第 1 章　演習問題解答

1.1

a	$a+d$	$a+2d$	$\cdots$	$a+nd$
$a+nd$	$a+(n-1)d$	$a+(n-2)d$	$\cdots$	a
$2a+(n+1)d$	$2a+(n+1)d$	$2a+(n+1)d$	$\cdots$	$2a+(n+1)d$

から

$$2S_n = (n+1)\{2a+(n+1)d\}$$

を経て

$$S_n = \frac{(n+1)\{2a+(n+1)d\}}{2}$$

を得ます.

1.2 **(1)** $a_n = 1$　**(2)** $a_n = \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{1}{3}$　**(3)** $a_n = \frac{1}{4}5^{n+1} - \frac{1}{4}$
(4) $a_n = -\frac{2}{3^n} + 3$

1.3 **(1)** $r = 0.01$ のとき $T > \frac{0.01}{1+0.01} \times 600 \fallingdotseq 5.95$,
$r = 0.02$ のとき $T > \frac{0.02}{1+0.02} \times 600 \fallingdotseq 11.8$,
$r = 0.05$ のとき $T > \frac{0.05}{1+0.05} \times 600 \fallingdotseq 28.6$.
(2) $b_n < 0$ は

$$T > \frac{(1+r)^n rM}{\{(1+r)^n - 1\}(1+r)}$$

と必要十分で，$n = 50$ のとき

$$T > \frac{(1.01)^{50} \times 0.01 \times 600}{\{(1.01)^5 0 - 1\} \times 1.01} \fallingdotseq 15.2$$

が条件となります.
(3) $T \fallingdotseq 15.2$

1.4

$$b_n = a_{n+1} - a_n = n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1) = 3n(n+1)$$

から

$$3\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \sum_{k=0}^{n} b_k = a_{n+1} - a_0 = n(n+1)(n+2)$$

を得ます．これから

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

が従います．さらに

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) - \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

を得ます．同様に

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (k^3 - k) &= \sum_{k=0}^{n} (k-1)k(k+1) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4}\{(k-1)k(k+1)(k+2) - (k-2)(k-1)k(k+1)\} \\
&= \frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2)
\end{aligned}$$

を経て

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

を得ます．

1.5 2 次方程式の解の公式から，解は

$$\lambda = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}$$

となります.

$$\alpha = \frac{-p - (-\sqrt{-D})i}{2}$$

とすると，別の解は

$$\beta = \frac{-p + (-\sqrt{-D})i}{2} = \bar{\alpha}$$

となります．ここで $r = \sqrt{\frac{p^2-D}{4}}$ とすると

$$\cos\theta = -\frac{p}{2r}, \quad \sin\theta = \frac{-\sqrt{-D}}{2r}$$

を満たす $\theta \in \mathbf{R}$ が存在します．これを用いると

$$\beta = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad \alpha = r(\cos\theta - i\sin\theta)$$

と解は表示されます.

一般的に

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)$$

が成立しますから

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

$$\begin{aligned}(\cos\theta - i\sin\theta)^n &= (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))^n \\ &= \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta) = \cos n\theta - i\sin n\theta\end{aligned}$$

を得ます．これを用いると

$$\beta^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$$\alpha^n = r^n(\cos n\theta - i\sin n\theta)$$

となります.

1.6

$$\beta - \alpha = 2ir\sin\theta,\ \alpha\beta = r^2$$

$$\beta^n - \alpha^n = 2ir^n\sin n\theta,\ \beta^{n-1} - \alpha^{n-1} = 2ir^n\sin(n-1)\theta$$

から従います.

1.7 **(1)** $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ を解くと

$$\lambda = 1 \pm i = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2})$$

となりますから

$$\beta = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}),\ \alpha = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})$$

を得ます．これから

$$a_n = 2{\cdot}2^{\frac{n-1}{2}}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} + 1{\cdot}2^{\frac{n}{2}}\frac{\sin\frac{(n-1)\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = 2^{\frac{n+2}{2}}\sin\frac{n\pi}{4} + 2^{\frac{n+1}{2}}\sin\frac{(n-1)\pi}{4}$$

となります.

(2) $\lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0$ を解くと $\lambda = \frac{3\pm i\sqrt{7}}{2}$ となりますから，特性方程式の 2 解は

$$\beta = 2(\cos\theta + i\sin\theta),\ \alpha = 2(\cos\theta - i\sin\theta)$$

と $\cos\theta = \frac{3}{4}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$ を満たす実数 $\theta \in \mathbf{R}$ を用いて表示されます. これを用いると

$$\begin{aligned} a_n &= 2\cdot 2^{n-1}\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} + 1\cdot 2^n\frac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta} \\ &= 2^n\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} + 2^n\frac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{4}{\sqrt{7}}(2^n\sin n\theta + 2^n\sin(n-1)\theta) \end{aligned}$$

となります.

