

新・工業力学 章末問題の解答

第1章

1 e_1, e_2, e_3 は直角座標系 $O-xyz$ 系の基底ベクトルであることから,

$$(1) \quad e_1 \times e_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = e_3 \quad (2) \quad e_2 \times e_1 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -e_3$$

参考 (1) と (2) より, $e_2 \times e_1 = -(e_1 \times e_2)$ の関係となり, ベクトルの乗算とみなせる外積については, スカラーの乗算のように交換法則は成立しない. $\square$

$$(3) \quad e_2 \times e_3 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = e_1 \quad (4) \quad e_3 \times e_1 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = e_2$$

$$2 \quad T = \begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \\ = (f_z r_y - f_y r_z) e_1 + (f_x r_z - f_z r_x) e_2 + (f_y r_x - f_x r_y) e_3$$

答えは $\begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix}$

参考 ① $R = \begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix}$ は $R^T = -R$ の性質があるので, 数学的に

は反対称行列と呼ばれる.

② 行列 R の各列は, それに対応する力ベクトルの成分に対応する腕の長さを表すベクトルである. 例えば, 力ベクトルの x 成分 f_x の力については, それに対応する腕の長さベクトルは第 1 列の $[0, r_z, -r_y]^T$ である. これより右手座標系において, 腕の長さの z 成分との積で y 軸まわりの力のモーメント成分が計算できる. 腕の長さの y 成分との積で z 軸まわりの力のモーメントの大きさが計算できるが, 右ねじ則により, 向きが逆となるので符号をマイナスにしていることが理解できる. $\square$

3 並進力の作用点の座標値を未知数 x を用いて $(x, 0, 0)$ と表現する．これは原点に対する並進力 $\boldsymbol{f}$ の作用点の位置ベクトルであるので，位置ベクトルと並進力による外積計算による力のモーメントの方程式が得られる．

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}$$

$\Downarrow$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5x \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$

$$x = 10$$

そこで，答えは $(10, 0, 0)$ ．

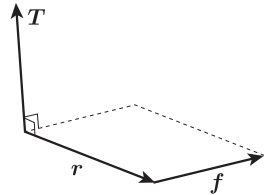
4 単純に外積計算で求めることができるので，

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

5 外積計算 $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}$ を幾何学的に考えると，下図に示すように，位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と並進力ベクトル $\boldsymbol{f}$ を隣り合う 2 辺として描き出される平行四辺形の面積の値に等しい大きさで，その平行四辺形の平面の法線方向で，外積記号 $\times$ の左側のベクトル $\boldsymbol{r}$ を右側のベクトル $\boldsymbol{f}$ の向きに平行四辺形内部で回転させて右ねじが進む方向のベクトルを求めることといえる．

したがって，本問題では，

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$



とにおいて

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-12\boldsymbol{e}_3)$$

よって，答は 6

6 $r(t) = \frac{1}{5}t$ と $\theta(t) = 2\pi r(t)$ より, その物体の位置を xy 座標で表現すれば

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}t \cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right) \\ \frac{1}{5}t \sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right) \end{bmatrix}$$

したがって, 速度の xy 座標表示は

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{1}{5}t \cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right) \\ \frac{1}{5}t \sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right) - \frac{2\pi}{25}t \sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right) \\ \frac{1}{5} \sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right) + \frac{2\pi}{25}t \cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right) \end{bmatrix}$$

7 (1) 単位の換算表から 1 bar は 10^5 Pa であるので,

$$1010[\text{mbar}] = 1010 \times 10^{-3} \times 10^5 = 101.0[\text{kPa}]$$

(2) 1 PS は約 0.735 kW なので, $100[\text{PS}] \approx 0.735 \times 100 = 73.5[\text{kW}]$

(3) 1 マイルは約 1.61 km なので, $75[\text{mi/h}] \approx 75 \times 1.61 \approx 121[\text{km/h}]$

(4) 1 kt は約 1.85 km/h の速さであるので, $30[\text{kt}] \approx 30 \times 1.85 = 55.5[\text{km/h}]$

(5) 1 kcal は約 4.19 kJ であるので, $245[\text{kcal}] \approx 245 \times 4.19 \approx 1027[\text{kJ}]$

8 ネット出力 30 馬力 (PS) は, 単位換算表 1.3 から $1[\text{PS}] \approx 0.175[\text{kcal/s}]$ なので, 約 5.25 kcal/s である. これがガソリンが発生する全熱量の 15%に相当するのであるから, ガソリンの発生熱量は

$$\frac{5.25}{0.15} \approx 35.0[\text{kcal/s}]$$

したがって, 消費ガソリン量は

$$\frac{35.0}{10.4 \times 0.75 \times 1000} \approx 4.49 \times 10^{-3}[\text{L/s}]$$

9 (1) 仮数部少数第 3 位を四捨五入されて 9.3×10^{-3} であるので,

$$9.25 \times 10^{-3} \leq x < 9.35 \times 10^{-3}$$

(2) 少数第 3 位を四捨五入されて 3.14 であるので, $3.135 \leq x < 3.145$

(3) 少数第 3 位を四捨五入されて 9.80 であるので, $9.795 \leq x < 9.805$

10 質量と加速度の積で作用力の大きさを計算できる．そこで，有効桁の小さいほうに一致させて答を記述することで，次のように計算される．

$$1.2 \times 10^3 [\text{kg}] \times 0.253 \times 10^1 [\text{m/s}^2] = 3.0 \times 10^3 [\text{N}]$$

また，真の値の取り得る範囲は，次のように求められる．

$1.2 \times 10^3 \text{ kg}$ と有効数値で表現された真の質量は

$$1.15 \times 10^3 \leq m < 1.25 \times 10^3 [\text{kg}]$$

の範囲に存在する．加速度については

$$0.2525 \times 10^1 \leq a < 0.2535 \times 10^1 [\text{m/s}^2]$$

である．そこで，積の値の取り得る範囲は

$$2.90375 \times 10^3 \leq ma < 3.16875 \times 10^3$$

11 絶対値については7ビットを利用するので，0 から $2^7 - 1 = 127$ までの128段階の量子化がなされる．そこで， $SN = 20 \log 127 \approx 42.1 [\text{dB}]$ と求められる．したがって，有効桁数は $1 \div 127 \approx 0.00785$ より3桁といえる．

第2章

$$1 \quad (1) \quad \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = (2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_3) + (\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3) = 3\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2) 幾何学的には，力ベクトル $\mathbf{f} = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ の矢印の線分と，その中点を通る垂線を2つの対角線とするひし形の辺で，力ベクトルの始点から伸びる2本の辺が求める力ベクトルを表す線分である．

そこで，一義的には求めらず，求めたい2本のベクトルを

$$\mathbf{f}_1 = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \beta_1 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{f}_2 = \alpha_2 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2$$

とすると，条件より

$$|f_1| = |f_2| \Rightarrow \alpha_1^2 + \beta_1^2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2 \quad (\text{i})$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta_1 + \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (\text{ii})$$

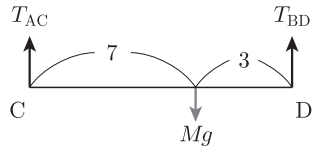
の 3 本の方程式が立ち、次のように求められる．

$$\left[\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \frac{10 - 2\alpha_1}{6} \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{c} 1 - \alpha_1 \\ \frac{8 + 2\alpha_1}{6} \end{array} \right] \quad (\text{ただし, } \alpha_1 \text{ は任意の実数})$$

- (3) $\mathbf{f}_1 = 3\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ と $\mathbf{f}_2 = -3\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3$ は大きさが同じで向きが互いに逆の並進力なので偶力である．そこで、その力のモーメントは、次のように計算できる．

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -8 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -24 \\ 24 \end{bmatrix}$$

2 この板の自由体図を描くと、右図のようになる．なお、ひも AC と BD にはたらく張力の大きさをそれぞれ T_{AC} と T_{BD} 、重力加速度の大きさを g と表している．板の長さは解析上で不要だが、一応 L としておこう．また



平面問題なので力のモーメントをわざわざ外積計算を機械的にせず、並進力 $\times$ 腕の長さで簡単に計算することにする．

さて、水平方向の力は何もないので、並進の力のつり合いは上下方向だけ考えればよい．それは、 $T_{AC} + T_{BD} - Mg = 0$ である．

力のモーメントについては板のどこか 1 点について考えればよいので、ここでは点 C について記述する．それは、半時計まわりを正の方向とすると、

$$LT_{BD} - \frac{7}{10}LMg = 0$$

となる．したがって、これら 2 つの連立方程式を解くことで、

$$T_{AC} = \frac{3}{10}Mg, \quad T_{BD} = \frac{7}{10}Mg$$

と張力を計算できる．

- 3 点 A でも C でも摩擦がないことより、円柱に作用する力は円の中心に向かう方向の力であることは明らかである．そこで、点 A と C で円柱に作用している力を、それぞれの大きさを α と β とすると、

$$\mathbf{f}_A = \begin{bmatrix} \alpha \sin \frac{15\pi}{180} \\ \alpha \cos \frac{15\pi}{180} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_C = \begin{bmatrix} -\beta \sin \frac{30\pi}{180} \\ \beta \cos \frac{30\pi}{180} \end{bmatrix}$$

これら 2 つの力で円柱に作用する並進力のつり合いが成立し、力のモーメントも 0 となれば条件を満たす．ところで、力のモーメントは両方の力の作用線が円の中心点を通るので 0 となることは明らかである．したがって、並進力だけのつり合い方程式を構成すればよい．

$$\begin{bmatrix} \alpha \sin \frac{15\pi}{180} \\ \alpha \cos \frac{15\pi}{180} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta \sin \frac{30\pi}{180} \\ \beta \cos \frac{30\pi}{180} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{i})$$

の計算より

$$\alpha = \frac{mg \sin \frac{30\pi}{180}}{\sin \frac{(15+30)\pi}{180}} = \frac{1}{\sqrt{2}}mg$$

$$\beta = \frac{\alpha \sin \frac{15\pi}{180}}{\sin \frac{30\pi}{180}} = \frac{\alpha \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{30\pi}{180}}{2}}}{\sin \frac{30\pi}{180}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2}}mg$$

と得られる．なお、 g は重力加速度の大きさである．

4 剛体の静的な力のつり合いは、並進力のつり合いと力のモーメントのつり合いを同時に満足させることである．そこで、

● 並進力の力のつり合い式：

$$\mathbf{W} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$$

↓

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{i})$$

● 力のモーメントのつり合い式 (力 $\mathbf{F}_1$ の作用点について考えることにする)：外積計算を使って求めてみることにすると、

$$\begin{bmatrix} -l \\ -l \tan \frac{30\pi}{180} \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{3}l \\ \sqrt{3}l \tan \frac{30\pi}{180} \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

↓

$$10l - \sqrt{3}lx_2 \tan \frac{30\pi}{180} + \sqrt{3}ly_2 = 0 \quad (\text{ii})$$

また, 力 F_2 については成分間に

$$x_2 + y_2 = 0 \quad (\text{iii})$$

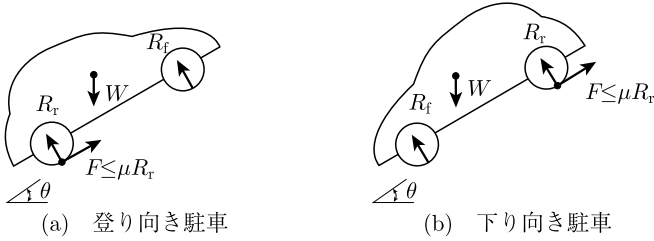
以上より, 方程式 4 本で未知数 4 つの連立方程式を解くことで

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{10}{1+\sqrt{3}} \\ \frac{20+10\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} \frac{10}{1+\sqrt{3}} \\ -\frac{10}{1+\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

と得られる.

