第 8 章　演習問題解答

8.1　**(II)** $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ とします．これはある λ_0 に対して $x \in U_{\lambda_0}$ を意味します．ここで U_{λ_0} は開集合ですから，ある正数 δ が存在して

$$B_\delta(x) \subset U_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$$

が成立します．以上で $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ が開集合であることが証明されました．
(III) $x \in U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k$ とします．このとき $x \in U_i$ が成立します．U_i は開集合ですから，正数 $\delta_i > 0$ が存在して

$$B_{\delta_i}(x) \subset U_i \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$$

が成立します．ここで $\delta := \min(\delta_1, \cdots, \delta_k)$ とおくと

$$B_\delta(x) \subset B_{\delta_i}(x) \subset U_i$$

から

$$B_\delta(x) \subset U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k$$

が従います．これは $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k$ が開集合であることを意味します．

8.2　(8.7) は $\mathrm{Q} \in B_{r_1}(\mathrm{P})$ ならば $\mathrm{Q} \in B_r(\mathrm{P})$ を意味します．実際，

$$\begin{aligned} d(\mathrm{Q}, \mathrm{P}_0) &\leqq d(\mathrm{Q}, \mathrm{P}) + d(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0) \\ &< r_1 + d(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0) = r - d(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0) + d(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0) = r \end{aligned}$$

から $\mathrm{Q} \in B_r(\mathrm{P}_0)$ が従います．

8.3　$\mathrm{P}_n = (x_n, y_n)$ とすると $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ は有界列となります．これから

$$|x_n| \leqq R,\ |y_n| \leqq R \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たす正数 $R > 0$ が存在することがわかります．このとき

$$x_n^2 + y_n^2 \leqq R^2 + R^2 = 2R^2$$

から

$$d(\mathrm{O}, \mathrm{P}_n) \leqq \sqrt{2}R \quad (\text{すべての } n)$$

が成立します．

8.4 **（定理 8.3 の証明）**$(a,b) \in I \times \mathbf{R}$ とします．$(x_n, y_n) \in I \times \mathbf{R}$ が $(x_n, y_n) \longrightarrow (a,b)$ が成立するとき

$$x_n \longrightarrow a \quad (n \longrightarrow +\infty)$$

が従います．このとき

$$F(x_n, y_n) = f(x_n) \longrightarrow f(a) = F(a,b)$$

となります．これは F が (a,b) で連続であることを意味します．

8.4 **（定理 8.4 の証明）** $(a,b) \in U$ とします．$(x_n, y_n) \in U$ が

$$(x_n, y_n) \longrightarrow (a,b)$$

を満たすならば

$$f(x_n, y_n) \longrightarrow f(a,b)$$

となります（f の (a,b) における連続性）．このとき G の $f(a,b)$ における連続性から

$$G(f(x_n, y_n)) \longrightarrow G(f(a,b))$$

が従います．以上で $G(f(x,y))$ の $(x,y) = (a,b)$ における連続性が示されました．

（定理 8.5 の証明） これは自明なので省略します．

8.4 **（定理 8.6 の証明）** 積 fg の連続性だけ示します．$(a,b) \in U$ に対して

$$(x_n, y_n) \in U, \quad (x_n, y_n) \longrightarrow (a,b)$$

が成立するとします．このとき

$$f(x_n, y_n)g(x_n, y_n) \longrightarrow f(a,b)g(a,b)$$

が従います．これは fg が (a,b) で連続であることを意味します．

8.5 **(1)** $f_1(x,y)=x^2-2y^2$ は $\mathbf{R}^2$ 上で連続で

$$U_1 = f_1^{-1}((1,+\infty))$$

ですから U_1 は開集合です.
(2) $f_2(x,y)=x^2+2y^2$ は $\mathbf{R}^2$ 上で連続で

$$U_2 = f_2^{-1}((-\infty,1))$$

ですから U_2 は開集合です.
(3) $g(x,y)=x+y$ は $\mathbf{R}^2$ 上で連続で

$$g^{-1}(1,+\infty) = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2;\ x+y>1\}$$

は開集合です．さらに

$$U_3 = U_2 \cap g^{-1}((1,+\infty))$$

は開集合の交わりですから開集合です.

