第 1 章　演習問題解答

1.1

a	$a+d$	$a+2d$	$\cdots$	$a+nd$
$a+nd$	$a+(n-1)d$	$a+(n-2)d$	$\cdots$	a
$2a+(n+1)d$	$2a+(n+1)d$	$2a+(n+1)d$	$\cdots$	$2a+(n+1)d$

から

$$2S_n = (n+1)\{2a+(n+1)d\}$$

を経て

$$S_n = \frac{(n+1)\{2a+(n+1)d\}}{2}$$

を得ます.

1.2　**(1)** $a_n = 1$　**(2)** $a_n = \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{1}{3}$　**(3)** $a_n = \frac{1}{4}5^{n+1} - \frac{1}{4}$
(4) $a_n = -\frac{2}{3^n} + 3$

1.3　**(1)** $r = 0.01$ のとき $T > \frac{0.01}{1+0.01} \times 600 \fallingdotseq 5.95$,
$r = 0.02$ のとき $T > \frac{0.02}{1+0.02} \times 600 \fallingdotseq 11.8$,
$r = 0.05$ のとき $T > \frac{0.05}{1+0.05} \times 600 \fallingdotseq 28.6$.
(2) $b_n < 0$ は

$$T > \frac{(1+r)^n rM}{\{(1+r)^n - 1\}(1+r)}$$

と必要十分で, $n = 50$ のとき

$$T > \frac{(1.01)^{50} \times 0.01 \times 600}{\{(1.01)^50 - 1\} \times 1.01} \fallingdotseq 15.2$$

が条件となります.
(3) $T \fallingdotseq 15.2$

1.4

$$b_n = a_{n+1} - a_n = n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1) = 3n(n+1)$$

から

$$3\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \sum_{k=0}^{n} b_k = a_{n+1} - a_0 = n(n+1)(n+2)$$

を得ます．これから

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

が従います．さらに

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) - \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

を得ます．同様に

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k^3 - k) &= \sum_{k=0}^{n}(k-1)k(k+1) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4}\{(k-1)k(k+1)(k+2) - (k-2)(k-1)k(k+1)\} \\ &= \frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

を経て

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

を得ます．

1.5 2 次方程式の解の公式から，解は

$$\lambda = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}$$

となります.

$$\alpha = \frac{-p - (-\sqrt{-D})i}{2}$$

とすると，別の解は

$$\beta = \frac{-p + (-\sqrt{-D})i}{2} = \bar{\alpha}$$

となります．ここで $r = \sqrt{\frac{p^2-D}{4}}$ とすると

$$\cos\theta = -\frac{p}{2r}, \quad \sin\theta = \frac{-\sqrt{-D}}{2r}$$

を満たす $\theta \in \mathbf{R}$ が存在します．これを用いると

$$\beta = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad \alpha = r(\cos\theta - i\sin\theta)$$

と解は表示されます.
一般的に

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)$$

が成立しますから

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

$$\begin{aligned}(\cos\theta - i\sin\theta)^n &= (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))^n \\ &= \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta) = \cos n\theta - i\sin n\theta\end{aligned}$$

を得ます．これを用いると

$$\beta^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$$\alpha^n = r^n(\cos n\theta - i\sin n\theta)$$

となります.

1.6

$$\beta - \alpha = 2ir\sin\theta,\ \alpha\beta = r^2$$

$$\beta^n - \alpha^n = 2ir^n\sin n\theta,\ \beta^{n-1} - \alpha^{n-1} = 2ir^n\sin(n-1)\theta$$

から従います.

1.7 **(1)** $\lambda^2-2\lambda+2=0$ を解くと

$$\lambda=1\pm i=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2})$$

となりますから

$$\beta=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}),\ \alpha=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})$$

を得ます．これから

$$a_n=2\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}+1\cdot 2^{\frac{n}{2}}\frac{\sin\frac{(n-1)\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}=2^{\frac{n+2}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}+2^{\frac{n+1}{2}}\sin\frac{(n-1)\pi}{4}$$

となります.

(2) $\lambda^2-3\lambda+4=0$ を解くと $\lambda=\frac{3\pm i\sqrt{7}}{2}$ となりますから，特性方程式の 2 解は

$$\beta=2(\cos\theta+i\sin\theta),\ \alpha=2(\cos\theta-i\sin\theta)$$

と $\cos\theta=\frac{3}{4}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$ を満たす実数 $\theta\in\mathbf{R}$ を用いて表示されます. これを用いると

$$\begin{aligned}a_n &= 2\cdot 2^{n-1}\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}+1\cdot 2^n\frac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta}\\ &= 2^n\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}+2^n\frac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta}\\ &= \frac{4}{\sqrt{7}}(2^n\sin n\theta+2^n\sin(n-1)\theta)\end{aligned}$$

となります.

1.8

$$\begin{aligned}k(k-1)_nC_k=\frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} &= n(n-1)\frac{(n-2)!}{(k-2)!\{(n-2)-(k-2)\}!}\\ &= n(n-1)_{n-2}C_{k-2}\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}k(k-1)_nC_kp^{k-2}q^{n-k} &= n(n-1)\sum_{k=2}^{n}{}_{n-2}C_{k-2}p^{k-2}q^{n-k}\\ &= n(n-1)\sum_{\ell=0}^{n-2}{}_{n-2}C_{\ell}p^{\ell}q^{(n-2)-\ell}\\ &= n(n-2)(p+q)^{n-2}\end{aligned}$$

1.9 **(i)** $s^n = (1+\theta)^n = 1 + n\theta + \frac{n(n-1)}{2}\theta^2 + \cdots + \theta^n > \frac{n(n-1)}{2}\theta^2$

(ii)

$$0 < nr^n = \frac{n}{s^n} < \frac{2n}{n(n-1)} \cdot \frac{1}{\theta^2} = \frac{2}{\theta^2} \cdot 1n - 1 \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty)$$

から，はさみうちの定理を用いて

$$nr^n \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty)$$

が従います.

(iii) $s = \frac{1}{r} = 1 + \theta$ とすると，不等式

$$\begin{aligned} s^n &= (1+\theta)^n = 1 + n\theta + \frac{n(n-1)}{2}\theta^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\theta^3 + \cdots + \theta^n \\ &> \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\theta^3 \end{aligned}$$

を用いて，(ii) と同様に示すことができます.

1.10 **(i)** だけを示します．$r = 0$ のときは明らかです．$r \neq 0$ のとき，$s = |r|$ は $0 < s < 1$ を満たします．そこで不等式

$$-ns^n \leqq nr^n \leqq ns^n$$

において $-ns^n \longrightarrow 0$, $ns^n \longrightarrow 0$ から $nr^n \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty)$ を得ます.