5 登り向きと下り向きの車駐車状態の自由体図を下図のように描き, 車が滑り落ちない限界の斜度を計算し, その斜度が大きいほうが安全と判断する.

斜面に沿った方向と斜面垂線方向を座標軸に設定して解くことのほうが一般的かもしれないが, ここでは水平・鉛直方向を座標系軸として解くことにする.



① 登り向きの自由体図について, 車が滑り落ちない限界の斜度 θ における車に作用する力のつり合い方程式を立てる.

● 並進力について:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R_r \sin \theta \\ R_r \cos \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R_f \sin \theta \\ R_f \cos \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu R_r \cos \theta \\ \mu R_r \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{i})$$

● 力のモーメントについて (後輪接地点に関して作成し, 反時計まわりを正とする):
前輪への斜面からの抗力によるモーメント:

$$\begin{bmatrix} a \cos \theta \\ a \sin \theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -R_f \sin \theta \\ R_f \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a \cos \theta & a \sin \theta & 0 \\ -R_f \sin \theta & R_f \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = a R_f \mathbf{e}_3$$

重力による力のモーメント：

$$\begin{bmatrix} (a-b)\cos\theta - c\sin\theta \\ (a-b)\sin\theta + c\cos\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -W \end{bmatrix} = -W\{(a-b)\cos\theta - c\sin\theta\}\mathbf{e}_3$$

より

$$-W\{(a-b)\cos\theta - c\sin\theta\} + aR_f = 0 \quad (\text{ii})$$

したがって、式 (i) と (ii) の 3 本の方程式の連立を解いて、

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\mu b}{a - \mu c}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\mu}{2 - \mu}\right) \quad (\text{iii})$$

② 下り向きについても同様に

● 並進力について：

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R_r \sin\theta \\ R_r \cos\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R_f \sin\theta \\ R_f \cos\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu R_r \cos\theta \\ \mu R_r \sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{iv})$$

● 力のモーメントについて（前輪の接地点について計算）：

後輪への斜面からの抗力によるモーメント：

$$\begin{bmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -R_r \sin\theta \\ R_r \cos\theta \end{bmatrix} = \det \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a\cos\theta & a\sin\theta & 0 \\ -R_r \sin\theta & R_r \cos\theta & 0 \end{vmatrix} = aR_r \mathbf{e}_3$$

重力による力のモーメント：

$$\begin{bmatrix} b\cos\theta - c\sin\theta \\ b\sin\theta + c\cos\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -W \end{bmatrix} = -W\{b\cos\theta - c\sin\theta\}\mathbf{e}_3$$

より

$$aR_r - W\{b\cos\theta - c\sin\theta\} = 0 \quad (\text{v})$$

式 (iv) と (v) の 3 本の方程式の連立を解いて、

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\mu b}{\mu c + a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\mu}{\mu + 2}\right) \quad (\text{vi})$$

③ したがって、式 (iii) と (vi) を比較して、同じ摩擦係数の状態であれば登り向きのほうが滑り落ちない限界斜度が大きいので、駐車する場合に安全性が高く有利である。ブレーキも摩擦で機能が成立しているので、その点についても同様なことがいえる。

6 右下の図にその物体の滑り落ちない最大斜度での自由体図を描く．この場合，物体は斜面に沿ってしか動きようがないので，斜面方向の力のつり合いだけを考えれば十分である．まず斜面上向きに最大静止摩擦力が作用しているはずである．それを F_s とすると，

$$F_s = \mu_s R = \mu_s Mg \cos \theta \quad (\text{i})$$

ここで， R は抗力の大きさを示し， $R = Mg \cos \theta$ である．なお， g は重力加速度の大きさを示す．

重力 Mg の斜面向下方向の分力の大きさは $Mg \sin \theta$ であるので，これと最大静止摩擦力がつり合えばよい．したがって，

$$\mu_s Mg \cos \theta - Mg \sin \theta = 0 \quad (\text{ii})$$

の方程式より，最大斜度は，次のように計算される．

$$\theta = \tan^{-1} \mu_s = \tan^{-1} 0.3 \approx 0.291 [\text{rad}] \approx 16.9^\circ$$

7 車の滑り落ちない限界状態における自由体図は下図となる．そこで力のつり合い方程式を立てると，

- 斜面に平行な方向の並進力について：

$$\mu R_1 - mg \sin \theta = 0 \quad (\text{i})$$

- 斜面に直角な方向の並進力について：

$$R_1 + R_2 - mg \cos \theta = 0 \quad (\text{ii})$$

- 重心まわりの力のモーメントについて：

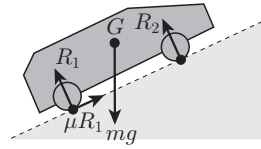
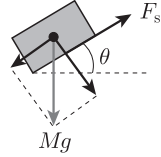
$$\mu R_1 h + R_2 (B - P) - R_1 P = 0 \quad (\text{iii})$$

そこで

$$\tan \theta = \frac{B - P}{\frac{1}{\mu} B - h}$$

よって，傾きは以下となる．

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{B - P}{\frac{1}{\mu} B - h} \right)$$



8 分布荷重の合計値 W は,

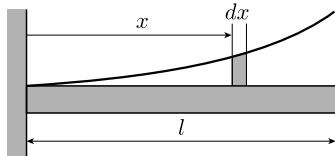
$$W = \int_0^l cx^2 dx = \frac{cl^3}{3}$$

そこで, それを 1 つの集中荷重とした場合の作用点とすべき座標値を x_G とすると

$$Wx_G = \int_0^l cx^2 \cdot x dx$$

等式により等価性を表現できるので, これより

$$x_G = \frac{\int_0^l cx^2 \cdot x dx}{W} = \frac{\frac{cl^4}{4}}{\frac{cl^3}{3}} = \frac{3}{4}l$$

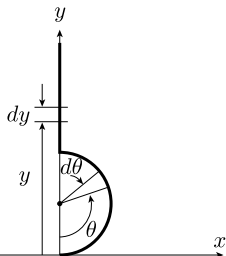


答えは, 以下となる.

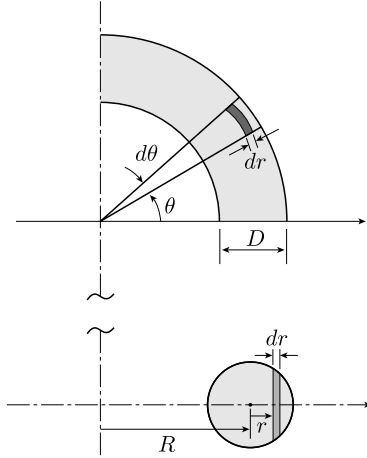
- 等価集中荷重の大きさ: $\frac{cl^3}{3}$
- その作用点: $x_G = \frac{3}{4}l$

9 下図のように, 半円部分と直線部分に区分して, 積分を考えて求めることにする.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_G \\ y_G \end{bmatrix} &= \frac{\rho \int_0^\pi a \begin{bmatrix} a \sin \theta \\ a(1 - \cos \theta) \end{bmatrix} d\theta + \rho \int_{2a}^{3a} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} dy}{\rho \int_0^\pi a d\theta + \rho \int_{2a}^{3a} dy} = \frac{\rho a^2 \begin{bmatrix} 2 \\ \pi \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5a^2}{2} \end{bmatrix}}{\rho \pi a + \rho a} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2a}{\pi + 1} \\ \left(\pi + \frac{5}{2} \right) a \end{bmatrix} \end{aligned}$$



10 対象物の形状に従って, 下図のように極座標系での積分を便利的に考えて質量中心を求めることにする.



半ドーナツ形状の体積 M は次のように求められる.

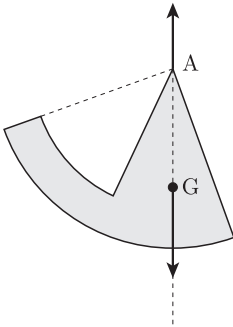
$$\begin{aligned}
 M &= \int_0^\pi \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} 2\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - r^2} \cdot (R+r) dr d\theta \\
 &= 2 \int_0^\pi \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - r^2} \cdot (R+r) dr d\theta \\
 &= 2 \int_0^\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{D}{2} \cos \varphi \cdot \left(R + \frac{D}{2} \sin \varphi\right) \frac{D}{2} \cos \varphi d\varphi d\theta \\
 &= 2 \int_0^\pi \left[\frac{D^2 R}{4} \left(\frac{\sin 2\varphi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{D^3}{24} \cos^3 \varphi \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\
 &= 2 \int_0^\pi \frac{\pi R D^2}{8} d\theta \\
 &= \frac{\pi^2 D^2 R}{4}
 \end{aligned}$$

そこで, 質量中心 (図心) は, x 座標と z 座標については物体の対称性から 0 であることは自明なので, y 座標だけを求める計算をすることにする.