8.6 省略.

8.7 $\{a_n\}$ は有界列ですから，収束する部分列 a_{n_k} か存在します．$\{b_{n_k}\}$ も有界列ですから，収束する部分列 $\{b_{n_{k_j}}\}$ が存在します．このとき

$$(a_{n_{k_j}}, b_{n_{k_j}})$$

は収束列です．収束列 a_{n_k} の部分列 $a_{n_{k_j}}$ も収束列であることに注意しましょう.

8.8 **(1)** $f_x = 3x^2+4xy,\ f_y = 2x^2+20y^3$

$$f_{xx}=6x+4y,\quad f_{xy}=f_{yx}=4x,\quad f_{yy}=60y^2$$

(2)

$$f_x = \log(x^2+2y^2)+\frac{2x^2}{x^2+2y^2},\quad f_y=\frac{4xy}{(x^2+2y^2)^2}$$

$$f_{xx}=\frac{2x(x^2-2y^2)}{(x^2+2y^2)^2}$$

$$f_{xy}=f_{yx}=\frac{4y(2y^2-x^2)}{(x^2+2y^2)^2}$$

$$f_{yy}=\frac{4x(x^2-2y^2)}{(x^2+2y^2)^2}$$

8.9 **(1)** 停留点を定める方程式

$$\begin{cases} z_x = & 2x + y - 4 & = 0 \\ z_y = & x + 2y - 2 & = 0 \end{cases}$$

を解いて $(x, y) = (2, 0)$ が停留点です.

(2) 停留点を定める方程式

$$\begin{cases} z_x = & 4x^3 - 4x + 4y = 0 & \cdots (i) \\ z_y = & 4y^3 + 4x - 4y = 0 & \cdots (ii) \end{cases}$$

を解きます. $(i) + (ii)$ から $x^3 + y^3 = 0$ すなわち

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 0$$

が必要であることがわかります. 条件 $x^2 - xy + y^2 = 0$ は

$$x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} = 0$$

から $x = \frac{y}{2}$ かつ $y = 0$ と必要十分で, 結局 $(x, y) = (0, 0)$ と必要十分でありことがわかります. $(x, y) = (0, 0)$ は $x + y = 0$ を満たしますから, $(i) + (ii)$ は $x + y = 0$ と必要十分です.

必要条件 $x + y = 0$ を $y = -x$ として (i) に代入すると $4x^3 - 8x = 0$ すなわち $x = 0,\ \pm\sqrt{2}$ を得ます.

以上から停留点は

$$(x, y) = (0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

であることがわかります.

8.10

$$g(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2 - x - 2y + 2$$

とおきます．すると

$$g_x(x,y) = 8x - 4y - 1, \quad g_y(x,y) = -4y + 2y - 2$$

から

$$g_x(\frac{2}{5},\frac{4}{5}) = -1, \quad g_y(\frac{2}{5},\frac{4}{5}) = -2$$

と計算されます．求める接線の方程式は

$$-(x-\frac{2}{5}) - 2(y-\frac{4}{5}) = 0$$

すなわち

$$x - 2y - 2 = 0$$

となります．

8.11 対称行列である (a,b) における f のヘッセ行列 $H(f)(a,b)$ は仮定 $\det(H(f)(a,b)) < 0$ から，正の固有値 $p > 0$ と負の固有値 $q < 0$ を持ちます．このとき p に対する固有ベクトル $\vec{v}_1$ と q に対する固有ベクトル $\vec{v}_2$ を用いて

$$F_1(t) = f((a,b) + t\,{}^t\vec{v}_1), \quad F_2(t) = f((a,b) + t\,{}^t\vec{v}_2)$$

を考えます．定理 8.21 の証明と同様の計算を用いると

$$F_1'(0) = 0, \quad F_2'(0) = 0$$

$$F_1''(0) = (H(f)(a,b)\vec{v}_1, \vec{v}_1) = p||\vec{v}_1||^2 > 0$$

$$F_2''(0) = (H(f)(a,b)\vec{v}_2, \vec{v}_2) = q||\vec{v}_2||^2 < 0$$

を得ます．これは，$\vec{v}_1$ の方向で考えると (a,b) が極小点であり，$\vec{v}_2$ の方向で考えると (a,b) が極大点であることを意味します．
以上のことから，(a,b) は極大点でも極小点でもないことがわかりました．