1.11 **（定理 1.6 の証明）** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ が成立しますから，任意の正数 $R > 0$ に対して

$$a_n > R \quad (n \geqq L)$$

を満たす番号 L が存在します．ここで $a_n \leqq b_n$ を用いると

$$b_n > R \quad (n \geqq L)$$

が従います．これは $b_n \longrightarrow +\infty$ を意味します.

1.11　（定理 1.7 の証明）　**(I)** $b_n \longrightarrow +\infty$ の場合

$$b_n > 1 \quad (n \geqq L)$$

を満たす番号 L が存在します．これから

$$a_n b_n > a_n \quad (n \geqq L)$$

が従います．このとき，次の定理 1.6 の「変形」を用いると $a_n b_n \longrightarrow +\infty$ を得ます.

> **「定理 1.16 の変形」**
> ある番号 N に対して
>
> $$a_n \leqq b_n \quad (n \geqq N)$$
>
> が成立するとします．このとき $a_n \longrightarrow +\infty$ ならば
>
> $$b_n \longrightarrow +\infty \quad (n \longrightarrow +\infty)$$
>
> が従います.

(II) $\beta = \lim_{n \longrightarrow +\infty} b_n \in \mathbf{R}$ の場合，誤差の許容幅を $\epsilon = \frac{\beta}{2}$ とすると

$$\frac{\beta}{2} < b_n < \frac{3}{2}\beta \qquad (n \geqq L)$$

を満たす番号 L が存在することが分かります．これから

$$a_n b_n > \frac{\beta}{2} \cdot a_n$$

がわかります．さらに $\frac{\beta}{2} a_n \longrightarrow +\infty$ が次のように示されますので，$a_n b_n \longrightarrow +\infty$ を得ます.

まず $a_n \longrightarrow +\infty$ ですから，任意の $R > 0$ に対して

$$a_n > \frac{2R}{\beta} \quad (n \geqq K)$$

を満たす番号 K が存在します．これは

$$\frac{\beta}{2} \cdot a_n > R \quad (n \geqq K)$$

を意味しますので，$\frac{\beta}{2} a_n \longrightarrow +\infty$ を得ます.

1.12　**(1)** $\frac{3}{2}$　**(2)** $\frac{2}{3}$　**(3)** 6

第 2 章　演習問題解答

2.1　**(i)** 1　**(ii)** $\frac{1}{3}$　**(iii)** 2　**(iv)** 1

2.2　不等式

$$0 \leqq \left|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}\right| = \frac{|x-a|}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a^2}} < \frac{|x-a|}{\sqrt[3]{a^2}}$$

を示して，はさみうちの定理を用います．

2.3　$g_1(x) := f(x)+\epsilon-f(c)$ に対して定理 2.3 を用います．すなわち $g_1(c) = \epsilon > 0$ から正数 $\delta_1 > 0$ が存在して

$$g_1(x) > 0 \quad (c - \delta_1 < x < x + \delta_1)$$

すなわち

$$f(x) > f(c) - \epsilon \quad (c - \delta_1 < x < x + \delta_1)$$

が成立することが従います．他方，$g_2(x) := -f(x) + f(c) + \epsilon$ に対して定理 2.2 を用いると，$g_2(c) = \epsilon > 0$ から

$$f(x) < f(c) + \epsilon \quad (c - \delta_2 < x < c + \delta_2)$$

を満たす正数 $\delta_2 > 0$ が存在することがわかります．ここで

$$\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$$

とすると

$$f(c) - \epsilon < f(x) < f(c) + \epsilon \quad (c - \delta < x < c + \delta)$$

を得ます．

2.4　公式

$$1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

を用います．この公式は，倍角の公式を用いて

$$\cos\theta = \cos(2\cdot\frac{\theta}{2}) = 1 - 2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

から導くことができます．この公式を用いると

$$\frac{1-\cos\theta}{\theta^2} = \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2 \longrightarrow \frac{1}{2}$$

と $\theta \longrightarrow 0$ の極限を計算することができます．

2.5 $x_n \longrightarrow +\infty \quad (n \longrightarrow +\infty)$ が成立するとします．このとき不等式

$$f(x_n) \leqq g(x_n) \leqq h(x_n)$$

において $f(x_n),\ h(x_n) \longrightarrow A$ ですから，数列のはさみうちの定理から

$$g(x_n) \longrightarrow A \quad (n \longrightarrow +\infty)$$

を得ます．これは

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = A$$

を意味します.

第 3 章　演習問題解答

3.1　**演習 2.2** で用いたのと同様の有理化を用います．すなわち

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a} &= \frac{x-a}{\{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+(\sqrt[3]{a})^2\}(x-a)} \\ &= \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+(\sqrt[3]{a})^2} \longrightarrow \frac{1}{(\sqrt[3]{a})^2+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a}+(\sqrt[3]{a})^2} = \frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

と極限が計算されます．ここで

$$\sqrt[3]{x} \longrightarrow \sqrt[3]{a} \quad (x \longrightarrow a)$$

であることを用いました.

3.2　　2 項定理を用いて $(a+h)^n$ を展開します.

$$\begin{aligned}\frac{(a+h)^n-a^n}{h} &= \frac{1}{h}\times\left(\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k a^{n-k}h^k - a^n\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}{}_nC_k a^{n-k}h^{k-1} \\ &= na^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}h+\cdots+{}_nC_k a^{n-k}h^{k-1}+\cdots+h^{n-1} \\ &\longrightarrow na^{n-1}\end{aligned}$$

3.3　**(1)** $y' = \frac{5}{2}x\sqrt{x}$　**(2)** $y' = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$　**(3)** $y' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$
(4) $y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

3.4 **(I)**$\alpha > 0$ のとき $t = \frac{n}{\alpha}$ とおくと $n \longrightarrow +\infty$ のとき $t \longrightarrow +\infty$ となります．そこで

$$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = \left\{\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right\}^\alpha \longrightarrow e^\alpha$$

と計算されます．ここで s の関数 $s\alpha$ の $s = \alpha$ における連続性を用いました．

(II) $\alpha = 0$ のとき

$$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = 1 \longrightarrow 1$$

となります．

(III)$\alpha > 0$ のとき $t = \frac{n}{\alpha}$ とおくと $n \longrightarrow +\infty$ のとき $t \longrightarrow -\infty$ となります．このことを用いて

$$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = \left\{\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right\}^\alpha \longrightarrow e^\alpha$$

と計算されます．

以上の 3 通りの場合をまとめると

$$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n \longrightarrow e^\alpha \quad (n \longrightarrow +\infty)$$

を得ます．

3.5 (3.18) を微分して

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)r^{k-2} = \frac{2}{(1-r)^3}$$

