第 2 章　演習問題解答

2.1　**(i)** 1　**(ii)** $\frac{1}{3}$　**(iii)** 2　**(iv)** 1

2.2　不等式

$$0 \leqq \left|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}\right| = \frac{|x-a|}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a^2}} < \frac{|x-a|}{\sqrt[3]{a^2}}$$

を示して，はさみうちの定理を用います．

2.3　$g_1(x) := f(x)+\epsilon-f(c)$ に対して定理 2.3 を用います．すなわち $g_1(c) = \epsilon > 0$ から正数 $\delta_1 > 0$ が存在して

$$g_1(x) > 0 \quad (c - \delta_1 < x < x + \delta_1)$$

すなわち

$$f(x) > f(c) - \epsilon \quad (c - \delta_1 < x < x + \delta_1)$$

が成立することが従います．他方，$g_2(x) := -f(x) + f(c) + \epsilon$ に対して定理 2.2 を用いると，$g_2(c) = \epsilon > 0$ から

$$f(x) < f(c) + \epsilon \quad (c - \delta_2 < x < c + \delta_2)$$

を満たす正数 $\delta_2 > 0$ が存在することがわかります．ここで

$$\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$$

とすると

$$f(c) - \epsilon < f(x) < f(c) + \epsilon \quad (c - \delta < x < c + \delta)$$

を得ます．

2.4　公式

$$1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

を用います．この公式は，倍角の公式を用いて

$$\cos\theta = \cos(2 \cdot \frac{\theta}{2}) = 1 - 2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

から導くことができます．この公式を用いると

$$\frac{1-\cos\theta}{\theta^2} = \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2 \longrightarrow \frac{1}{2}$$

と $\theta \longrightarrow 0$ の極限を計算することができます．

2.5 $x_n \longrightarrow +\infty \quad (n \longrightarrow +\infty)$ が成立するとします．このとき不等式

$$f(x_n) \leqq g(x_n) \leqq h(x_n)$$

において $f(x_n),\ h(x_n) \longrightarrow A$ ですから，数列のはさみうちの定理から

$$g(x_n) \longrightarrow A \quad (n \longrightarrow +\infty)$$

を得ます．これは

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = A$$

を意味します．