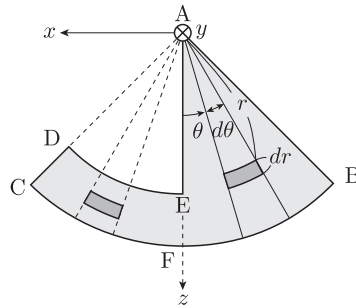
$$\begin{aligned}
 y_G &= \frac{2 \int_0^\pi \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - r^2} \{(R+r) \cdot (R+r) \sin \theta\} dr d\theta}{M} \\
 &= \frac{2 \int_0^\pi \left\{ \frac{\pi}{8} \left(\frac{D}{2}\right)^4 + \frac{\pi R^2}{2} \left(\frac{D}{2}\right)^2 \right\} \sin \theta d\theta}{M} \\
 &= \frac{4 \left\{ \frac{\pi}{8} \left(\frac{D}{2}\right)^4 + \frac{\pi R^2}{2} \left(\frac{D}{2}\right)^2 \right\}}{\frac{\pi^2 D^2 R}{4}} = \frac{1}{\pi R} \left(\frac{D^2}{8} + 2R^2 \right)
 \end{aligned}$$

そこで、質量中心の座標は $\left(0, \frac{1}{\pi R} \left(\frac{D^2}{8} + 2R^2 \right), 0\right)$

11 下図 (a) に示すように点 A と重心(図心)は同一鉛直線上にのるはずである。したがって、図心座標を求めれば、辺 AE の傾きはそれから導出される。



(a)



(b)

上図 (b) に描く座標系と積分のための微小要素に基づいて計算を進める。この物体は厚さと材料密度が全域で一定であるので、面積について考えればよい。

まずその図形の面積を求めよう。微小要素の面積は $r d\theta dr$ と表させるので物体の面積 M は、CDEF の四角形部分と扇形 ABF の加算で

$$M = \int_{\frac{4}{5}R}^R \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 r d\theta dr + \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{4}} r d\theta dr = \int_{\frac{4}{5}R}^R \frac{\pi r}{4} dr + \int_0^R \frac{\pi r}{4} dr = \frac{17\pi}{100} R^2$$

と得られる。

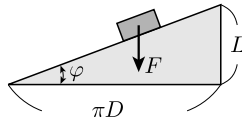
質量中心の座標 G は、微小要素の座標が $(-r \sin \theta, 0, r \cos \theta)$ と表現されるので、式 (2.46) に基づいて

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G} = \begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{bmatrix} &= \frac{\int_{\frac{4}{5}R}^R \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \begin{bmatrix} -r \sin \theta \\ 0 \\ r \cos \theta \end{bmatrix} r d\theta dr + \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{4}} \begin{bmatrix} -r \sin \theta \\ 0 \\ r \cos \theta \end{bmatrix} r d\theta dr}{\frac{17\pi}{100} R^2} \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{64 \times 100}{375 \times 17\pi} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) R \\ 0 \\ \frac{62 \times 100}{125\sqrt{2} \times 17\pi} R \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

と計算される．そこで，辺 AE の鉛直線からの傾きは，次のように得られる．

$$\tan^{-1} \left(\frac{X_G}{Z_G} \right) \approx -8.11^\circ$$

12 ねじのライダーがねじの軸に与える力（軸力）を F とすると，ねじのねじ山とライダーの関係は，下図のように，斜面上の物体の静止問題となる．なお， L はピッチを表す．



したがって，次の力のつり合いの方程式が成立しなければ，荷重によってジャッキのパンタグラフは畳まれてしまう^{*)}．

$$\tan \varphi = \frac{L}{\pi D} \quad (\text{i})$$

$$F \sin \varphi < \mu F \cos \varphi \quad (\text{ii})$$

これより，

$$\tan \varphi = \frac{L}{\pi D} < \mu$$

↓

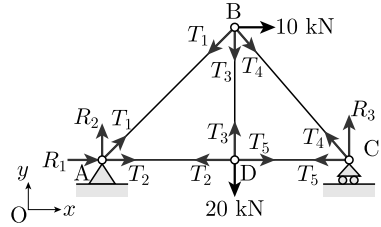
$$L < \mu \pi D \approx 0.08 \times 3.14 \times 10 = 2.5 [\text{mm}] \quad (\text{iii})$$

答えは，2.5 mm 未満．

^{*)}安全を考えると不等号がよい．

第3章

1 右図のように、各トラス部材から結合ピンへ作用する力と、支持部からの作用力を設定して力のつり合い方程式を作成する。結合ピン（モーメントフリーの結合）の力のつり合いなので、力のモーメントは考える必要なくて、並進力だけについて考えればよい。



● 点 A について：

$$\begin{bmatrix} T_1 \cos \frac{\pi}{4} \\ T_1 \sin \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

● 点 B について：

$$\begin{bmatrix} -T_1 \cos \frac{\pi}{4} \\ -T_1 \sin \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -T_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_4 \cos \frac{\pi}{4} \\ -T_4 \sin \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

● 点 C について：

$$\begin{bmatrix} -T_4 \cos \frac{\pi}{4} \\ T_4 \sin \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -T_5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

● 点 D について：

$$\begin{bmatrix} -T_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ T_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

以上より、未知数の数が 8 個、方程式の数が 8 本となり、連立方程式で解ける。コンピュータを利用する機械的な解法では

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \frac{\pi}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\cos \frac{\pi}{4} & 0 & 0 & \cos \frac{\pi}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \frac{\pi}{4} & 0 & -1 & -\sin \frac{\pi}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \frac{\pi}{4} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \frac{\pi}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}$$

そこで、ひし形の CDEF の変位の瞬間中心を O' とすると線分 $O'C$, $O'F$, $O'E$ の長さは $O'C: \sqrt{3}l$, $O'F: 2l$, $O'E: \sqrt{3}l$ と計算できる．そこで、点 F の変位は

$$\begin{bmatrix} 2l\delta\theta \cos \frac{\pi}{6} \\ -2l\delta\theta \sin \frac{\pi}{6} \end{bmatrix} \quad \text{と求まる．そこで、仮想仕事についての次の方程式ができる．}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -l\delta\theta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} T \\ -W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2l\delta\theta \cos \frac{\pi}{6} \\ -2l\delta\theta \sin \frac{\pi}{6} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -T \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

これを解いて、

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}}W$$

と答を得る．

- 3 (1) 瞬間中心は、変位ベクトル v_A と v_B の作用点を通る垂線同士の交点の位置である．

変位ベクトル v_A の作用点を通る垂線の式は $y = \sqrt{3}x$ と求められ、 v_B の垂線の式は $x = 2$ である．そこで、瞬間中心の座標は $(2, 2\sqrt{3})$

- (2) 瞬間中心と点 A の距離は 4 であるので、その瞬間中心まわりの棒の瞬間回転角速度は

$$\frac{\sqrt{(0.5\sqrt{3})^2 + 0.5^2}}{4} = \frac{1}{4} [\text{rad/s}]$$

と求まる．

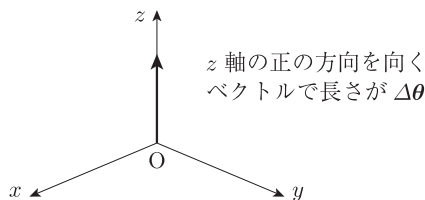
- (3) 棒の瞬間回転角速度が求まったので、瞬間中心と点 B の距離が $2\sqrt{3}$ m であることから、

$$v_{Bx} = 2\sqrt{3} \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} [\text{m/s}]$$

と得られる．

- 4 (1) 右図の通りである．

- (2) 微小角回転軸は z 軸に一致するので、その回転軸の任意の 1 点を $(0, 0, z_0)$ に設定して、そこからの注目する点の相対位置を表す位置ベクトルを求めれば、



$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ -z_0 \end{bmatrix}$$

である．そこで，式 (3.27) の外積計算をすれば，

$$\Delta\theta \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 0 & \Delta\phi \\ a & b & -z_0 \end{vmatrix} = -b\Delta\phi\mathbf{e}_1 + a\Delta\phi\mathbf{e}_2$$

となる．そこで，微小変位は，

$$\begin{bmatrix} -b\Delta\phi \\ a\Delta\phi \\ 0 \end{bmatrix}$$

と得られる．

参考 具体的に a または b のどちらか一方を 0 として x 軸上か y 軸上の点についての微小回転を試しに求めてみてほしい．この計算の一般性を理解できると思う． $\square$

5 (1) 並進力に関する力のつり合い式は

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_\alpha + \mathbf{F}_\beta = \begin{bmatrix} -f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{i})$$

である．力のモーメントのつり合い式としてはどこか 1 点についての式を構成すればよいので，ここでは端点 B についての式を作成してみる．それは，

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{CB} \times \mathbf{F}_\alpha + \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F}_1 &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & \frac{1}{3}L & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & L & 0 \\ -f & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left(-\frac{1}{3}L\alpha + Lf \right) \mathbf{e}_3 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

で，これより

$$-\frac{1}{3}L\alpha + Lf = 0 \quad (\text{ii})$$

である．式 (i) と (ii) より，

$$\alpha = 3f, \quad \beta = -2f$$

と解を得る．

- (2) まず, F_α を求めるために, 端点 B を回転中心として z 軸まわりに棒の端点 A が x 軸の負の方向に回転するように微小角度 $\Delta\theta$ だけ仮想的に回転させる.

すると, 端点 A と C の微小変位 $\Delta\delta_A$ と $\Delta\delta_C$ は,

$$\Delta\delta_A = \begin{bmatrix} -L\Delta\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta\delta_C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}L\Delta\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{iii})$$

と得られる. そこで, 力 F_1 と F_α と F_β のなす仕事の合計は, 点 B は変位が 0 なので F_β の仕事は 0 だから, F_1 と F_α だけの仕事の合計として

$$F_1 \cdot \Delta\delta_A + F_\alpha \cdot \Delta\delta_C = L\Delta\theta f - \frac{1}{3}L\Delta\theta\alpha = \left(Lf - \frac{1}{3}L\alpha\right)\Delta\theta \quad (\text{iv})$$

と得られる. この値が $\Delta\theta$ の値に関わりなく, 仮想仕事の原理より 0 となるはずなので,

$$Lf - \frac{1}{3}L\alpha = 0 \quad (\text{v})$$

の方程式を作成でき, $\alpha = 3f$ を得る.

次に F_β を求める. 仮想的に, 点 C を通り z 軸に平行な軸まわりに, 点 A を x 軸の負の方向へ $\Delta\phi$ だけ微小回転させることを考える. このとき端点 A と B の微小変位 $\Delta\delta_A$ と $\Delta\delta_B$ は

$$\Delta\delta_A = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}L\Delta\phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta\delta_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}L\Delta\phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{vi})$$

と得られる. 力 F_1 と F_α と F_β のなす仕事の合計は, F_α がその作用点 C の変位が 0 なので仕事をしないことは明らかなので, F_1 と F_β の仕事の合計として

$$F_1 \cdot \Delta\delta_A + F_\beta \cdot \Delta\delta_B = \frac{2}{3}L\Delta\theta f + \frac{1}{3}L\Delta\theta\beta = \left(\frac{2}{3}Lf + \frac{1}{3}L\beta\right)\Delta\theta \quad (\text{vii})$$

と得られる. そこで仮想仕事の原理により,

$$\frac{2}{3}Lf + \frac{1}{3}L\beta = 0 \quad (\text{viii})$$

の方程式を作成でき, $\beta = -2f$ を得る.