を得ます．これを用いると確率変数 X の 2 次のモーメントは

$$\begin{aligned}
E(X) &= E(X(X-1)) + E(X) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)p^k q + \frac{p}{q} \\
&= p^2 q \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)p^{k-2} + \frac{p}{q} \\
&= p^2 q \frac{2}{(1-p)^3} + \frac{p}{q} = \frac{2p^2 + pq}{q^2}
\end{aligned}$$

と計算され，これを用いて X の分散は

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{p^2 + pq}{q^2} = \frac{p(p+q)}{q^2} = \frac{p}{q^2}$$

となります．

第 4 章　演習問題解答

4.1　(i) のみ示します．$x > a$ と $x < a$ と場合を分けて考えると

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqq 0$$

を得ます．ここで $x \longrightarrow a$ とすると $f'(a) \geqq 0$ が従います．

4.2　$f(t) = \cos t$ とすると，逐次に微分していくと

$$f^{(4k+1)}(t) = -\sin t,\ f^{(4k+2)}(t) = -\cos t$$

$$f^{(4k+3)}(t) = \sin t,\ f^{(4k+4)}(t) = \cos t$$

であることが分かります．これから $t = 0$ を代入して

$$f^{(4k+1)}(0) = 0,\ f^{(4k+2)}(0) = -1,\ f^{(4k+3)}(0) = 0,\ f^{(4k+4)}(0) = 1$$

となります．このことから 0 と t の間に c が存在して

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \cdots + \frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} + \frac{f^{(k)}(c)}{k!}$$

が成立します．$\sin t$ の場合と同様に

$$\left| \frac{f^{(k)}(c)}{k!} \right| \leqq \frac{|t|^k}{k!} \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow +\infty)$$

が成立しますから

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + - \cdots$$

を得ます．

4.3 **(1)** 0 と $x(\leqq \frac{\pi}{2})$ の間に c と c' が存在して

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{\sin c}{3!}x^3 \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{\sin c'}{5!}x^5\end{aligned}$$

が成立します． $0 < c,\ c' < x \leqq \frac{\pi}{2}$ から

$$\sin c,\ \sin c' > 0$$

が分かりますから

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 < \cos x < 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$$

を得ます.

(2) (1) と同様に Taylor の定理を用いると

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1+c)^3}x^3 \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1+c)^4}x^4\end{aligned}$$

を満たす $c,\ c'$ が x と 1 の間に存在します．ここで $c,\ c',\ x > 0$ から

$$x - \frac{x^2}{2} \leqq \log(1+x) \leqq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

が従います.

4.4 **(1)** Taylor の定理を用いると

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{\sin c}{5!}x^5$$

を満たす c が x と 0 の間に存在することが分かります．これから

$$\frac{1}{x^4}(1 - \frac{x^2}{2} - \cos x) = -\frac{1}{4!} + \frac{\sin c}{5!}x \longrightarrow -\frac{1}{4!}$$

を得ます．ここで $x \longrightarrow 0$ のとき $c \longrightarrow 0$ から $\sin c \longrightarrow 0$ であることを用いていることに注意しましょう．

(2) (1) と同様に Taylor の定理を用いると

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1+c)^3}x^3$$

を満たす c が 0 と x の間に存在します．このことから

$$\frac{x - \log(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(1+c)^3}x \longrightarrow \frac{1}{2}$$

が従います．

(3) (1) および (2) と同様にもできますが，ここでは Taylor 展開を用いて示します．すなわち

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + - \cdots \quad (|x| < 1)$$

が成立することを用います．すると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x} - \frac{\log(1+x)}{x^2} &= \frac{1}{x}\left(1 - x + x^2 - x^3 + - \cdots\right) \\
&\quad -\frac{1}{x^2}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + - \cdots\right) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}x^2 + \cdots \longrightarrow -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

を得ます．

4.5 確率変数 X の 2 次のモーメントは

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= E(X(X-1)) + E(X) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} + \mu \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\mu^{k-2}}{(k-2)!} \cdot \mu^2 e^{-\mu} + \mu \\
&= \mu^2 e^{-\mu} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\mu^\ell}{\ell!} + \mu = \mu^2 + \mu
\end{aligned}
$$

と計算されます．このことから X の分散は

$$
V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu
$$

となります.

4.6 $\ell \leqq k$ のとき

$$
\left(\frac{d}{dt}\right)^\ell t^k = k(k-1)(k-2)\cdots(k-\ell+1)t^{k-\ell} = \frac{k!}{(k-\ell)!} t^{k-\ell}
$$

が成立します．他方

$$
\left(\frac{d}{dt}\right)^{m-1} \frac{1}{(1-t)} = \frac{(m-1)!}{(1-t)^m}
$$

となります．これらの 2 つの等式を用いて,

$$
\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k
$$

の両辺を t で $(m-1)$ 回微分すると

$$
\begin{aligned}
\frac{(m-1)!}{(1-t)^m} &= \sum_{k=m-1}^{+\infty} \frac{k!}{(k-m+1)!} t^{k-m+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+m-1)!}{n!} t^n \qquad (n = k-m+1 \text{ と変数変換})
\end{aligned}
$$

から

$$
\frac{1}{(1-t)^m} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} {}_{n+m-1}C_n t^n
$$

を得ます.

4.7 **(1)** $f'(t) = -\frac{1}{t}$，$f''(t) = \frac{1}{t^2} > 0$ から $f(t)$ は凸関数であることが分かります.

(2) $f(t)$ が凸関数ですから

$$f(\alpha x + \beta y) \leqq \alpha f(x) + \beta f(y)$$

が $\alpha, \beta \geqq 0$，$\alpha + \beta = 1$ を満たす α と β に対して成立します．これは

$$-\log(\alpha x + \beta y) \leqq -\alpha \log x - \beta \log y$$

すなわち

$$x^\alpha y^\beta \leqq \alpha x + \beta y$$

を意味します.

4.8 **(1)** $f(t)$ を 2 階微分すると

$$f'(t) = pt^{p-1}, \quad f''(t) = p(p-1)t^{p-2} > 0$$

から $f(t)$ が凸関数であることがわかります。

(2) (1) から

$$f(\alpha x + \beta y) \leqq \alpha f(x) + \beta f(y)$$

が従います。これは

$$(\alpha x + \beta y)^p \leqq \alpha x^p + \beta y^p$$

を意味します。

4.9 省略.

4.10 $f(t) = -\log t$ は凸関数ですからジェンゼンの不等式は

$$-\log\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leqq -\frac{1}{n}\log x_1 - \frac{1}{n}\log x_2 - \cdots - \frac{1}{n}\log x_n$$

となります．これは

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leqq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

を意味します.

第 5 章　演習問題解答

5.1　**(I)** $\gamma < \alpha < \beta$ のとき

$$\int_\alpha^\beta = \int_\gamma^\beta - \int_\gamma^\alpha = \int_\gamma^\beta + \int_\alpha^\gamma$$

を得ます.

