, h < 0} \frac{-h\sqrt{h+2}}{h} = -\sqrt{2}$$

なので微分できない。

(ii) 右側微分係数は $\sqrt{2}$, 左側微分係数は $-\sqrt{2}$.

2. (i) $(a^x)' = a^x \log a$ なので定理 4.2 より $|x|$ が十分小さいとき、

$$f(x) = 1 + f'(0)x + o(x) = 1 + x \log a + o(x).$$

(ii) $(x^\gamma)' = \gamma x^{\gamma-1}$ と定理 4.2 より結論を確かめることができる。

3. (i) $y = x$. (ii) $y = \frac{1}{4}x + 1$.

4. (i) $y' = (3x^2 + 1) \cos x - x^3 \sin x$. (ii) $y' = \frac{-2x^3 - 3x^2 + 1}{(x^3 + 1)^2}$.

(iii) $y' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$. (iv) $y' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(v) $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. (vi) (対数微分法) $y' = (1 + \log x)(\log x)^x$.

(vii) (対数微分法)

$$\log y = \frac{1}{2} \log |a+x| + \frac{1}{2} \log |b+x| - \frac{1}{2} \log |a-x| - \frac{1}{2} \log |b-x|$$

なので

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x} + \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x} \right).$$
$$y' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x} + \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x} \right) \sqrt{\frac{(a+x)(b+x)}{(a-x)(b-x)}}.$$

答えとしてはこのままでもよいものとしよう。また、合成関数の微分を直接用いてもよいが計算は煩雑になる。

5. (i) 割り算をまず実行する： $\frac{x^3}{1-x} = -x^2 - x - 1 - \frac{1}{x-1}$,

$$\left(\frac{x^3}{1-x} \right)^{(n)} = (-x^2 - x - 1)^{(n)} - \left(\frac{1}{x-1} \right)^{(n)}.$$

$n = 1$ のとき、 $y' = -2x - 1 + \frac{1}{(x-1)^2}$.

$n = 2$ のとき、 $y'' = -2 - \frac{2}{(x-1)^3}$.

$n \geq 3$ のとき、 $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}n!}{(x-1)^{n+1}}$.

(ii) $y = \frac{1}{a} \frac{1}{x + \frac{b}{a}}$ なので

$$y^{(n)} = \frac{1}{a} \frac{(-1)^n n!}{\left(x + \frac{b}{a}\right)^{n+1}}.$$

(iii) 倍角公式 (例題 3.1) より $y = \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$. 命題 4.4 と合成

関数の微分より

$$y^{(n)} = -\frac{1}{2} \times 2^n \cos \left(2x + \frac{n\pi}{2} \right) = -2^{n-1} \cos \left(2x + \frac{n\pi}{2} \right).$$

第 5 章章末問題解答

1. (i) $\frac{f(2)-f(-2)}{4} = f'(x_0)$ より $3x_0^2 - 3 = 1$. よって $x_0 = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$.

(ii) $x_0 = 1$.

2. $y' = e^{-x}(-x^2 + 2x)$ で、常に $e^{-x} > 0$ なので $-x^2 + 2x$ の符号を調べて、 $0 < x < 2$ で狭義単調増加、 $x < 0, x > 2$ で狭義単調減少。
 $y'' = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$. よって $x = 2$ で極大値 $4e^{-2}$ をとり、 $x = 0$ で極小値 0 をとる。しかも $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} = 0$ がわかる。
 $x < 2 - \sqrt{2}, x > 2 + \sqrt{2}$ で上に凸、 $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$ で下に凸。
変曲点は $(2 - \sqrt{2}, (6 - 4\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-2}), (2 + \sqrt{2}, (6 + 4\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}-2})$. グラフの概形は省略。

3. 長方形の一辺の長さを $2x$ とすると、もう1つの辺の長さは $2\sqrt{R^2 - x^2}$ となる (半径 R の円に内接していることに注意)。したがって、面積 S は $S = 4x\sqrt{R^2 - x^2} = 4\sqrt{R^2 x^2 - x^4}$ となる。 $0 < x < R$ で $y = R^2 x^2 - x^4$ の最大値を考えると、 $y' = -4x^3 + 2R^2 x$ なので $0 < x < \frac{R}{\sqrt{2}}$ で単調増加、 $\frac{R}{\sqrt{2}} < x < R$ で単調減少。よって $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$, すなわち一辺の長さが $\sqrt{2}R$ の正方形のとき、面積が最大であり、最大値は $2R^2$.