1.8

$$\begin{aligned} k(k-1)_nC_k = \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} &= n(n-1)\frac{(n-2)!}{(k-2)!\{(n-2)-(k-2)\}!} \\ &= n(n-1)_{n-2}C_{k-2} \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} k(k-1)_nC_k p^{k-2}q^{n-k} &= n(n-1)\sum_{k=2}^{n} {}_{n-2}C_{k-2}p^{k-2}q^{n-k} \\ &= n(n-1)\sum_{\ell=0}^{n-2} {}_{n-2}C_{\ell}p^{\ell}q^{(n-2)-\ell} \\ &= n(n-2)(p+q)^{n-2} \end{aligned}$$

1.9 **(i)** $s^n = (1+\theta)^n = 1 + n\theta + \frac{n(n-1)}{2}\theta^2 + \cdots + \theta^n > \frac{n(n-1)}{2}\theta^2$

(ii)

$$0 < nr^n = \frac{n}{s^n} < \frac{2n}{n(n-1)} \cdot \frac{1}{\theta^2} = \frac{2}{\theta^2} \cdot 1n - 1 \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty)$$

から，はさみうちの定理を用いて

$$nr^n \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty)$$

が従います.

(iii) $s = \frac{1}{r} = 1 + \theta$ とすると，不等式

$$\begin{aligned} s^n &= (1+\theta)^n = 1 + n\theta + \frac{n(n-1)}{2}\theta^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\theta^3 + \cdots + \theta^n \\ &> \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\theta^3 \end{aligned}$$

を用いて，(ii) と同様に示すことができます.

1.10 **(i)** だけを示します．$r = 0$ のときは明らかです．$r \neq 0$ のとき，$s = |r|$ は $0 < s < 1$ を満たします．そこで不等式

$$-ns^n \leqq nr^n \leqq ns^n$$

において $-ns^n \longrightarrow 0$, $ns^n \longrightarrow 0$ から $nr^n \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty)$ を得ます.

1.11 **（定理 1.6 の証明）** $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ が成立しますから，任意の正数 $R > 0$ に対して

$$a_n > R \quad (n \geqq L)$$

を満たす番号 L が存在します．ここで $a_n \leqq b_n$ を用いると

$$b_n > R \quad (n \geqq L)$$

が従います．これは $b_n \longrightarrow +\infty$ を意味します.

1.11 （定理 1.7 の証明） **(I)** $b_n \longrightarrow +\infty$ の場合

$$b_n > 1 \quad (n \geqq L)$$

を満たす番号 L が存在します．これから

$$a_n b_n > a_n \quad (n \geqq L)$$

が従います．このとき，次の定理 1.6 の「変形」を用いると $a_n b_n \longrightarrow +\infty$ を得ます.

> **「定理 1.16 の変形」**
> ある番号 N に対して
>
> $$a_n \leqq b_n \quad (n \geqq N)$$
>
> が成立するとします．このとき $a_n \longrightarrow +\infty$ ならば
>
> $$b_n \longrightarrow +\infty \quad (n \longrightarrow +\infty)$$
>
> が従います.

(II) $\beta = \lim_{n \longrightarrow +\infty} b_n \in \mathbf{R}$ の場合，誤差の許容幅を $\epsilon = \frac{\beta}{2}$ とすると

$$\frac{\beta}{2} < b_n < \frac{3}{2}\beta \qquad (n \geqq L)$$

を満たす番号 L が存在することが分かります．これから

$$a_n b_n > \frac{\beta}{2} \cdot a_n$$

がわかります．さらに $\frac{\beta}{2} a_n \longrightarrow +\infty$ が次のように示されますので，$a_n b_n \longrightarrow +\infty$ を得ます.

まず $a_n \longrightarrow +\infty$ ですから，任意の $R > 0$ に対して

$$a_n > \frac{2R}{\beta} \quad (n \geqq K)$$

を満たす番号 K が存在します．これは

$$\frac{\beta}{2} \cdot a_n > R \quad (n \geqq K)$$

を意味しますので，$\frac{\beta}{2} a_n \longrightarrow +\infty$ を得ます.

1.12 **(1)** $\frac{3}{2}$ **(2)** $\frac{2}{3}$ **(3)** 6