6 右図に示すように、天井の支点からつり下がった長さ L の針金を考える。

針金の断面直径は D [m] とする。天井から距離 x [m] のところを仮想断面として切断して、その下側の部分の切断面上側から針金から作用している力 F [N] を求めると、

$$F = \rho \frac{\pi D^2}{4} (L - x) g \quad (\text{i})$$

となる。そこで、単位断面積当たりの力 σ (これを応力と呼ぶ) は

$$\sigma = \frac{F}{\pi D^2/4} = \rho(L - x)g \quad (\text{ii})$$

となる。式 (ii) より、単位断面積あたりに作用する力は、針金の断面積には無関係で、 $x = 0$ のときが最大値となることがわかる。その値が $490 \text{ N/mm}^2 (= 0.49 \text{ GPa})$ まで取り得る強度だということから、

$$\rho L g \leq 0.49 \times 10^9 \Rightarrow L \leq \frac{0.49 \times 10^9}{\rho g} \approx 6.36 \times 10^3 [\text{m}]$$

7 パワーショベルのアーム機構はリンク機構になっているが、静的状態なので、単なる剛体と考えればよい。

① まず、点 BC 間の油圧シリンダーの発生力を求めることにする。これは支点 A まわりに土砂による力のモーメントとシリンダー発生力による力のモーメントがつり合えばよいだけである。そこで、

$$\mathbf{r}_{CA} \times \mathbf{F}_{CB} + \mathbf{r}_{GA} \times \mathbf{W} = \mathbf{0}$$

↓

$$\begin{bmatrix} 1.66 \\ 1.2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1.16}{\sqrt{1.16^2 + 1.5^2}} F \\ \frac{1.5}{\sqrt{1.16^2 + 1.5^2}} F \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.4 \\ -0.7 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -500g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

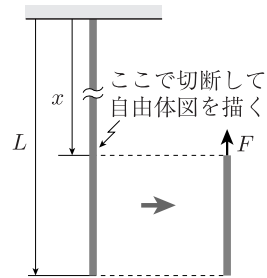
↓

$$\left(\frac{1.66 \times 1.5}{\sqrt{1.16^2 + 1.5^2}} - \frac{1.2 \times 1.16}{\sqrt{1.16^2 + 1.5^2}} \right) F - 2.4 \times 500 \times 9.8 = 0$$

↓

$$F \approx 2.03 \times 10^4 [\text{N}]^*)$$

*) 押す方向の力



- ② DF間の油圧シリンダーの力については，点Eまわりの力のモーメントのつり合いを考えればよい．

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{r}_{FE} \times \mathbf{F}_{FD} + \mathbf{r}_{GE} \times \mathbf{W} = \mathbf{0} \\
 & \Downarrow \\
 & \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{0.9}{\sqrt{0.9^2 + 0.1^2}} F \\ \frac{0.1}{\sqrt{0.9^2 + 0.1^2}} F \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.3 \\ -2.0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -500g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 & \Downarrow \\
 & -\frac{0.3 \times 0.9}{\sqrt{0.9^2 + 0.1^2}} F + 0.3 \times 500 \times 9.8 = 0 \\
 & \Downarrow \\
 & F \approx 4.93 \times 10^3 [\text{N}]^*)
 \end{aligned}$$

- ③ HJ間の油圧シリンダーの力については，同じく力のつり合いでも解けるが，仮想仕事の原理による解法の練習問題として解くことにする．

バケットは点Kを支点に回転できるので，バケットが仮想的に反時計まわりに微小角変位 $\delta\theta$ したとする．すると，点Gの仮想変位は $\delta\theta \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.3 \end{bmatrix}$ ，点Lの仮想変位は $\delta\theta \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，点Jは点Iを中心点として回転するので，リンク部材JLは点Iを瞬間中心として仮想角変位することがわかる．そこで，点Lの仮想変位から点Jの仮想変位は $\frac{0.2\delta\theta}{0.5} \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.2 \end{bmatrix}$ と求まる．

そこで，仮想仕事を計算して

$$\begin{aligned}
 & \delta\theta \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -500g \end{bmatrix} + \frac{0.2\delta\theta}{0.5} \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -F \end{bmatrix} = 0 \\
 & \Downarrow \\
 & 0.3 \times 500 \times 9.8 - \frac{0.2 \times 0.2}{0.5} F = 0 \\
 & \Downarrow \\
 & F \approx 1.84 \times 10^4 [\text{N}]^*)
 \end{aligned}$$

と求まる．

*) 押す方向の力

8 図 3.51 の幾何学的な関係より、寸法 a の引き出し線の水平線からの傾き角は

$$\sin^{-1} \left(\frac{10+5}{50} \right) \Rightarrow \sin^{-1} \left(\frac{15}{50} \right) \approx 0.305 [\text{rad}]$$

と得られる。

そこで、釘の摩擦力は下向きに発生しており、その大きさを R で表すことにすると、その力のモーメントは反時計まわりに $10R$ [N·mm] である。一方、作業者の力である F による力のモーメントは、支点からの腕の長さが

$$50 + 40 \sin 0.305 + (330 - 30) \cos 0.305 \approx 348 [\text{mm}]$$

であるので、時計まわりに $348F$ [N·mm] と計算できる。したがって、両者のつり合いより

$$R = \frac{348F}{10} \approx 1023 [\text{N}]$$

と得られる。

第4章

1 地表を原点として鉛直上向きに座標軸 x を設定する。任意の地上高さ x における質量 m の質点に作用する地球の万有引力 F は

$$F = -\frac{GmM}{(R+x)^2} \quad (\text{i})$$

と記述できる。ここで、 G は万有引力定数で $G \approx 6.67 \times 10^{-11}$ [N·m²/kg²]、 M は地球の質量で $M = 5.98 \times 10^{24}$ kg、 R は地球の半径で 6.37×10^3 km であるとする。

万有引力は式 (i) で明らかなように位置 x だけの関数であり、ポテンシャルエネルギー関数を E_p とすると、

$$F = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \quad (\text{ii})$$

の関係が成立している（本文中の式 (4.151) 参照）。そこで、式 (i) より

$$E_p = -\frac{GmM}{R+x} \quad (\text{iii})$$

これより $x \rightarrow \infty$ の場所でのポテンシャルエネルギー（位置エネルギー）は 0 になり、地球に近づくにつれて負の値で表現されることがわかる。

そこで、地表での打ち上げ初速度での質点の運動エネルギーが上空に行くに従ってポテンシャルエネルギーに徐々に変換されてゆき、運動エネルギーはその分減少していくと考えることができる。すなわち上昇の質点速度の値が小さくなって行く。ポテンシャルエネルギーと運動エネルギーの総和は一定とするエネルギー保存の法則がある。

したがって、地球から無限遠方でポテンシャルエネルギーは 0 まで増加するものの、運動エネルギーはなおもゼロ以上であれば二度と地球に落ちてこないことを意味する。そこで、地表面での運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの総和を考えて、

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GmM}{R} \geq 0 \quad (\text{iv})$$

の条件であればよいことがわかる。したがって、求める答は

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}} \approx \sqrt{\frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24}}{6.37 \times 10^3 \times 10^3}} \\ \approx 1.12 \times 10^4 [\text{m/s}] = 11.2 [\text{km/s}]$$

2 図 4.33 の自由体図に、支点軸受けで発生する摩擦トルクの効果を加えればよい。摩擦トルクを振り子先端の質点のところに作用する等価力に置き換えると、振動軌跡の円弧の接線方向に $-\frac{\beta}{l}\dot{\theta}$ となる。そこで、運動方程式は

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - \frac{\beta}{l}\dot{\theta} \quad (\text{i})$$

となる。振り子の運動開始が $\theta = \frac{10}{180}\pi$ [rad] で振動したとしても減衰振動となるので、 θ は初期値の角度以上にならない。そこで、 $\sin \theta \approx \theta$ の近似を適用することができると判断される（本文 p184 の図 4.34 と参考を参照）。したがって、式 (i) は

$$\ddot{\theta} + \frac{\beta}{ml^2}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad (\text{i}')$$

と近似簡略化できる。数式の展開記述を簡略化するために $C = \frac{\beta}{ml^2}$, $K = \frac{g}{l}$ とし、ばらく置き換える。この種の微分方程式の一般解は

$$\theta = Ae^{\alpha t} \quad (\text{ii})$$

の形式的関数となることが知られている。ここで、 A と α は複素数の定数である。式 (ii) とその微分を式 (i') に代入すると

$$(\alpha^2 + C\alpha + K)Ae^{\alpha t} = 0 \quad (\text{iii})$$

となる。微分方程式は任意の時刻に関して成立しなければならないので、

$$\alpha^2 + C\alpha + K = 0 \quad (\text{iv})$$

が成立しなければならないことになる。この種の方程式は対象物の固有特性を求めることができる式であり、機械振動学や制御工学などでの解析で重要なものであり、特性方程式と呼ばれる。

さて定数 α は、既知の C と K の値を使って

$$\alpha = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4K}}{2} \quad (\text{v})$$

と得られる．この式は平方根を含んでいるので，一般的には場合分けをして考える必要がある．そこで，ここでの解説は場合分けする．なお，本問題のパラメータでは $C = \frac{\beta}{ml^2} \approx 1.38$ と $K = \frac{g}{l} \approx 5.8$ なので平方根の中は負値となる．

① $C^2 - 4K \geq 0$ の場合：式 (ii) に代入して解は，

$$\begin{aligned} \theta &= A_1 e^{\frac{-C + \sqrt{C^2 - 4K}}{2} t} + A_2 e^{\frac{-C - \sqrt{C^2 - 4K}}{2} t} \\ &= A_1 e^{-\frac{C}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4K}{C^2}}\right) t} + A_2 e^{-\frac{C}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4K}{C^2}}\right) t} \end{aligned} \quad (\text{vi})$$

積分定数の A_1 と A_2 は，初期条件の $t = 0$ で $\theta = \frac{10}{180}\pi$ と $\dot{\theta} = 0$ を利用して

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{10\pi}{180\sqrt{C^2 - 4K}} \left(\frac{-C - \sqrt{C^2 - 4K}}{2} \right) \\ A_2 &= \frac{10\pi}{180\sqrt{C^2 - 4K}} \left(\frac{-C + \sqrt{C^2 - 4K}}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{vii})$$

と求められる．式 (vi) の 2 つの項ともにそれらの指数関数の指数部の時間 t の係数は負の値となるので，時間の経過につれて，文字通り指数関数的に単調減少して 0 に漸近する．すなわち，この場合分けに当てはまるような強い減衰が作用する場合には振り子は振動せずに支点から鉛直に垂れ下がる姿勢まで運動して静止する．

② $C^2 - 4K < 0$ の場合：虚数単位を j とすると，この場合の解は

$$\begin{aligned} \theta &= A_1 e^{\frac{-C + j\sqrt{4K - C^2}}{2} t} + A_2 e^{\frac{-C - j\sqrt{4K - C^2}}{2} t} \\ &= e^{-\frac{C}{2} t} \left(A_1 e^{j\frac{\sqrt{4K - C^2}}{2} t} + A_2 e^{-j\frac{\sqrt{4K - C^2}}{2} t} \right) \end{aligned} \quad (\text{viii})$$

