第 4 章　演習問題解答

4.1　**(i)** のみ示します．$x > a$ と $x < a$ と場合を分けて考えると

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqq 0$$

を得ます．ここで $x \longrightarrow a$ とすると $f'(a) \geqq 0$ が従います．

4.2　$f(t) = \cos t$ とすると，逐次に微分していくと

$$f^{(4k+1)}(t) = -\sin t,\ f^{(4k+2)}(t) = -\cos t$$

$$f^{(4k+3)}(t) = \sin t,\ f^{(4k+4)}(t) = \cos t$$

であることが分かります．これから $t = 0$ を代入して

$$f^{(4k+1)}(0) = 0,\ f^{(4k+2)}(0) = -1,\ f^{(4k+3)}(0) = 0,\ f^{(4k+4)}(0) = 1$$

となります．このことから 0 と t の間に c が存在して

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \cdots + \frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} + \frac{f^{(k)}(c)}{k!}$$

が成立します．$\sin t$ の場合と同様に

$$\left|\frac{f^{(k)}(c)}{k!}\right| \leqq \frac{|t|^k}{k!} \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow +\infty)$$

が成立しますから

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + - \cdots$$

を得ます．

4.3 **(1)** 0 と $x(\leqq \frac{\pi}{2})$ の間に c と c' が存在して

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{\sin c}{3!}x^3 \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{\sin c'}{5!}x^5 \end{aligned}$$

が成立します．$0 < c,\ c' < x \leqq \frac{\pi}{2}$ から

$$\sin c,\ \sin c' > 0$$

が分かりますから

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 < \cos x < 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$$

を得ます.

(2) (1) と同様に Taylor の定理を用いると

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1+c)^3}x^3 \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1+c)^4}x^4 \end{aligned}$$

を満たす $c,\ c'$ が x と 1 の間に存在します．ここで $c,\ c',\ x > 0$ から

$$x - \frac{x^2}{2} \leqq \log(1+x) \leqq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

が従います.

4.4 **(1)** Taylor の定理を用いると

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{\sin c}{5!}x^5$$

を満たす c が x と 0 の間に存在することが分かります．これから

$$\frac{1}{x^4}(1 - \frac{x^2}{2} - \cos x) = -\frac{1}{4!} + \frac{\sin c}{5!}x \longrightarrow -\frac{1}{4!}$$

を得ます．ここで $x \longrightarrow 0$ のとき $c \longrightarrow 0$ から $\sin c \longrightarrow 0$ であることを用いていることに注意しましょう．

(2) (1) と同様に Taylor の定理を用いると

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1+c)^3}x^3$$

を満たす c が 0 と x の間に存在します．このことから

$$\frac{x - \log(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(1+c)^3}x \longrightarrow \frac{1}{2}$$

が従います．

(3) (1) および (2) と同様にもできますが，ここでは Taylor 展開を用いて示します．すなわち

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + - \cdots \quad (|x| < 1)$$

が成立することを用います．すると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{\log(1+x)}{x^2} &= \frac{1}{x}\left(1 - x + x^2 - x^3 + - \cdots\right) \\
&\quad - \frac{1}{x^2}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + - \cdots\right) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}x^2 + \cdots \longrightarrow -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

を得ます．

4.5 確率変数 X の 2 次のモーメントは

$$\begin{aligned} E(X^2) &= E(X(X-1)) + E(X) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} + \mu \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\mu^{k-2}}{(k-2)!} \cdot \mu^2 e^{-\mu} + \mu \\ &= \mu^2 e^{-\mu} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\mu^\ell}{\ell!} + \mu = \mu^2 + \mu \end{aligned}$$

と計算されます．このことから X の分散は

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu$$

となります.

4.6 $\ell \leqq k$ のとき

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^\ell t^k = k(k-1)(k-2)\cdots(k-\ell+1)t^{k-\ell} = \frac{k!}{(k-\ell)!} t^{k-\ell}$$

が成立します．他方

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{m-1} \frac{1}{(1-t)} = \frac{(m-1)!}{(1-t)^m}$$

となります．これらの 2 つの等式を用いて,

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k$$

の両辺を t で $(m-1)$ 回微分すると

$$\begin{aligned} \frac{(m-1)!}{(1-t)^m} &= \sum_{k=m-1}^{+\infty} \frac{k!}{(k-m+1)!} t^{k-m+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+m-1)!}{n!} t^n \qquad (n = k-m+1 \text{ と変数変換}) \end{aligned}$$

から

$$\frac{1}{(1-t)^m} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} {}_{n+m-1}C_n t^n$$

を得ます.

4.7 **(1)** $f'(t) = -\frac{1}{t}$，$f''(t) = \frac{1}{t^2} > 0$ から $f(t)$ は凸関数であることが分かります.

(2) $f(t)$ が凸関数ですから

$$f(\alpha x + \beta y) \leqq \alpha f(x) + \beta f(y)$$

が $\alpha, \beta \geqq 0$，$\alpha + \beta = 1$ を満たす α と β に対して成立します．これは

$$-\log(\alpha x + \beta y) \leqq -\alpha \log x - \beta \log y$$

すなわち

$$x^\alpha y^\beta \leqq \alpha x + \beta y$$

を意味します.

4.8 **(1)** $f(t)$ を 2 階微分すると

$$f'(t) = pt^{p-1}, \quad f''(t) = p(p-1)t^{p-2} > 0$$

から $f(t)$ が凸関数であることがわかります。

(2) (1) から

$$f(\alpha x + \beta y) \leqq \alpha f(x) + \beta f(y)$$

が従います。これは

$$(\alpha x + \beta y)^p \leqq \alpha x^p + \beta y^p$$

を意味します。

4.9 省略.

4.10 $f(t) = -\log t$ は凸関数ですからジェンゼンの不等式は

$$-\log\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leqq -\frac{1}{n}\log x_1 - \frac{1}{n}\log x_2 - \cdots - \frac{1}{n}\log x_n$$

となります．これは

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leqq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

を意味します.