(II) $\alpha < \beta < \gamma$ のとき

$$\int_\alpha^\beta = \int_\alpha^\gamma - \int_\beta^\gamma = \int_\alpha^\gamma + \int_\gamma^\beta$$

を得ます.

5.2

$$\left(\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right)' = \frac{1}{t^n}, \quad \left(\frac{1}{-n+1}t^{-n+1}\right)' = t^{-n}$$

$$(\log t)' = \frac{1}{t}, \quad (e^t)' = e^t, \quad \left(\frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}\right)' = t^\alpha$$

$$(-\cos t)' = \sin t, \quad (\sin t)' = \cos t$$

から分かります.

5.3 **(1)**

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(e^x)'dx &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= e - [e^x]_0^1 = e - (e-1) = 1\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\sin x dx &= \int_0^\pi x(-\cos x)'dx \\ &= [-x\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx \\ &= \pi + [\sin x]_0^\pi = \pi\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int_1^e x\log x dx &= \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \log x dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x^2 \sin x dx &= \int_0^\pi x^2 \left(-\cos x\right)' dx \\ &= \left[-x^2\cos x\right]_0^\pi + 2\int_0^\pi x\cos x dx \\ &= \pi^2 + 2\int_0^\pi x(\sin x)'dx \\ &= \pi^2 + 2\left[x\sin x\right]_0^\pi - 2\int_0^\pi \sin x dx \\ &= \pi^2 - [-\cos x]_0^\pi = \pi^2 + 4\end{aligned}$$

5.4

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \longrightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \log 2$$

5.5　全ての $\lambda \in \mathbf{R}$ に対して

$$\int_a^b (\lambda f(x)+g(x))^2 dx = \lambda^2 \int_a^b f(x)^2 dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g(x)^2 dx \geqq 0$$

が成立します．ここで，この右辺を λ の 2 次式と見て，2 次の係数について場合を分けて考えます．

(I) $\int_a^b f(x)^2 dx > 0$ のときは，この λ の 2 次式の判別式 D が

$$\frac{D}{4} = \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - \int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b g(x)^2 dx \leqq 0$$

から証明すべき不等式が従います．

(II) $\int_a^b f(x)^2 dx = 0$ のときは $f(x) \equiv 0$ から，容易に不等式が得られます．

5.6　関数 $\frac{1}{x^\alpha}$ は単調減少ですから $n \leqq x \leqq n+1$ において

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqq \frac{1}{n^\alpha}$$

が成立することが分かります．これを積分して

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leqq \frac{1}{n^\alpha}$$

を得ます．ここで $\sum_{n=1}^N$ と和をとると

$$\int_1^{N+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leqq \sum_{n=1}^N 1n^\alpha$$

を得ます．この不等式の左辺の積分を計算すると

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\right]_1^{N+1} = \frac{1}{1-\alpha}\left(N^{1-\alpha} - 1\right) \longrightarrow +\infty \quad (N \longrightarrow +\infty)$$

となりますから，追い出しの原理を用いて

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$$

が従います．

5.6 **(別解)** $n \geqq 1$ から

$$\frac{1}{n^\alpha} \geqq \frac{1}{n}$$

を得ます．これから

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \geqq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \longrightarrow +\infty \quad (N \longrightarrow +\infty)$$

を得ます．ここで追い出しの原理を用いても結果は得られます.

第 7 章　演習問題解答

7.1　**(1)**

$$A\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, A\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

(2) $I_2\vec{x} = \vec{x}$

(3)

$$P_{12}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$Q_1(\lambda)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad Q_2(\lambda)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$$

$$R_{12}(\lambda)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \lambda x_1 + x_2 \end{pmatrix}, \quad R_{21}(\lambda)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \lambda x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

7.2　**(1)**

$$AI_2 = A(\vec{e}_1\ \vec{e}_2) = (A\vec{e}_1\ A\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A$$

$$I_2A = I_2(\vec{a}_1\ \vec{a}_2) = (I_2\vec{a}_1\ I_2\vec{a}_2) = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2) = A$$

(2)

$$P_{12}A = \left(P_{12}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}\ P_{12}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$$

$$Q_1(\lambda)A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad Q_2(\lambda)A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$$

$$R_{12}(\lambda)A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{11} + a_{21} & \lambda a_{12} + a_{22} \end{pmatrix}, \quad R_{21}(\lambda)A = \begin{pmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & a_{12} + \lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$AP_{12} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{pmatrix}$$

$$AQ_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad AQ_2(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$$

$$AR_{12}(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11} & \lambda a_{11} + a_{12} \\ a_{21} & \lambda a_{21} + a_{22} \end{pmatrix}, \quad AR_{21}(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11} + \lambda a_{12} & a_{12} \\ a_{21} + \lambda a_{22} & a_{22} \end{pmatrix}$$

7.3 λ^n を $(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$ で割ります.

$$\lambda^n = \varphi(\lambda)(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta) + a\lambda + b$$

において定数 a と b を求めるために，$\lambda = \alpha$ と $\lambda = \beta$ を代入すると

$$\alpha^n = a\alpha + b, \quad \beta^n = a\beta + b$$

を得ます．これを解くと $\alpha \neq \beta$ から

$$a = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha}, \quad b = \frac{\alpha\beta(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1})}{\beta - \alpha}$$

を得ます．このことから

$$A^n = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha} A + \frac{\alpha\beta(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1})}{\beta - \alpha} I_2$$

が従います.

7.4 上にある演習 7.3 の解答に数値を代入するだけですが，それとは独立に解答しましょう．等式

$$\lambda^n = \varphi(\lambda)(\lambda+5)(\lambda-7) + a\lambda + b$$

において $\lambda = -5$ と $\lambda = 7$ を代入すると

$$(-5)^n = -5a + b, \quad 7^n = 7a + b$$

となります．これを a と b について解くと

$$a = \frac{1}{12}\left(7^n - (-5)^n\right), \ b = -\frac{35}{12}\left(7^n - (-5)^n\right)$$

となります．この a と b を用いて

$$A^n = aA + bI_2$$

を得ます.

7.5 固有多項式を計算すると

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda + 1)$$

となりますから，A の固有値は $\lambda = 5$ と $\lambda = -1$ です．それぞれの固有ベクトルを求めましょう．

$\underline{\lambda = 5 \text{ の固有ベクトル}}$ は

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

が $2x + y = 0$ と必要十分ですから，

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

をとることができます．

$\underline{\lambda = -1 \text{ の固有ベクトル}}$ は

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

が $x + y = 0$ と必要十分ですから，

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

をとることができます．

ここで $P = (\vec{v}_1\ \vec{v}_2)$ とおくと P は正則で

$$AP = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と対角化をすることができます．

7.6 (7.48) $(\Rightarrow)$ は明らかです．$(\Leftarrow)$ を示します．$\vec{y}=\vec{a}$ とすると

$$||\vec{a}||^2=(\vec{a},\vec{a})=0$$

から $\vec{a}=\vec{0}$ が従います.