8.12 (1)

$$z_x = 4x^3 - 4y = 0, \quad z_y = 4y^3 - 4x = 0$$

すなわち

$$y = x^3, \quad x = 4y^3$$

が停留点を定める条件です．$y = x^3$ を $x = y^3$ に代入すると

$$x = x^9 \quad \text{すなわち}\ x = 0, \pm 1$$

を得ます．これを $y = x^3$ に代入して，停留点が

$$(x, y) = (0, 0),\ (1, -1),\ (-1, 1)$$

であることが従います．この 3 点における極大・極小を判定しましょう．(x, y) におけるヘッセ行列は

$$H(f) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

と計算されます．
$(0, 0)$ において ヘッセ行列式は

$$\det(H(f)) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

となりますから，$(0, 0)$ は極大点でも極小点でもありません．
$(\pm 1, \pm 1)$ において ヘッセ行列式は

$$\det(H(f)) = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 4^2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4^2 \cdot 8 > 0$$

となり，$z_{xx} = 12 > 0$ も成立します．よって $(\pm 1, \pm 1)$ は f の極小点であることが従います．

8.12 **(2)** 停留点を定める条件は

$$z_x = 4x(x^2+y^2-1) = 0, \quad z_y = 4y(x^2+y^2+1) = 0$$

から

$$y = 0 \quad \text{AND} \quad (x^2+y^2 = 1 \quad \text{OR} \quad x = 0)$$

であることが分かります．これは

$$(x, y) = (\pm 1, 0), (0, 0)$$

と必要十分です．この 3 点において極大・極小を判定しましょう．
点 (x, y) におけるヘッセ行列は

$$H(f) = \begin{pmatrix} 4(3x^2+y^2-1) & 8xy \\ 8xy & 4(x^2+3y^2+1) \end{pmatrix}$$

と計算されます．
点 $(0, 0)$ においてヘッセ行列式は

$$\det(H(f)) = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

となり，$(0, 0)$ が極大点でも極小点でもないことがわかります．
点 $(\pm 1, 0)$ においてヘッセ行列式は

$$\det(H(f)) = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 64 > 0$$

となり，$z_{xx}(\pm, 1) = 8 > 0$ と合わせて，$(\pm 1, 0)$ が極小であることがわかります．

8.13

$$\nabla(f) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad \nabla(g) = \begin{pmatrix} 4x \\ 2y \end{pmatrix}$$

から，条件つき極値問題の停留点は条件

$$\begin{cases} xy = 2\lambda x & \cdots ① \\ x^2 = 2\lambda y & \cdots ② \\ 2x^2 + y^2 = 1 & \cdots ③ \end{cases}$$

を満たす λ が存在することとなります．①は

$$x = 0 \quad \text{OR} \quad y = 2\lambda$$

と必要十分です．これを用いて場合を分けて考えます．
$\underline{x = 0 \text{ のとき}}$③に代入して $y = \pm 1$ となります．このとき②に代入して $\lambda = 0$ も従います．
$\underline{y = 2\lambda \text{ のとき}}$②にこれを代入して

$$x^2 = y^2$$

を得ます．③に代入すると $3x^2 = 1$ から $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ となります．これから

$$(x, y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$$

が停留点で，対応する λ は $\lambda = \frac{y}{2}$ から

$$(x, y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \quad \text{のとき} \quad \lambda = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$(x, y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \quad \text{のとき} \quad \lambda = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

となります．

8.14　（例 8.22）$\underline{(x,y)=(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2})}$ <u>（復号同順）のとき</u>

$$\lambda = 2\frac{x}{y} = 2$$

です．そして

$$L = f - \lambda g = xy - \lambda(x^2+y^2-1)$$

の 2 階微分を計算すると

$$L_{xx} = -2\lambda = -4,\ L_{xy} = L_{yx} = 1,\ L_{yy} = -2\lambda = -4$$

となります．他方

$$g_x = g_y = \pm\sqrt{2}$$

です．このとき

$$B = \begin{vmatrix} 0 & \pm\sqrt{2} & \pm\sqrt{2} \\ \pm\sqrt{2} & -4 & 1 \\ \pm\sqrt{2} & 1 & -4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 20 > 0$$