積分定数の A_1 と A_2 は，初期条件の $t = 0$ で $\theta = \frac{10}{180}\pi$ と $\dot{\theta} = 0$ を利用して

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{j10\pi}{180\sqrt{4K - C^2}} \left(\frac{-C - j\sqrt{4K - C^2}}{2} \right) \\ A_2 &= -\frac{j10\pi}{180\sqrt{4K - C^2}} \left(\frac{-C + j\sqrt{4K - C^2}}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{ix})$$

と計算される．ここで A_1 と A_2 が互いに共役な複素数として求まった点が重要である．

ここで式 (viii) 中の純虚数を指数部にもつ指数関数について少し考察する．例題 4.9 の式 (4.113) の下に記述されたオイラーの公式の関係から， $e^{j\theta t}$ は複素数を表現するガウス平面（複素数を x 座標に実部， y 座標に虚部とする点で表現するための 2 次元座標平面）で原点を中心とする半径 1 の円周上を角速度 θ [rad/s] で反時計まわりに回転する動きを表現することがわかる．

したがって，式 (viii) の () の中の 2 つの項は互いに共役な複素数であり，() 内の加算結果は実部のみが残る．その実部は，

- 角振動数： $\frac{\sqrt{4K - C^2}}{2}$ [rad/s]

- 振幅： $\frac{10\pi}{180}$ （これは初期値の振幅に一致）

の振動を表現する．この振動に () の外の因子 $e^{-\frac{C}{2}t}$ が乗じられるので，式 (viii) で示される解は減衰振動を表現していることがわかる．

さらに，話が少し長くなるが，振動現象を論じる上での一般性と利便性を得るために角振動数 $\frac{\sqrt{4K - C^2}}{2}$ を次のような表現に変える．まず $K = g/l$ であることと， $\sqrt{g/l}$ はこの振り子の減衰がない場合の固有角振動数であることを思い起こし， $\Omega = \sqrt{g/l}$ と表現する．すなわち $K = \Omega^2$ である．また，この場合分けの条件になる臨界条件である $C^2 - 4K = 0$ となる減衰 C の大きさを $C_C = 2\sqrt{K}$ （添字は Critical のイニシャルで C_C を臨界減衰係数と呼ぶ）と表現する．さて，この関係を利用すると

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{4K - C^2}}{2} &= \sqrt{K} \sqrt{1 - \frac{C^2}{4K}} = \Omega \sqrt{1 - \left(\frac{C}{2\sqrt{K}}\right)^2} = \Omega \sqrt{1 - \left(\frac{C}{C_C}\right)^2} \\ &= \Omega \sqrt{1 - \varsigma^2}\end{aligned}\quad (\text{x})$$

とできる． $\varsigma = C/C_C$ とするパラメータ ς は，実際の減衰の大きさの臨界減衰との比率を表すので減衰比と呼ばれる．振動する条件の系では当然 $0 \leq \varsigma < 1$ である．

減衰指数因子の $e^{-\frac{C}{2}t}$ の指数部についても次のように変形することにしよう．

$$-\frac{C}{2} = -\sqrt{K} \cdot \frac{C}{2\sqrt{K}} = -\Omega\varsigma \quad (\text{xi})$$

以上より，式 (x) と (xi) より式 (viii) は，

$$\begin{aligned}\theta &= e^{-\Omega\varsigma t} (A_1 e^{j\Omega\sqrt{1-\varsigma^2}t} + A_2 e^{-j\Omega\sqrt{1-\varsigma^2}t}) \\ &= \frac{10\pi}{180} e^{-\Omega\varsigma t} \operatorname{Re} \left[e^{j\Omega\sqrt{1-\varsigma^2}t} \right]\end{aligned}\quad (\text{xii})$$

と表現できる．式中の $\operatorname{Re}[\]$ は複素数の実部を出力する関数である．この表現では，対象のシステムの質量とか長さとかの個別物理パラメータでなく，振動特性としての

不減衰固有角振動数や減衰の臨界減衰状態からの比（減衰比）と初期値といった現象のパラメータで振動を表すので一般化された表現として便利である。

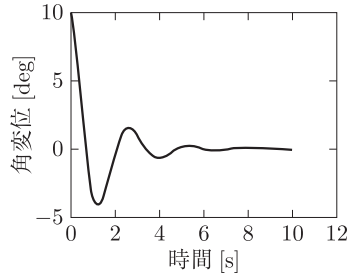
さて本題にもどって，

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \approx 2.40 [\text{rad/s}]$$

$$\varsigma = \frac{C}{C_C} = \frac{C}{2\sqrt{K}} = \frac{\beta}{2ml^2} \sqrt{\frac{l}{g}} \approx 0.288$$

を利用して課題の振動挙動を式 (xii) に基づいてグラフで表すと右図となる． 10° の傾き

状態から落下運動を開始しておよそ 3 回の振動で約 7 秒後に静止することがわかる．



- 3 (1) タイヤがリム中心点まわりに角速度 ω [rad/s] で回転しているとすると，バランスウェイトに加わる向心力（この反力が遠心力）の大きさは $0.025 \times 0.20 \times \omega^2$ [N] である．タイヤの重心のリム中心点からのずれを Δr とすると，タイヤの総重量 15.0 [kg] の回転中心点に関する向心力は $15\Delta r\omega^2$ [N] と計算される．そこで，それら 2 者がバランスしているはずであるので，

$$15\Delta r\omega^2 = 0.025 \times 0.20 \times \omega^2 \Rightarrow \Delta r = \frac{0.025 \times 0.20}{15} \approx 0.333 [\text{mm}]$$

より，答は約 0.333 mm．

- (2) 不釣り合い力は，遠心力であるので

$$15\Delta r\omega^2 = 15 \times \frac{0.025 \times 0.2}{15} \times \left(\frac{80000}{3600 \times \frac{0.65}{2}} \right)^2$$

$$\approx 23.4 [\text{N}]$$

と計算され，答は約 23.4 N である．

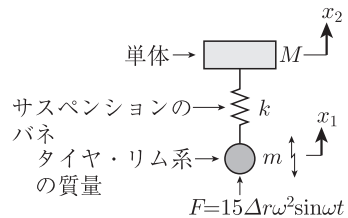
- (3) 右図に本題意に沿うモデル図を示す．

タイヤ・リムの質量 m ，サスペンションのバネ定数 k ，車体の分担車体質量 M からなる振動系と考えることができる．ニュートンの運動方程式は各質量について作成すればよいので，上向きに x 軸を設定して，まずタイヤ・リムの質量 m についてその変位を x_1 として

$$m\ddot{x}_1 = F - k(x_1 - x_2) \quad (\text{i})$$

が得られる．次に車体質量についてはその上方向への変位 x_2 について

$$M\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) \quad (\text{ii})$$



と得られる．これらの 2 本の運動方程式をまとめて行列表現すると，

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{iii})$$

となる．ここで，不釣合いによる外力 F は時速を v [km/h]，時間を t [s] とすると

$$F = 15\Delta r \left(\frac{1000v}{3600 \times \frac{0.65}{2}} \right)^2 \sin \left(\frac{1000v}{3600 \times \frac{0.65}{2}} t \right) = 15\Delta r \omega^2 \sin \omega t \quad (\text{iv})$$

と記述できる．そこで，振動応答もその外力の振動数と一致した応答を示す定常状態を考えて

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \sin \left(\frac{1000v}{3600 \times \frac{0.65}{2}} t \right) = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \sin \omega t \quad (\text{v})$$

と表現できる．式 (iv) と (v) を式 (iii) に代入して整理すると，

$$\left\{ -\omega^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15\Delta r \omega^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{vi})$$

となる．この連立方程式を解けば，

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} &= \left\{ -\omega^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 15\Delta r \omega^2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{15\Delta r \omega^2}{mM\omega^4 - \omega^2 k(m+M)} \begin{bmatrix} k - \omega^2 M \\ k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{vii})$$

となる．そこで，共振とは振動応答振幅 $[A_1, A_2]^T$ が発散する状態であるので，最右辺の分母 $= 0$ となる ω が共振振動数となる．題意より $\omega > 0$ でなければならないことは明白なので，

$$mM\omega^2 - k(m+M) = 0 \quad (\text{viii})$$

を共振振動数と振動系のパラメータとの関係式として得られる．これより

$$\begin{aligned} k &= \frac{mM}{m+M} \omega^2 = \frac{15 \times 400}{15 + 400} \left(\frac{1000 \times 80}{3600 \times \frac{0.65}{2}} \right)^2 \\ &\approx 6.76 \times 10^4 \text{ [N/m]} \approx 6.90 \times 10^1 \text{ [kgf/cm]} \end{aligned}$$

とサスペンションのバネ剛性を得る．

なお，この問題の振動系をはじめとして様々な機械振動に関する理論，解析および設計法について体系的に学習する科目は機械力学や機械振動学である．

- 4 (1) 各エンジンの最大推力は表より 268 kN であり，滑走距離が 3500 m であるから 4 基のエンジンのなした仕事量 W は，次のように計算される．

$$W = 4 \times 268000 \times 3500 \approx 3.75 \times 10^9 [\text{J}] = 3.75 [\text{GJ}]$$

- (2) ジャンボジェットの質量が 390 t で，その瞬間の速度が 334 km/h なので運動エネルギー E_k は，次のように計算される．

$$E_k = \frac{1}{2} \times 390000 \times \left(\frac{334000}{3600} \right)^2 \approx 1.68 \times 10^9 [\text{J}] = 1.68 [\text{GJ}]$$

- (3) 抵抗力の大きさを F とすると，それが行路 3500 m でなした仕事が (1) の答から (2) の答に減少したエネルギーロスに相当すると考えてよいので，次のように推定計算できる．

$$F = \frac{W - E_k}{3500} \approx 5.91 \times 10^5 [\text{N}] = 591 [\text{kN}]$$

- (4) 4 基のエンジンの合計推力から (3) の答の抵抗力を差し引いた力で 3500 メートルを等加速度運動する計算をすればよい．加速度 a は

$$a = \frac{F}{m} \approx \frac{4 \times 268000 - 591000}{390000} \approx 1.23 [\text{m/s}^2] \quad (\approx 0.126g)$$

(ここで g は重力加速度)

と計算される．それを利用して滑走時間 T は次のように計算される．

$$T = \sqrt{\frac{3500 \times 2}{a}} \approx 75.4 [\text{s}]$$

- 5 (1) 高低差の下端を原点として上向きに座標軸を設定する．質点の質量を m とすると

- 滑り台の上での質点の持つエネルギーは

$$\text{位置エネルギー } E_p = mgh, \quad \text{運動エネルギー } E_k = 0$$

- 滑り台の下端でのエネルギーは

$$\text{位置エネルギー } E_p = 0, \quad \text{運動エネルギー } E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

である．ここで v は下端での質点の速さを示す．そこで，力学的エネルギー保存則を示す式 (4.155) により次のように求まる．滑り台の傾斜角に依存しない．

$$v = \sqrt{2gh}$$

- (2) 斜面に沿って下向きに座標軸 x を設定して, その方向成分に関する運動方程式を立てると

$$m\ddot{x} = mg \sin \theta \Rightarrow \ddot{x} = g \sin \theta$$

となる. そこで, 初速度 0 と初期位置 $x = 0$ の初期条件の設定により, 速度と変位の時間関数はそれぞれ

$$\dot{x} = gt \sin \theta, \quad x = \frac{1}{2}gt^2 \sin \theta$$

と得られる. これら 2 式と, 滑り台の斜面の長さが $\frac{h}{\sin \theta}$ であることを利用すると, 滑り台下端での質点の速さ $v (= |\dot{x}|)$ は, やはり

$$v = \sqrt{2gh}$$

と求められる.