(7.48) $(\Rightarrow)$ は明らかです．$(\Leftarrow)$ を示します．$C=(\vec{c}_1\ \vec{c}_2)$ と列ベクトル表示をします．このとき

$$C\vec{e}_1=\vec{c}_1,\quad C\vec{e}_2=\vec{c}_2$$

から $C=O_2$ となります.

7.7 **(1)** A の固有値は $\lambda=3$ と $\lambda=-2$ で，直交行列

$$P=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

を用いて

$${}^tPAP=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

と対角化できます．(2) のために $P=(\vec{v}_1\ \vec{v}_2)$ と定めます.

(2) $\vec{v}={}^t(x\ y)$ を考えます．変数変換 $\vec{\xi}={}^tP\vec{x}$ をとると

$$\begin{aligned} z &= (A\vec{v},\vec{v})=({}^tPAP\cdot{}^tP\vec{x},{}^tP\vec{x}) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\vec{\xi},\vec{\xi}\right)=3\xi_1^2-2\xi_2^2 \end{aligned}$$

を得ます．制約条件 $||\vec{x}||=1$ は，${}^tP$ が直交行列ですから $||\vec{\xi}||=1$ すなわち $\xi_1^2+\xi_2^2=1$ と必要十分となります.

　ここで $\xi_1^2=1-\xi_2^2$ を $z=3\xi_1^2-2\xi_2^2$ に代入すると

$$z=3(1-\xi_2^2)-2\xi_2^2=3-5\xi_2^2\leqq 3$$

と上から評価されます．この不等式の等式成立条件は $\xi_2=0$ したがって $\xi_1=\pm 1$ ですから，$\vec{\xi}=\pm{}^t(1\ 0)$ のとき最大値 3 をとります．元の変数では $\vec{v}=\vec{v}_1$ のとき最大値 3 をとります.

　同様に $\xi_2^2=1-\xi_1^2$ を $z=3\xi_1^2-2\xi_2^2$ に代入して考えると $\vec{\xi}=\pm{}^t(0\ 1)$ のとき最小値 -2 をとります．元の変数では $\vec{v}=\vec{v}_1$ のとき最小値 -2 をとります.

第 8 章　演習問題解答

8.1　**(II)** $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ とします．これはある λ_0 に対して $x \in U_{\lambda_0}$ を意味します．ここで U_{λ_0} は開集合ですから，ある正数 δ が存在して

$$B_\delta(x) \subset U_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$$

が成立します．以上で $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ が開集合であることが証明されました．
(III) $x \in U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k$ とします．このとき $x \in U_i$ が成立します．U_i は開集合ですから，正数 $\delta_i > 0$ が存在して

$$B_{\delta_i}(x) \subset U_i \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$$

が成立します．ここで $\delta := \min(\delta_1, \cdots, \delta_k)$ とおくと

$$B_\delta(x) \subset B_{\delta_i}(x) \subset U_i$$

から

$$B_\delta(x) \subset U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k$$

が従います．これは $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k$ が開集合であることを意味します．

8.2　(8.7) は $\mathrm{Q} \in B_{r_1}(\mathrm{P})$ ならば $\mathrm{Q} \in B_r(\mathrm{P})$ を意味します．実際，

$$\begin{aligned} d(\mathrm{Q}, \mathrm{P}_0) &\leqq d(\mathrm{Q}, \mathrm{P}) + d(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0) \\ &< r_1 + d(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0) = r - d(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0) + d(\mathrm{P}, \mathrm{P}_0) = r \end{aligned}$$

から $\mathrm{Q} \in B_r(\mathrm{P}_0)$ が従います．

8.3　$\mathrm{P}_n = (x_n, y_n)$ とすると $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ は有界列となります．これから

$$|x_n| \leqq R,\ |y_n| \leqq R \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たす正数 $R > 0$ が存在することがわかります．このとき

$$x_n^2 + y_n^2 \leqq R^2 + R^2 = 2R^2$$

から

$$d(\mathrm{O}, \mathrm{P}_n) \leqq \sqrt{2}R \quad (\text{すべての } n)$$

が成立します．

8.4　**（定理 8.3 の証明）**$(a,b) \in I \times \mathbf{R}$ とします．$(x_n, y_n) \in I \times \mathbf{R}$ が $(x_n, y_n) \longrightarrow (a,b)$ が成立するとき

$$x_n \longrightarrow a \quad (n \longrightarrow +\infty)$$

が従います．このとき

$$F(x_n, y_n) = f(x_n) \longrightarrow f(a) = F(a,b)$$

となります．これは F が (a,b) で連続であることを意味します.

8.4　**（定理 8.4 の証明）** $(a,b) \in U$ とします．$(x_n, y_n) \in U$ が

$$(x_n, y_n) \longrightarrow (a,b)$$

を満たすならば

$$f(x_n, y_n) \longrightarrow f(a,b)$$

となります（f の (a,b) における連続性）．このとき G の $f(a,b)$ における連続性から

$$G(f(x_n, y_n)) \longrightarrow G(f(a,b))$$

が従います．以上で $G(f(x,y))$ の $(x,y) = (a,b)$ における連続性が示されました.

（定理 8.5 の証明） これは自明なので省略します.

8.4　**（定理 8.6 の証明）**　積 fg の連続性だけ示します．$(a,b) \in U$ に対して

$$(x_n, y_n) \in U, \quad (x_n, y_n) \longrightarrow (a,b)$$

が成立するとします．このとき

$$f(x_n, y_n)g(x_n, y_n) \longrightarrow f(a,b)g(a,b)$$

が従います．これは fg が (a,b) で連続であることを意味します.

8.5 **(1)** $f_1(x,y)=x^2-2y^2$ は $\mathbf{R}^2$ 上で連続で

$$U_1=f_1^{-1}((1,+\infty))$$

ですから U_1 は開集合です.
(2) $f_2(x,y)=x^2+2y^2$ は $\mathbf{R}^2$ 上で連続で

$$U_2=f_2^{-1}((-\infty,1))$$

ですから U_2 は開集合です.
(3) $g(x,y)=x+y$ は $\mathbf{R}^2$ 上で連続で

$$g^{-1}(1,+\infty)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;\ x+y>1\}$$

は開集合です．さらに

$$U_3=U_2\cap g^{-1}((1,+\infty))$$

は開集合の交わりですから開集合です.

8.6 省略.