から，この 2 点は極大点であることがわかります．

$\underline{(x,y)=(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\mp\frac{\sqrt{2}}{2})}$ <u>（復号同順）のとき</u>

$$\lambda = 2\frac{x}{y} = -2$$

です．そして

$$L = f - \lambda g = xy - \lambda(x^2+y^2-1)$$

の 2 階微分を計算すると

$$L_{xx} = -2\lambda = 4,\ L_{xy} = L_{yx} = 1,\ L_{yy} = -2\lambda = 4$$

となります．他方

$$g_x = \pm\sqrt{2},\quad g_y = \mp\sqrt{2}$$

です．このとき

$$B = \begin{vmatrix} 0 & \pm\sqrt{2} & \mp\sqrt{2} \\ \pm\sqrt{2} & 4 & 1 \\ \mp\sqrt{2} & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -20 < 0$$

から，この 2 点は極小点であることがわかります．

8.14　（例 8.23） $(x,y) = (\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}, \pm\frac{\sqrt{5}}{5})$ において

$$\lambda = \frac{1}{x} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

です.

$$L = f - \lambda g = (2x+y) - \lambda(x^2+y^2-1)$$

の 2 階微分は

$$L_{xx} = -2\lambda,\ L_{xy} = L_{yx} = 0,\ L_{yy} = -2\lambda$$

となります．また $g_x = 2,\ g_y = 1$ です．これを用いて

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & \mp\sqrt{5} & 0 \\ -1 & 0 & \mp\sqrt{5} \end{vmatrix} = \pm 3\sqrt{5}$$

と計算されます.

$\underline{(x,y) = (\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5})\text{ において}}$$B < 0$ から極小値をとります.

$\underline{(x,y) = (-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5})\text{ において}}$$B > 0$ から極大値をとります.

8.14　（例 8.24）

$$L = f - \lambda g = x^2 y - \lambda(x + y - 9)$$

の 2 階微分を計算すると

$$L_{xx} = 2y,\ L_{xy} = L_{yx} = 2x,\ L_{yy} = 0$$

となります．また

$$g_x = g_y = 1$$

です.

$\underline{(x, y) = (0, 9)\text{ のとき}}\lambda = 0$ となります．このとき

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 < 0$$

から $(0, 9)$ は極小点であることがわかります.

$\underline{(x, y) = (6, 3)\text{ のとき}}\lambda = 36$ となります.

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 12 \\ 1 & 12 & 0 \end{vmatrix} = 18 > 0$$

から $(6, 3)$ は極大点であることがわかります.

8.14　（例 8.25）　$\underline{(x, y) = (2, 2)\text{ のとき}}$

$$\lambda = 3x^2 + y = 14$$

です．関数

$$L = f - \lambda g = (x^3 + y^3 + xy) - \lambda(x + y - 4)$$

の 2 階微分を計算すると

$$L_{xx} = 6x,\ L_{xy} = L_{yx} = 1,\ L_{yy} = 6y$$

となり，また

$$g_x = g_y = 1$$

と計算されます．ここで

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 12 & 1 \\ 1 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 22 > 0$$

から $(2, 2)$ で極大値をとります．

8.15

$$g(x,y) = x + y - 1,\ f(x,y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}}$$

に対して，勾配ベクトルは

$$\nabla(g) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \nabla(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} \\ \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}} \end{pmatrix}$$

と計算されます．これから，制約条件付き極値問題の停留点は条件

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} = \lambda & \cdots ① \\ \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}} = \lambda & \cdots ② \\ x + y = 1 & \cdots ③ \end{cases}$$

で特徴付けられます．ここで①と②から

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}}$$

を経て $2x = y$ を得ます．これを③に代入して

$$x = \frac{1}{3},\ y = \frac{2}{3}$$

となります．このとき①を用いて $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt[4]{6}$ と計算されます．ここで

$$L = f - \lambda g = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} - (x + y - 1)$$