4. (i) $y = f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ とおくと $y' = -\sin x + x, y'' = 1 - \cos x$.
 $x > 0$ で $f''(x) \geq 0$ なので f' は単調増加でしかも $x \neq 2\pi, 4\pi, \dots$ で $f''(x) > 0, f'(0) = 0$ なので $f'(x) > f'(0) = 0$. (ここで $f''(x) \geq 0$ で

あっても $f''(x) \equiv 0$ ならば $f'(x) = f'(0)$ となって不等号が成立しないが
 今の場合は $f''(x) > 0$ となる区間があるので、そこで f' は狭義単調増加
 となり、 $f'(x), x > 0$ は $f'(0)$ より真に大きい。うるさく言えばこのよう
 な推論が必要である)。

よって $x > 0$ で f は狭義単調増加となり、 $f(x) > f(0) = 0$ 。ゆえに
 $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}, x > 0$ が示された。

(ii) $f(x) = \frac{\pi-x}{4} - \arctan \sqrt{1-x}$ とおく。よって $f'(x) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} =$
 $\frac{2-\sqrt{1-x}}{4\sqrt{1-x}} > 0$ 。ゆえに $f(x) > f(0) = 0$ で $0 < x \leq 1$ で $\frac{\pi-x}{4} >$
 $\arctan \sqrt{1-x}$ 。

5. (i) $f(x) = x^5 - 5x + 2$ とおく。 $f'(x) = 5x^4 - 5, f'(x) = 0 \iff$
 $x = \pm 1$ 。 $f(-1) = 6, f(1) = -2$ より例題 5.5 と同様に考えて実解は 3
 つ。

(ii) $f(x) = e^x - ax - b$ とおく。 $f'(x) = e^x - a$ 。

(a) $a < 0$ の場合: $y = e^x$ のグラフ (p.53) を考えると 解はただ 1 つで
 あることがわかる。または、 $f'(x) > 0$ で f は狭義単調増加であって、
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ より解はただ 1 つと判定しても
 よい。

(b) $a = 0$ の場合: $b > 0$ のときは解はただ 1 つ。 $b \leq 0$ なら解はなし。

(c) $a > 0$ とする。 $x < \log a$ のとき、 $f'(x) < 0$ 、 $x > \log a$ のとき、 $f'(x) > 0$ 、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ 、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 。ここで例 5.6 より $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \left(1 - \frac{ax}{e^x} - \frac{b}{e^x}\right) = \infty$ を用いた。 $f(\log a) = a - a \log a - b$ なので

$a - a \log a - b < 0$ のとき、2 個。

$a - a \log a - b = 0$ のとき、1 個。

$a - a \log a - b > 0$ のとき、0 個。

6. (i) $\frac{0}{0}$ の形の極限であるので定理 5.6 を用いて

$$\text{与式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x \cos x)'}{(\sin 2x - x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{2 \cos 2x - 1} = 0.$$

(ii) $t = \frac{x-1}{x+1}$ とおくと $x = \frac{1+t}{1-t}$ で $x \rightarrow \infty \iff t \rightarrow 1, t < 1$.

$$\text{与式} = \lim_{t \rightarrow 1, t < 1} \frac{1+t}{1-t} \log t = -2 \lim_{t \rightarrow 1, t < 1} \frac{\log 1 - \log t}{1-t} = -2.$$

最後の極限が $y = \log t$ の $t = 1$ における微分係数であることも用いた。

(iii) テイラーの公式 (定理 8.12) やロピタルの定理 (定理 5.6) を直接用

いてもよいが、計算がなかなか複雑である。ここでは命題 3.8 から $x \rightarrow 0$

のとき、 $\sin x$ と x は大体同じような振る舞いをする (比が 1 に近い!)

ことに注意して $\sin x$ と x をなるべく組み合わせることを考える。

$$\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{(x + \sin x)(x - \sin x)}{x^2 \sin^2 x}$$

$$= \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) \left\{ \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) \frac{1}{x^2} \right\} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2.$$

2 番目の項については $\frac{0}{0}$ の形の極限であるので定理 5.6 を繰り返して適

用する :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) \frac{1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

したがって、答えは $\frac{1}{3}$.

7. (i) \log をとって考える :

$$\begin{aligned} \log \left(\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \log x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{1-x} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log 1 - \log x}{1-x} = -1. \end{aligned}$$

ここで $y = \log x$ の $x = 1$ での微分係数に注意。よって答えは e^{-1} .

(ii)

$$\begin{aligned} \log \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)}{x}. \end{aligned}$$

$\frac{-\infty}{\infty}$ の形の極限なので定理 5.6 を用いて

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\log \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) \right)'}{x'} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2} - \arctan x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(-\frac{1}{1+x^2} \right)'}{\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0. \end{aligned}$$

よって答えは 1.

$$8. (i) y' = -2e^{-2x} + 4e^{-4x}, y'' = 4e^{-2x} - 16e^{-4x} = 4e^{-2x}(1 - 4e^{-2x}).$$

よって $x > \log 2$ で上に凸、 $x < \log 2$ で下に凸、変曲点 $(\log 2, \frac{3}{16})$.

$$(ii) y' = -2xe^{-x^2}, y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}. \quad \text{よって } x < -\frac{1}{\sqrt{2}}, x > \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ で上に}$$

凸、 $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ で下に凸、変曲点 $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-1/2}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-1/2})$.