この結果から, 安全そうに見える程の緩やかな傾きの滑り台でも, もしも滑走降下する場合に摩擦がまったく発生しないとすると, 同じ高さから飛び降りてまっすぐ自由落下する場合と, 地面に到達したときの速さはまったく同じとなる. ただ, 自由落下の場合は地面と正面衝突であり, 滑り台では傾斜角により正面衝突ではなくなるだけである.

- 6 上向きを正として, 衝突によるボールの運動量の変化量 ΔM を求めると,

- 衝突直前のボールの速度: $v_1 = -\sqrt{2gh} \approx -4.43$ [m/s]
- 衝突直前のボールの運動量: $mv_1 \approx -0.629$ [kgm/s]
- 衝突直後のボールの速度: $v_2 = \sqrt{2gh'} \approx 3.70$ [m/s]
- 衝突直後のボールの運動量: $mv_2 \approx 0.526$ [kgm/s]

の計算より $\Delta M = mv_2 - mv_1 \approx 1.15$ [kgm/s]と得られる. この運動量変化は図 4.55 に示される力による力積に等しいはずであるから

$$A \int_0^{0.01} \sin \left(\frac{t}{0.01} \pi \right) dt = \Delta M$$

の A に関する方程式が得られる. そこで,

$$A = \frac{\Delta M}{\int_0^{0.01} \sin \left(\frac{t}{0.01} \pi \right) dt} \approx 180$$
 [N] ≈ 18 [kgf]

この問題設定は真実の力学現象を精密には表現していないが, それでもこの状態からも物体の衝突における衝撃力は想像以上に大きな値になることが理解できる.

7 式 (4.184) を利用して, 衝突時間を Δt として題意の速度変化から差分の加速度を求めると, 質量 m_1 の車両の加速度 $\frac{\Delta v_1}{\Delta t}$ は

$$\frac{\Delta v_1}{\Delta t} = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)\Delta t}(1 + e)v_2 \quad (\text{i})$$

と, また質量 m_2 の車両の加速度 $\frac{\Delta v_2}{\Delta t}$ は

$$\frac{\Delta v_2}{\Delta t} = -\frac{m_1}{(m_1 + m_2)\Delta t}(1 + e)v_2 \quad (\text{ii})$$

と得られる. そこで, これらの 2 乗和を σ^2 とすると

$$\sigma^2 = \left\{ \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \right\} \frac{(1 + e)^2 v_2^2}{\Delta t^2} \quad (\text{iii})$$

となるので, 質量比を β として $m_1 = \beta m_2$ の関係式 (iii) に代入して

$$\sigma^2 = \frac{\beta^2 + 1}{(\beta + 1)^2} \cdot \frac{(1 + e)^2 v_2^2}{\Delta t^2} \quad (\text{iii}')$$

となる. これを β に関する関数として $0 < \beta$ の現実的範囲での最小値を求めると, $\beta = 1$ を得る. また, 跳ねかえり係数については式 (iii') より容易に $e = 0$ の場合であることがわかる.

この結果と式 (i) と (ii) からわかるように, 小型車が大型車に追突されると小型車側に非常な危険性が生じる. 生じる加速度をわずかでも減少させるためにはサイドブレーキをかけて置くことが重要である. 跳ねかえり係数は 0 が解として得られたことから, 乗員搭乗空間は押し潰れないようにガッチリした構造として乗員はシートベルトを着用し, その車両前側のボンネット部分および後側のトランク部分はいわゆる “Optimum crushable body design” として運動エネルギーをできるだけ多く吸収する構造 (塑性変形してエネルギーを吸収する構造) とする設計がよい.

8 平面 xy 座標系, および, 一般化座標 θ_1 と θ_2 などの全ての必要なパラメータを図 4.53 に示されているようにする.

質量 m_1 と質量 m_2 についての位置ベクトル $\mathbf{r}_1$ と $\mathbf{r}_2$ はそれぞれ

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} l_1 \sin \theta_1 \\ -l_1 \cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad (\text{i})$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (\text{ii})$$

そこで, それらの速度は

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 \\ l_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 \quad (\text{iii})$$

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 + \begin{bmatrix} l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \dot{\theta}_2 \quad (\text{iv})$$

と表現でき、仮想変位は次のようになる。

$$\delta \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 \\ l_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix} \delta \theta_1 \quad (\text{v})$$

$$\delta \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \delta \theta_1 + \begin{bmatrix} l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \delta \theta_2 \quad (\text{vi})$$

質量 m_1 と質量 m_2 に作用する外力 $\mathbf{F}_1$ と $\mathbf{F}_2$ は、第 1 振り子の棒と第 2 振り子の棒に発生する張力をそれぞれ T_1 と T_2 として、次のように表せる。

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} -T_1 \sin \theta_1 + T_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -m_1 g + T_1 \cos \theta_1 - T_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (\text{vii})$$

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} -T_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -m_2 g + T_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (\text{viii})$$

そこで、次のように一般化力 Q_1 と Q_2 を求める。

$$\begin{aligned} Q_1 &= \sum_{i=1}^2 \left(\mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \theta_1} \right) = \begin{bmatrix} -T_1 \sin \theta_1 + T_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -m_1 g + T_1 \cos \theta_1 - T_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 \\ l_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} -T_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -m_2 g + T_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \\ &= -m_1 g l_1 \sin \theta_1 - m_2 g l_1 \sin \theta_1 - m_2 g l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad (\text{ix})$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= \sum_{i=1}^2 \left(\mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \theta_2} \right) = \begin{bmatrix} -T_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -m_2 g + T_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \\ &= -m_2 g l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad (\text{x})$$

2 つの質点の運動エネルギーは次のように求められる。

$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_1) = \frac{1}{2} m_1 \dot{\theta}_1^2 \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 \\ l_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 \\ l_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} l_1^2 m_1 \dot{\theta}_1^2 \quad (\text{xi})$$

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{1}{2} m_2 (\dot{\mathbf{r}}_2 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2) \\ &= \frac{1}{2} m_2 \{ \dot{\theta}_1^2 (l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2) + 2(l_2^2 + l_1 l_2 \cos \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \} \end{aligned} \quad (\text{xii})$$

そこで、式(4.222)に基づいて、 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial E}{\partial \theta_1} - Q_1 = 0$ と $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial E}{\partial \theta_2} - Q_2 = 0$ の式はそれぞれ

$$\begin{aligned} & \{l_1^2(m_1 + m_2) + (l_2^2 + 2l_1l_2 \cos \theta_2)m_2\}\ddot{\theta}_1 + m_2(l_2^2 + l_1l_2 \cos \theta_2)\ddot{\theta}_2 \\ & - 2l_1l_2m_2 \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - l_1l_2m_2 \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 \\ & + (m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1 + m_2gl_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) = 0 \end{aligned} \quad (\text{xiii})$$

および

$$\begin{aligned} & m_2(l_2^2 + l_1l_2 \cos \theta_2)\ddot{\theta}_1 + l_2m_2\ddot{\theta}_2 + l_1l_2m_2 \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 \\ & + m_2gl_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) = 0 \end{aligned} \quad (\text{xiv})$$

となる．したがって、求めるべき運動方程式は行列表現で

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} l_1^2m_1 + (l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos \theta_2)m_2 & m_2(l_2^2 + l_1l_2 \cos \theta_2) \\ m_2(l_2^2 + l_1l_2 \cos \theta_2) & l_2m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 & -l_1l_2m_2 \sin \theta_2 \\ l_1l_2m_2 \sin \theta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \begin{bmatrix} -2l_1l_2m_2 \sin \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1 + m_2gl_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ m_2gl_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{xv})$$

のように得られる．

9 角速度を ω とすると、

$$\omega = \frac{2\pi}{23 \times 3600 + 56 \times 60 + 4} \approx 7.292 \times 10^{-5} [\text{rad/s}]$$

円軌道の半径（地球の中心から軌道までの距離） R は $R = 4.2157 \times 10^7 [\text{m}]$ である．そこで、周速 v は

$$v = \omega R \approx 3074 [\text{m/s}]$$

向心加速度は式(4.28)を利用して求めてみよう． z 軸が地球の南極点から北極点を貫く方向の回転軸として、原点を赤道面とその軸の交点に置いて、右手直角座標系である xyz 座標を設定する．静止衛星の角速度ベクトルを

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7.292 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

と設定できる．静止衛星の位置ベクトルは計算しやすいようにちょうど x 軸上の位置

での衛星について考えることにして

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 4.2157 \times 10^7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

と記述できる．そこで，衛星は等速円運動であると考えることができるので向心加速度は式 (4.28) の外積計算で，

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) = \boldsymbol{\omega} \times \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 0 & 7.292 \times 10^{-5} \\ 4.2157 \times 10^7 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 0 & 7.292 \times 10^{-5} \\ 0 & 3.0741 \times 10^3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2242 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\text{m/s}^2] \end{aligned}$$

これより，向心加速度の大きさは 0.2242 m/s^2 である．

10 解析の便宜上，北半球についての図 4.28 の座標系で考えることにする．石コロの運動開始時刻を $t = 0$ として，その瞬間に運動座標系と固定座標系の位置関係が同図であるとする．また，最後に数値を代入するまで，地球の半径を $R [\text{m}]$ ，緯度を $\theta [\text{rad}]$ ，地球の自転の角速度を $\omega [\text{rad/s}]$ とする．

さて，運動座標系上で石コロの初期位置ベクトル $\mathbf{r}_{\text{rel}}(0)$ と相対初速度ベクトル $\dot{\mathbf{r}}_{\text{rel}}(0)$ は

$$\mathbf{r}_{\text{rel}}(0) = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{i})$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{\text{rel}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ii})$$