の 2 階微分を計算すると

$$L_{xx} = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{4}},\ L_{xy} = L_{yx} = \frac{1}{8}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}},\ L_{yy} = -\frac{3}{16}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{7}{4}}$$

となり，また

$$g_x = g_y = 1$$

です．これらを用いて

$$\begin{aligned} B &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{4}} & \frac{1}{8}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}} \\ 1 & \frac{1}{8}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}} & -\frac{3}{16}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{7}{4}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}x^{-1}\lambda & \frac{1}{2}x^{-1}\lambda \\ 1 & \frac{1}{2}x^{-1}\lambda & -\frac{3}{4}y^{-1}\lambda \end{vmatrix} \\ &= \frac{3}{2}x^{-1}\lambda + \frac{3}{4}y^{-1}\lambda > 0 \end{aligned}$$

から，$(\frac{3}{1}, \frac{2}{3})$ は制約条件付き極値問題の極大値であることがわかります．

8.16

$$f = x^2 + y^2,\ g = 4x^2 - 6xy + 4y^2 - 2$$

に対して勾配ベクトルを計算すると

$$\nabla(f) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix},\ \nabla(g) = \begin{pmatrix} 8x - 6y \\ -6x + 8y \end{pmatrix}$$

となります．このことから，制約条件付き極値問題の停留点は条件

$$\begin{cases} 2x = \lambda(8x - 6y) & \cdots ① \\ 2y = \lambda(-6x + 8y) & \cdots ② \\ 4x^2 - 6xy + 4y^2 = 2 & \cdots ③ \end{cases}$$

で特徴付けられます．① + ② から

$$2x + 2y = \lambda(2x + 2y)$$

を得ます．これは

$$x + y = 1 \quad \text{OR} \quad \lambda = 1$$

と必要十分です．これを用いて場合分けをします．

<u>(I)$x + y = 0$ のとき</u>，①に $y = -x$ を代入して

$$2x = \lambda \cdot 14x \quad \text{すなわち} \quad \lambda = \frac{1}{7}$$

を得ます．他方 $y = -x$ を③に代入して

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}, \quad y = \mp\frac{1}{\sqrt{7}}$$

を得ます．

8.16 (II)$\lambda = 1$ のとき，①に代入して $x = y$ を得ます．これを③に代入して

$$x = \pm 1, \quad y = \pm 1 \quad \text{（複号同順）}$$

を得ます.
ここで

$$L = f - \lambda g = (x^2 + y^2) - \lambda(4x^2 - 6xy + 4y^2 - 2)$$

の 2 階微分を計算すると

$$L_{xx} = 2 - 8\lambda,\ L_{xy} = L_{yx} = 6\lambda,\ L_{yy} = 2 - 8\lambda$$

となります．また

$$g_x = 2x,\ g_y = 2y$$

です.
$(x, y) = (\pm 1, \pm 1)$ のとき

$$B = \begin{vmatrix} 0 & \pm 2 & \pm 2 \\ \pm 2 & -6 & 6 \\ \pm 2 & 6 & -6 \end{vmatrix} = 96 > 0$$

から，極大点であることが分かります.
$(x, y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{7}}, \mp\frac{1}{\sqrt{7}})$ のとき，

$$B = \begin{vmatrix} 0 & \pm\frac{2}{\sqrt{7}} & \mp\frac{2}{\sqrt{7}} \\ \pm\frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{6}{7} & \frac{6}{7} \\ \mp\frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{6}{7} & \frac{6}{7} \end{vmatrix} = -\frac{96}{49} < 0$$

から，極小点であることが分かります.

8.17 省略.

8.18

$$x^2 + y(x)^2 - 3xy(x) \equiv 0$$

の両辺を x で微分すれば

$$2x + 2yy' - 3y - 3xy' = 0 \cdots ①$$

すなわち

$$(2y - 3x)y' = 3y - 2x$$

を得ます。これから

$$y' = \frac{3y - 2x}{2y - 3x}$$

を得ます。

さらに① の両辺を x で微分すると

$$2 + 2(y')^2 + 2yy'' - 6y' - 3xy' \equiv 0$$

を得ます。これから

$$y'' = \frac{6y' - 2(y')^2 - 2}{2y - 3x}$$

が従います。