8.7 $\{a_n\}$ は有界列ですから，収束する部分列 a_{n_k} か存在します．$\{b_{n_k}\}$ も有界列ですから，収束する部分列 $\{b_{n_{k_j}}\}$ が存在します．このとき

$$(a_{n_{k_j}},b_{n_{k_j}})$$

は収束列です．収束列 a_{n_k} の部分列 $a_{n_{k_j}}$ も収束列であることに注意しましょう.

8.8 **(1)** $f_x=3x^2+4xy,\ f_y=2x^2+20y^3$

$$f_{xx}=6x+4y,\quad f_{xy}=f_{yx}=4x,\quad f_{yy}=60y^2$$

(2)

$$f_x=\log(x^2+2y^2)+\frac{2x^2}{x^2+2y^2},\quad f_y=\frac{4xy}{(x^2+2y^2)^2}$$

$$f_{xx}=\frac{2x(x^2-2y^2)}{(x^2+2y^2)^2}$$

$$f_{xy}=f_{yx}=\frac{4y(2y^2-x^2)}{(x^2+2y^2)^2}$$

$$f_{yy}=\frac{4x(x^2-2y^2)}{(x^2+2y^2)^2}$$

8.9 **(1)** 停留点を定める方程式

$$\begin{cases} z_x = & 2x+y-4 & = 0 \\ z_y = & x+2y-2 & = 0 \end{cases}$$

を解いて $(x,y)=(2,0)$ が停留点です.

(2) 停留点を定める方程式

$$\begin{cases} z_x = & 4x^3-4x+4y=0 & \cdots(i) \\ z_y = & 4y^3+4x-4y=0 & \cdots(ii) \end{cases}$$

を解きます. $(i)+(ii)$ から $x^3+y^3=0$ すなわち

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=0$$

が必要であることがわかります. 条件 $x^2-xy+y^2=0$ は

$$x^2-xy+y^2=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}=0$$

から $x=\frac{y}{2}$ かつ $y=0$ と必要十分で, 結局 $(x,y)=(0,0)$ と必要十分でありことがわかります. $(x,y)=(0,0)$ は $x+y=0$ を満たしますから, $(i)+(ii)$ は $x+y=0$ と必要十分です.

必要条件 $x+y=0$ を $y=-x$ として (i) に代入すると $4x^3-8x=0$ すなわち $x=0,\ \pm\sqrt{2}$ を得ます.

以上から停留点は

$$(x,y)=(0,0),(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

であることがわかります.

8.10

$$g(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2 - x - 2y + 2$$

とおきます．すると

$$g_x(x,y) = 8x - 4y - 1, \quad g_y(x,y) = -4y + 2y - 2$$

から

$$g_x(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}) = -1, \quad g_y(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}) = -2$$

と計算されます．求める接線の方程式は

$$-(x - \frac{2}{5}) - 2(y - \frac{4}{5}) = 0$$

すなわち

$$x - 2y - 2 = 0$$

となります．

8.11 対称行列である (a,b) における f のヘッセ行列 $H(f)(a,b)$ は仮定 $\det(H(f)(a,b)) < 0$ から，正の固有値 $p > 0$ と負の固有値 $q < 0$ を持ちます．このとき p に対する固有ベクトル $\vec{v}_1$ と q に対する固有ベクトル $\vec{v}_2$ を用いて

$$F_1(t) = f((a,b) + t^t\vec{v}_1), \quad F_2(t) = f((a,b) + t^t\vec{v}_2)$$

を考えます．定理 8.21 の証明と同様の計算を用いると

$$F_1'(0) = 0, \quad F_2'(0) = 0$$

$$F_1''(0) = (H(f)(a,b)\vec{v}_1, \vec{v}_1) = p||\vec{v}_1||^2 > 0$$

$$F_2''(0) = (H(f)(a,b)\vec{v}_2, \vec{v}_2) = q||\vec{v}_2||^2 < 0$$

を得ます．これは，$\vec{v}_1$ の方向で考えると (a,b) が極小点であり，$\vec{v}_2$ の方向で考えると (a,b) が極大点であることを意味します．
以上のことから，(a,b) は極大点でも極小点でもないことがわかりました．

8.12 (1)

$$z_x = 4x^3 - 4y = 0, \quad z_y = 4y^3 - 4x = 0$$

すなわち

$$y = x^3, \quad x = 4y^3$$

が停留点を定める条件です．$y = x^3$ を $x = y^3$ に代入すると

$$x = x^9 \quad \text{すなわち } x = 0, \pm 1$$

を得ます．これを $y = x^3$ に代入して，停留点が

$$(x, y) = (0, 0),\ (1, -1),\ (-1, 1)$$

であることが従います．この 3 点における極大・極小を判定しましょう．(x, y) におけるヘッセ行列は

$$H(f) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

と計算されます.
$(0,0)$ において ヘッセ行列式は

$$\det(H(f)) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

となりますから，$(0,0)$ は極大点でも極小点でもありません.
$(\pm 1, \pm 1)$ において ヘッセ行列式は

$$\det(H(f)) = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 4^2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4^2 \cdot 8 > 0$$

となり，$z_{xx} = 12 > 0$ も成立します．よって $(\pm 1, \pm 1)$ は f の極小点であることが従います.

8.12 **(2)** 停留点を定める条件は

$$z_x = 4x(x^2 + y^2 - 1) = 0, \quad z_y = 4y(x^2 + y^2 + 1) = 0$$

から

$$y = 0 \quad \text{AND} \quad (x^2 + y^2 = 1 \quad \text{OR} \quad x = 0)$$

であることが分かります．これは

$$(x, y) = (\pm 1, 0), (0, 0)$$

と必要十分です．この 3 点において極大・極小を判定しましょう．
点 (x, y) におけるヘッセ行列は

$$H(f) = \begin{pmatrix} 4(3x^2 + y^2 - 1) & 8xy \\ 8xy & 4(x^2 + 3y^2 + 1) \end{pmatrix}$$

と計算されます．
<u>点 $(0, 0)$</u> においてヘッセ行列式は

$$\det(H(f)) = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

となり，$(0, 0)$ が極大点でも極小点でもないことがわかります．
<u>点 $(\pm 1, 0)$</u> においてヘッセ行列式は

$$\det(H(f)) = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 64 > 0$$

となり，$z_{xx}(\pm, 1) = 8 > 0$ と合わせて，$(\pm 1, 0)$ が極小であることがわかります．

8.13

$$\nabla(f) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad \nabla(g) = \begin{pmatrix} 4x \\ 2y \end{pmatrix}$$

から，条件つき極値問題の停留点は条件

$$\begin{cases} xy = 2\lambda x & \cdots ① \\ x^2 = 2\lambda y & \cdots ② \\ 2x^2 + y^2 = 1 & \cdots ③ \end{cases}$$