である．運動座標系から固定座標系への座標変換行列は

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \omega t & -\sin \omega t & -\sin \theta \cos \omega t \\ \cos \theta \sin \omega t & \cos \omega t & -\sin \theta \sin \omega t \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{iii})$$

の通りに時間の関数を成分とする座標変換行列 (テンソル) となるが， $\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600} [\text{rad/s}]$ は微小値なので 1000 m 程度の自由落下中の約 14 秒間については ωt の値は微小としてよいであろう．そこで，近似的に定数成分からなる座

標変換行列としてよい．すなわち，式 (iii) を

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{iii}')$$

と近似する．以上より，落下開始から穴底に到達するまでの間の任意の時間 t における石コロの位置，速度，加速度を運動座標系上で表現すれば

$$\mathbf{r}_{\text{rel}} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \varsigma \end{bmatrix} \quad (\text{iv})$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{\text{rel}} = \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\varsigma} \end{bmatrix} \quad (\text{v})$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\text{rel}} = \begin{bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\varsigma} \end{bmatrix} \quad (\text{vi})$$

となり，運動座標系上で記述する絶対加速度は

$$\ddot{\mathbf{r}}^{\text{rel}} = \begin{bmatrix} -g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{vii})$$

となる．また，地球の角速度は，

$$\boldsymbol{\omega}^{\text{rel}} = \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \sin \theta \\ 0 \\ \omega \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{viii})$$

と表現できる．したがって，実際に働く加速度は重力加速度だけであることを考慮して，式 (4.91) による

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\text{rel}} = \ddot{\mathbf{r}}^{\text{rel}} - \boldsymbol{\omega}^{\text{rel}} \times (\boldsymbol{\omega}^{\text{rel}} \times \mathbf{r}^{\text{rel}}) - 2\boldsymbol{\omega}^{\text{rel}} \times \dot{\mathbf{r}}_{\text{rel}}$$

に式 (iv) ~ (viii) を代入することで，石コロに作用する加速度は運動座標系上で

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\varsigma} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega \sin \theta \\ 0 \\ \omega \cos \theta \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} \omega \sin \theta \\ 0 \\ \omega \cos \theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \varsigma \end{bmatrix} \right) - 2 \begin{bmatrix} \omega \sin \theta \\ 0 \\ \omega \cos \theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\varsigma} \end{bmatrix} \\ &\Downarrow \\ \begin{bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\varsigma} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega^2 \cos \theta \{ \xi \cos \theta - \varsigma \sin \theta \} \\ \omega^2 \eta \\ \omega^2 \sin \theta \{ \varsigma \sin \theta - \xi \cos \theta \} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\omega \dot{\eta} \cos \theta \\ 2\omega \dot{\varsigma} \sin \theta - 2\omega \dot{\xi} \cos \theta \\ -2\omega \dot{\eta} \sin \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \downarrow \\
 \begin{bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\varsigma} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 2\omega \cos \theta & 0 \\ -2\omega \cos \theta & 0 & 2\omega \sin \theta \\ 0 & -2\omega \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\varsigma} \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} \omega^2 \cos^2 \theta & 0 & -\omega^2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ -\omega^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & \omega^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \varsigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ix})
 \end{aligned}$$

と表現できる．この運動方程式（微分方程式）の解析的解法については別書にゆずり，ここではコンピュータを利用した数値シミュレーションの学習を兼ねて，その基礎的手法のオイラー法で数値解析する．

オイラー法の解説

オイラー法は，時間の関数である $y(t)$ についての常微分方程式が

$$\ddot{y}(t) = a\dot{y}(t) + by(t) + c$$

で与えられたとき，シミュレーション開始時間の $t = 0$ での関数の初期値である速度 $\dot{y}(0)$ と位置 $y(0)$ を与えて，その時点での加速度 $\ddot{y}(0)$ を微分方程式の右辺の計算で得る．すなわち，

$$\ddot{y}(0) = a\dot{y}(0) + by(0) + c$$

そして，微小時間 Δt 経過後の $t = \Delta t$ での速度を線形近似式の

$$\dot{y}(\Delta t) = \dot{y}(0) + \Delta t \cdot \ddot{y}(0)$$

で求め，さらに位置を

$$y(\Delta t) = y(0) + \Delta t \cdot \dot{y}(0)$$

で求める．この操作を繰り返すことで時間 $t = \Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t$ での関数の値を求める．したがって， $t = k\Delta t$ の時点での関数を既知での次の時間ステップ $t = (k+1)\Delta t$ での関数を求める段取りは，

- 第 1 ステップ計算： $\ddot{y}(k\Delta t) = a\dot{y}(k\Delta t) + by(k\Delta t) + c$
- 第 2 ステップ計算： $\dot{y}((k+1)\Delta t) = \dot{y}(k\Delta t) + \Delta t \cdot \ddot{y}(k\Delta t)$
- 第 3 ステップ計算： $y((k+1)\Delta t) = y(k\Delta t) + \Delta t \cdot \dot{y}(k\Delta t)$

であり，この第 1 ステップから第 3 ステップを繰り返せばよい．一般的実行上の注意点としては，時間間隔の Δt を関数の非線形特性にあわせて十分適切に小さくしないと計算が不正確になり発散してしまう．

では，前述の知識を使って

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600} [\text{rad/s}] \quad \theta = \frac{43}{180} \pi [\text{rad}]$$

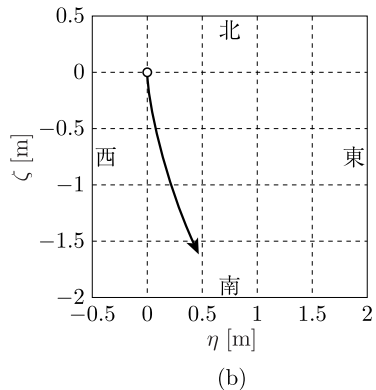
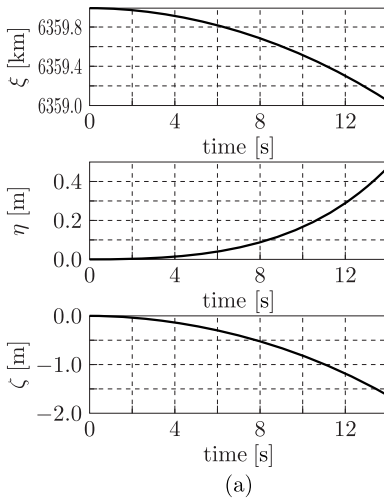
$$\begin{bmatrix} \xi(0) \\ \eta(0) \\ \zeta(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1.2742}{2} \times 10^7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\text{m}] \quad \begin{bmatrix} \dot{\xi}(0) \\ \dot{\eta}(0) \\ \dot{\zeta}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\text{m/s}]$$

を微分方程式の

$$\begin{bmatrix} \ddot{\xi}(t) \\ \ddot{\eta}(t) \\ \ddot{\zeta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2\omega \cos \theta & 0 \\ -2\omega \cos \theta & 0 & 2\omega \sin \theta \\ 0 & -2\omega \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\eta}(t) \\ \dot{\zeta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega^2 \cos^2 \theta & 0 & -\omega^2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ -\omega^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & \omega^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

に代入して，数値シミュレーションのプログラムを作成して実行してみよう．すると，次の図 (a)，(b) のようなグラフが描かれる．

これより，穴底では遠心力により南に約 170 cm，コリオリの力により東側に約 50 cm ずれる．



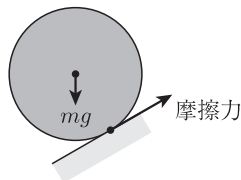
参考 実際にこのような運動を利用している施設として北海道の上砂川町に地下無重力実験センターがある．昔の炭鉱の約 1000 m にもなる縦坑（鉛直方向の穴）を利用

して上から無重力状態で実験したい実験装置を内在した大型カプセルを約 10 秒間 (約 500 m) 自由落下状態になるように落下させる試験サーブスを提供する．カプセルは約 10 秒間の自由落下後，“茶筒の原理”で空気流抵抗を利用して安全に減速されながらさらに約 200 m 程落下して静止する．

第 5 章

1 材料密度を ρ として，円柱についてその中心軸まわりの慣性モーメント I_C を求めると

$$\begin{aligned} I_C &= \rho \int_0^T \int_0^{\frac{D}{2}} r^2 \cdot 2\pi r dr dx \\ &= \rho \int_0^T \frac{\pi D^4}{32} dx = \frac{\pi \rho D^4 T}{32} = \frac{D^2}{8} m \quad (\text{i}) \end{aligned}$$



となる．ここで， m は円柱の質量を示す．

上図でわかるように，円柱の転がり落ちる角速度を ω とすると，斜面との間に滑りが生じないことから

$$\frac{D}{2} \omega = -\frac{\dot{h}}{\sin \theta} \quad (\text{ii})$$

の関係が導き出せる．また，斜面からの摩擦力を f とすると，斜面を転がる円柱中心点の並進変位についての運動方程式は

$$m \frac{\ddot{h}}{\sin \theta} = -mg \sin \theta + f \quad (\text{iii})$$

と表せる．円柱の回転に関する運動方程式は

$$I_C \cdot \dot{\omega} = \frac{D}{2} f \quad (\text{iv})$$

となる．そこで，式 (ii), (iii), (iv) の連立で摩擦力 f と角速度 ω のパラメータを消去して，高さの変数 h だけにに関する運動方程式を導き出し，

$$\left\{ m + \left(\frac{2}{D} \right)^2 I_C \right\} \ddot{h} = -mg \sin^2 \theta \quad (\text{v})$$

を得る．これが斜面高さを変数としての斜面を転がり落ちる円筒の運動方程式である．これを積分することで

$$\dot{h} = \frac{mg \sin^2 \theta}{m + \left(\frac{2}{D} \right)^2 I_C} \cdot t + C_1 \Rightarrow h = -\frac{mg \sin^2 \theta}{m + \left(\frac{2}{D} \right)^2 I_C} \cdot t^2 + C_1 t + C_2$$

となり，初期条件より

$$C_1 = 0, \quad C_2 = H$$

なので，斜面高さ $h = 0$ となるまでに要する時間は

$$t = \sqrt{\frac{H \left\{ m + \left(\frac{2}{D} \right)^2 I_C \right\}}{mg \sin^2 \theta}} = \sqrt{\frac{3H}{2g \sin^2 \theta}} [\text{s}]$$

と得られる．

2 機構の慣性モーメントは $2ml^2 = 4 [\text{kgm}^2]$ である．

作用する外力を $F(t)$ とすると，それによる力のモーメントは $F(t)l = F(t) [\text{N}\cdot\text{m}]$ である．そこで，静止状態の角運動量 0 の状態からの運動量の変化と力積の関係（式 (5.27)）より