を満たす λ が存在することとなります．①は

$$x = 0 \quad \text{OR} \quad y = 2\lambda$$

と必要十分です．これを用いて場合を分けて考えます．
$\underline{x = 0 \text{ のとき}}$③に代入して $y = \pm 1$ となります．このとき②に代入して $\lambda = 0$ も従います．
$\underline{y = 2\lambda \text{ のとき}}$②にこれを代入して

$$x^2 = y^2$$

を得ます．③に代入すると $3x^2 = 1$ から $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ となります．これから

$$(x, y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$$

が停留点で，対応する λ は $\lambda = \frac{y}{2}$ から

$$(x, y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \quad \text{のとき} \quad \lambda = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$(x, y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \quad \text{のとき} \quad \lambda = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

となります．

8.14　（例 8.22）$\underline{(x,y)=(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2})\text{（復号同順）のとき}}$

$$\lambda = 2\frac{x}{y} = 2$$

です．そして

$$L = f - \lambda g = xy - \lambda(x^2+y^2-1)$$

の 2 階微分を計算すると

$$L_{xx} = -2\lambda = -4,\ L_{xy} = L_{yx} = 1,\ L_{yy} = -2\lambda = -4$$

となります．他方

$$g_x = g_y = \pm\sqrt{2}$$

です．このとき

$$B = \begin{vmatrix} 0 & \pm\sqrt{2} & \pm\sqrt{2} \\ \pm\sqrt{2} & -4 & 1 \\ \pm\sqrt{2} & 1 & -4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 20 > 0$$

から，この 2 点は極大点であることがわかります．

$\underline{(x,y)=(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\mp\frac{\sqrt{2}}{2})\text{（復号同順）のとき}}$

$$\lambda = 2\frac{x}{y} = -2$$

です．そして

$$L = f - \lambda g = xy - \lambda(x^2+y^2-1)$$

の 2 階微分を計算すると

$$L_{xx} = -2\lambda = 4,\ L_{xy} = L_{yx} = 1,\ L_{yy} = -2\lambda = 4$$

となります．他方

$$g_x = \pm\sqrt{2},\quad g_y = \mp\sqrt{2}$$

です．このとき

$$B = \begin{vmatrix} 0 & \pm\sqrt{2} & \mp\sqrt{2} \\ \pm\sqrt{2} & 4 & 1 \\ \mp\sqrt{2} & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -20 < 0$$

から，この 2 点は極小点であることがわかります．

8.14　**（例 8.23）**$(x,y)=(\pm\frac{2\sqrt{5}}{5},\pm\frac{\sqrt{5}}{5})$ において

$$\lambda=\frac{1}{x}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

です.

$$L=f-\lambda g=(2x+y)-\lambda(x^2+y^2-1)$$

の 2 階微分は

$$L_{xx}=-2\lambda,\ L_{xy}=L_{yx}=0,\ L_{yy}=-2\lambda$$

となります．また $g_x=2,\ g_y=1$ です．これを用いて

$$B=\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & \mp\sqrt{5} & 0 \\ -1 & 0 & \mp\sqrt{5} \end{vmatrix}=\pm3\sqrt{5}$$

と計算されます.

$\underline{(x,y)=(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5})\text{ において}B}<0$ から極小値をとります.

$\underline{(x,y)=(-\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5})\text{ において}B}>0$ から極大値をとります.

8.14　（例 8.24）

$$L = f - \lambda g = x^2 y - \lambda(x + y - 9)$$

の 2 階微分を計算すると

$$L_{xx} = 2y,\ L_{xy} = L_{yx} = 2x,\ L_{yy} = 0$$

となります．また

$$g_x = g_y = 1$$

です.

$\underline{(x, y) = (0, 9)\text{ のとき}}\lambda = 0$ となります．このとき

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 < 0$$

から $(0, 9)$ は極小点であることがわかります.

$\underline{(x, y) = (6, 3)\text{ のとき}}\lambda = 36$ となります.

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 12 \\ 1 & 12 & 0 \end{vmatrix} = 18 > 0$$

から $(6, 3)$ は極大点であることがわかります.

8.14　**（例 8.25）**　$\underline{(x, y) = (2, 2)\ のとき}$

$$\lambda = 3x^2 + y = 14$$

です．関数

$$L = f - \lambda g = (x^3 + y^3 + xy) - \lambda(x + y - 4)$$

の 2 階微分を計算すると

$$L_{xx} = 6x,\ L_{xy} = L_{yx} = 1,\ L_{yy} = 6y$$

となり，また

$$g_x = g_y = 1$$

と計算されます．ここで

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 12 & 1 \\ 1 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 22 > 0$$

から $(2, 2)$ で極大値をとります．

8.15

$$g(x,y)=x+y-1,\ f(x,y)=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}$$

に対して，勾配ベクトルは

$$\nabla(g)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ \nabla(f)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}\\ \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}}\end{pmatrix}$$

と計算されます．これから，制約条件付き極値問題の停留点は条件

$$\begin{cases}\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}=\lambda & \cdots ① \\ \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}}=\lambda & \cdots ② \\ x+y=1 & \cdots ③\end{cases}$$

で特徴付けられます．ここで①と②から

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}}$$

を経て $2x=y$ を得ます．これを③に代入して

$$x=\frac{1}{3},\ y=\frac{2}{3}$$

となります．このとき①を用いて $\lambda=\frac{1}{2}\sqrt[4]{6}$ と計算されます．ここで

$$L=f-\lambda g=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}-(x+y-1)$$

の 2 階微分を計算すると

$$L_{xx}=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{4}},\ L_{xy}=L_{yx}=\frac{1}{8}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}},\ L_{yy}=-\frac{3}{16}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{7}{4}}$$

となり，また

$$g_x=g_y=1$$

です．これらを用いて

$$\begin{aligned}B &= \begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{4}} & \frac{1}{8}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}}\\ 1 & \frac{1}{8}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}} & -\frac{3}{16}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{7}{4}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -\frac{1}{2}x^{-1}\lambda & \frac{1}{2}x^{-1}\lambda\\ 1 & \frac{1}{2}x^{-1}\lambda & -\frac{3}{4}y^{-1}\lambda\end{vmatrix}\\ &= \frac{3}{2}x^{-1}\lambda+\frac{3}{4}y^{-1}\lambda>0\end{aligned}$$

から，$(\frac{3}{1},\frac{2}{3})$ は制約条件付き極値問題の極大値であることがわかります．

8.16

$$f = x^2 + y^2,\ g = 4x^2 - 6xy + 4y^2 - 2$$

に対して勾配ベクトルを計算すると

$$\nabla(f) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix},\ \nabla(g) = \begin{pmatrix} 8x - 6y \\ -6x + 8y \end{pmatrix}$$

となります．このことから，制約条件付き極値問題の停留点は条件

$$\begin{cases} 2x = \lambda(8x - 6y) & \cdots ① \\ 2y = \lambda(-6x + 8y) & \cdots ② \\ 4x^2 - 6xy + 4y^2 = 2 & \cdots ③ \end{cases}$$

で特徴付けられます．① + ② から

$$2x + 2y = \lambda(2x + 2y)$$

を得ます．これは

$$x + y = 1 \quad \text{OR} \quad \lambda = 1$$

と必要十分です．これを用いて場合分けをします．
(I)$x + y = 0$ のとき，①に $y = -x$ を代入して

$$2x = \lambda \cdot 14x \quad \text{すなわち} \quad \lambda = \frac{1}{7}$$

を得ます．他方 $y = -x$ を③に代入して

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}, \quad y = \mp\frac{1}{\sqrt{7}}$$

を得ます．

8.16 (II)$\lambda = 1$ のとき，①に代入して $x = y$ を得ます．これを③に代入して

$$x = \pm 1, \quad y = \pm 1 \quad \text{（複号同順）}$$

を得ます.
ここで

$$L = f - \lambda g = (x^2 + y^2) - \lambda(4x^2 - 6xy + 4y^2 - 2)$$

の 2 階微分を計算すると

$$L_{xx} = 2 - 8\lambda,\ L_{xy} = L_{yx} = 6\lambda,\ L_{yy} = 2 - 8\lambda$$

となります．また

$$g_x = 2x,\ g_y = 2y$$

です.
$(x, y) = (\pm 1, \pm 1)$ のとき

$$B = \begin{vmatrix} 0 & \pm 2 & \pm 2 \\ \pm 2 & -6 & 6 \\ \pm 2 & 6 & -6 \end{vmatrix} = 96 > 0$$

から，極大点であることが分かります.
$(x, y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{7}}, \mp\frac{1}{\sqrt{7}})$ のとき，

$$B = \begin{vmatrix} 0 & \pm\frac{2}{\sqrt{7}} & \mp\frac{2}{\sqrt{7}} \\ \pm\frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{6}{7} & \frac{6}{7} \\ \mp\frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{6}{7} & \frac{6}{7} \end{vmatrix} = -\frac{96}{49} < 0$$

から，極小点であることが分かります.

8.17 省略.

8.18

$$x^2 + y(x)^2 - 3xy(x) \equiv 0$$

の両辺を x で微分すれば

$$2x + 2yy' - 3y - 3xy' = 0 \cdots ①$$

すなわち

$$(2y - 3x)y' = 3y - 2x$$

を得ます。これから

$$y' = \frac{3y - 2x}{2y - 3x}$$

を得ます。

さらに① の両辺を x で微分すると

$$2 + 2(y')^2 + 2yy'' - 6y' - 3xy' \equiv 0$$

を得ます。これから

$$y'' = \frac{6y' - 2(y')^2 - 2}{2y - 3x}$$

が従います。

第 9 章　演習問題解答

9.1　**(I)** $\underline{(x,y,z)=(0,2,0)\text{ において}}$

$$\det\begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6z \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = -9 < 0$$

から $f(x,2,z)$ は $(x,z)=(0,0)$ で極大でも極小でもありません．このことから $(0,2,0)$ において $f(x,y,z)$ は極大でも極小でもないことが分かります.

(II) $\underline{(x,y,z)=(1,0,1)\text{ において}}$

$$\det\begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6(y-1) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = -36 < 0$$

から $f(x,y,1)$ は $(x,y)=(1,0)$ で極大でも極小でもありません．このことから $(1,0,1)$ において $f(x,y,z)$ は極大でも極小でもないことが分かります.

第 10 章　演習問題解答

10.1　**(1)** 特性方程式は

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

で $\lambda = 1$ を重根として持ちます．解は一般的に

$$f(t) = K_0 e^t + K_1 t e^t$$

と定数 K_0 と K_1 を用いて表すことができます．このとき

$$f'(t) = K_0 e^t + K_1 e^t + K_1 t e^t$$

と計算されますから，$t = 0$ を代入して

$$f(0) = K_0 = c_0,\ f'(0) = K_0 + K_1 = c_1$$

から

$$K_0 = c_0,\ K_1 = c_1 - c_0$$

と表されます．以上で求める解は

$$f(t) = c_0 e^t + (c_1 - c_0) t e^t$$

となります.

(2) 特性方程式は

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$$

で $\lambda = 2$ を重根として持ちます．解は一般的に

$$f(t) = K_0 e^{-2t} + K_1 t e^{-2t}$$

と定数 K_0 と K_1 を用いて表すことができます．このとき

$$f'(t) = -2K_0 e^{-2t} + K_1 e^{{}^2 t} - 2K_1 t e^{-2t}$$

と計算されますから，$t = 0$ を代入して

$$f(0) = K_0 = c_0,\ f'(0) = -2K_0 + K_1 = c_1$$

から

$$K_0 = c_0,\ K_1 = c_1 + 2c_0$$

と表されます．以上で求める解は

$$f(t) = c_0 e^{-2t} + (c_1 + 2c_0) t e^{-2t}$$

となります.

10.2 $\alpha = a + ib$, $\beta = c + di$ と実部と虚部に分けて考えます．このとき

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}\cdot e^{\beta t} &= e^{at}(\cos bt + i\sin bt)\cdot e^{ct}(\cos dt + i\sin dt) \\ &= e^{(a+c)t}(\cos bt + i\sin bt)(\cos dt + i\sin dt) \\ &= e^{(a+c)t}(\cos(b+d)t + i\sin(b+d)t) \\ &= e^{(\alpha+\beta)t} \end{aligned}$$

と計算されます（演習 1.5 を参考にしましょう）.

10.3 **(1)** 特性方程式

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

を解くと

$$\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

となります．これから解は

$$f(t) = c_0 e^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{2}{\sqrt{3}}(c_0 - \frac{1}{2}c_1)e^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

であることがわかります.

(2) 特性方程式

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

を解くと

$$\lambda = -1 \pm i$$

となります．これから解は

$$f(t) = c_0 e^{-t}\cos t + (c_0 + c_1)e^{-t}\sin t$$

であることがわかります.

10.4 行列 A の固有方程式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1)$$

と計算されますから，固有値は $\lambda = 5, -1$ です．各固有値の対する固有ベクトルを計算すると，

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を $\lambda = 5$ の固有ベクトル，

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を $\lambda = -1$ の固有ベクトルとしてとることができます．ここで $P = (\vec{v}_1\ \vec{v}_2)$ とすると P は正則行列で

$$\vec{v}(t) = P \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1} \vec{v}_0$$

が，求める解となります．