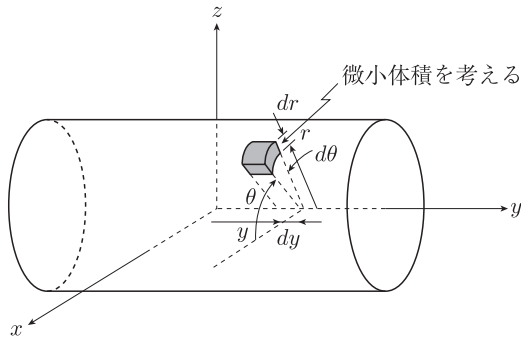
$$2ml^2\omega = \int_0^{0.02} F(t)l dt \Rightarrow 2ml^2\omega = \frac{0.02 \times 300 \times 1}{2} \Rightarrow \omega = 0.75 [\text{rad/s}]$$

そこで，角速度は $0.75 [\text{rad/s}]$ であり，それは約 7.2 rpm である．

3 $O-xyz$ は対象の円柱物体の 3 本の慣性主軸に一致していることは本書の学習より自明である．そこで，それぞれの慣性主軸まわりの主慣性モーメントを計算して，それらに対角成分とする 3 行 3 列の行列を作成すれば慣性テンソルとなる．次図のように円筒微小要素を考えて積分計算で求める．

① x 軸まわり（ z 軸まわりも同一値）の慣性モーメント

$$I_x = \rho \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{\frac{D}{2}} \int_0^{2\pi} (y^2 + r^2 \sin^2 \theta) \cdot r d\theta dr dy$$



$$\begin{aligned}
 &= \rho \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{\frac{D}{2}} (2\pi y^2 + \pi r^2) \cdot r dr dy \\
 &= \rho \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(\frac{\pi D^2}{4} y^2 + \frac{\pi D^4}{64} \right) dy = \frac{\rho \pi D^2 L}{4} \left(\frac{L^2}{12} + \frac{D^2}{16} \right) (= I_z)
 \end{aligned}$$

ちなみに, $\frac{\rho \pi D^2 L}{4}$ の因子が円柱の質量を表す.

② y 軸まわりの慣性モーメント

$$\begin{aligned}
 I_y &= \rho \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{\frac{D}{2}} \int_0^{2\pi} r^2 \cdot r d\theta dr dy \\
 &= \rho \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{\frac{D}{2}} 2\pi r^3 dr dy = \rho \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\pi D^4}{32} dy = \frac{\pi \rho D^4 L}{32}
 \end{aligned}$$

以上より, 求めるべき慣性テンソルは

$$\begin{bmatrix} \frac{\rho \pi D^2 L}{4} \left(\frac{L^2}{12} + \frac{D^2}{16} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi \rho D^4 L}{32} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho \pi D^2 L}{4} \left(\frac{L^2}{12} + \frac{D^2}{16} \right) \end{bmatrix}$$

と求められる.

慣性主軸の方向余弦ベクトルは $[1, 0, 0]^T$, $[0, 1, 0]^T$, $[0, 0, 1]^T$ と表される.

4 本書 5.2.2 に記載されている式 (5.75) を公式として利用して質量行列を求めることにする.

- 基本構成の立方体単体の質量: ρl^3
- 剛体の質量: $M = 3\rho l^3$ (i)
- 3つの基本構成立方体の質量中心座標:

$$\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{l}{2} \right), \quad \left(\frac{3l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{l}{2} \right), \quad \left(\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}, \frac{l}{2} \right)$$

そこで, この剛体の質量中心の座標は, それら質量 ρl^3 の3つの質点からなる構造物として

$$\begin{bmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{bmatrix} = \frac{1}{3\rho l^3} \left\{ \rho l^3 \begin{bmatrix} l/2 \\ l/2 \\ l/2 \end{bmatrix} + \rho l^3 \begin{bmatrix} 3l/2 \\ l/2 \\ l/2 \end{bmatrix} + \rho l^3 \begin{bmatrix} l/2 \\ 3l/2 \\ l/2 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 5l/6 \\ 5l/6 \\ l/2 \end{bmatrix} \quad (\text{ii})$$

と計算できる.

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= M\{(y_A - y_G)^2 + (z_A - z_G)^2\} + \sum_{i=1}^n m_i\{(y_i - y_G)^2 + (z_i - z_G)^2\} \\
&= M\left\{\left(0 - \frac{5l}{6}\right)^2 + \left(0 - \frac{l}{2}\right)^2\right\} + \int_V \left\{\left(y - \frac{5l}{6}\right)^2 + \left(z - \frac{l}{2}\right)^2\right\} dm \\
&= 3\rho l^3 \left\{\left(\frac{5l}{6}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2\right\} \\
&\quad + \rho \int_0^l \int_0^l \int_0^l \left\{\left(y - \frac{5l}{6}\right)^2 + \left(z - \frac{l}{2}\right)^2\right\} dx dy dz \\
&\quad + \rho \int_0^l \int_0^l \int_l^{2l} \left\{\left(y - \frac{5l}{6}\right)^2 + \left(z - \frac{l}{2}\right)^2\right\} dx dy dz \\
&\quad + \rho \int_0^l \int_l^{2l} \int_0^l \left\{\left(y - \frac{5l}{6}\right)^2 + \left(z - \frac{l}{2}\right)^2\right\} dx dy dz \\
&= \frac{17}{6}\rho l^5 + \frac{5}{18}\rho l^5 + \frac{5}{18}\rho l^5 + \frac{11}{18}\rho l^5 = 4\rho l^5 \tag{iii}
\end{aligned}$$

$$I_{yy} = I_{xx} = 4\rho l^5 \quad (\text{構造の対称性により}) \tag{iv}$$

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= M\{(x_A - x_G)^2 + (y_A - y_G)^2\} + \sum_{i=1}^n m_i\{(x_i - x_G)^2 + (y_i - y_G)^2\} \\
&= M\left\{\left(0 - \frac{5l}{6}\right)^2 + \left(0 - \frac{5l}{6}\right)^2\right\} + \int_V \left\{\left(x - \frac{5l}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{5l}{6}\right)^2\right\} dm \\
&= 3\rho l^3 \left\{\left(\frac{5l}{6}\right)^2 + \left(\frac{5l}{6}\right)^2\right\} + \rho \int_0^l \int_0^l \int_0^l \left\{\left(x - \frac{5l}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{5l}{6}\right)^2\right\} dx dy dz \\
&\quad + \rho \int_0^l \int_0^l \int_l^{2l} \left\{\left(x - \frac{5l}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{5l}{6}\right)^2\right\} dx dy dz \\
&\quad + \rho \int_0^l \int_l^{2l} \int_0^l \left\{\left(x - \frac{5l}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{5l}{6}\right)^2\right\} dx dy dz \\
&= \frac{25}{6}\rho l^5 + \frac{7}{18}\rho l^5 + \frac{13}{18}\rho l^5 + \frac{13}{18}\rho l^5 = 6\rho l^5 \tag{v}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{yx} &= M(x_A - x_G)(y_A - y_G) + \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_G)(y_i - y_G) \\
&= M\left(0 - \frac{5l}{6}\right)\left(0 - \frac{5l}{6}\right) + \int_V \left(x - \frac{5l}{6}\right)\left(y - \frac{5l}{6}\right) dm \\
&= 3\rho l^3 \left(\frac{5l}{6}\right)^2 + \rho \int_0^l \int_0^l \int_0^l \left(x - \frac{5l}{6}\right)\left(y - \frac{5l}{6}\right) dx dy dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \rho \int_0^l \int_0^l \int_l^{2l} \left(x - \frac{5l}{6}\right) \left(y - \frac{5l}{6}\right) dx dy dz \\
& + \rho \int_0^l \int_l^{2l} \int_0^l \left(x - \frac{5l}{6}\right) \left(y - \frac{5l}{6}\right) dx dy dz \\
& = \frac{25}{12} \rho l^5 + \frac{1}{9} \rho l^5 - \frac{2}{9} \rho l^5 - \frac{2}{9} \rho l^5 = \frac{7}{4} \rho l^5
\end{aligned} \tag{vi}$$

$$\begin{aligned}
I_{zx} &= M(x_A - x_G)(z_A - z_G) + \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_G)(z_i - z_G) \\
&= M \left(0 - \frac{5l}{6}\right) \left(0 - \frac{l}{2}\right) + \int_V \left(x - \frac{5l}{6}\right) \left(z - \frac{l}{2}\right) dm \\
&= 3\rho l^3 \cdot \frac{5l^2}{12} + \rho \int_0^l \int_0^l \int_0^l \left(x - \frac{5l}{6}\right) \left(z - \frac{l}{2}\right) dx dy dz \\
&\quad + \rho \int_0^l \int_0^l \int_l^{2l} \left(x - \frac{5l}{6}\right) \left(z - \frac{l}{2}\right) dx dy dz \\
&\quad + \rho \int_0^l \int_l^{2l} \int_0^l \left(x - \frac{5l}{6}\right) \left(z - \frac{l}{2}\right) dx dy dz \\
&= \frac{5}{4} \rho l^5 + 0 + 0 + 0 = \frac{5}{4} \rho l^5
\end{aligned} \tag{vii}$$

$$I_{zy} = I_{zx} = \frac{5}{4} \rho l^5 \tag{viii}$$

$$M(x_G - x_A) = 3\rho l^3 \times \frac{5l}{6} = \frac{5}{2} \rho l^4 \tag{ix}$$

$$M(y_G - y_A) = 3\rho l^3 \times \frac{5l}{6} = \frac{5}{2} \rho l^4 \tag{x}$$

$$M(z_G - z_A) = 3\rho l^3 \times \frac{l}{2} = \frac{3}{2} \rho l^4 \tag{xi}$$

以上より原点に関する質量行列は，

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 3\rho l^3 & & & & & \\ 0 & 3\rho l^3 & & & & \\ 0 & 0 & 3\rho l^3 & & & \\ 0 & -\frac{3}{2}\rho l^4 & \frac{5}{2}\rho l^4 & 4\rho l^5 & & \\ \frac{3}{2}\rho l^4 & 0 & -\frac{5}{2}\rho l^4 & \frac{7}{4}\rho l^5 & 4\rho l^5 & \\ -\frac{5}{2}\rho l^4 & \frac{5}{2}\rho l^4 & 0 & \frac{5}{4}\rho l^5 & \frac{5}{4}\rho l^5 & 6\rho l^5 \end{bmatrix} \tag{xii}$$

と求まる．

剛体特性のうちで、質量と質量中心はすでに得られているので、以下では主慣性モーメントと慣性主軸を求めることにする。

剛体の運動の表現点を原点から質量中心に移動させるための変換行列は、式 (5.70) を参考にして、

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}l & \frac{5}{6}l \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}l & 0 & -\frac{5}{6}l \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6}l & \frac{5}{6}l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{xiii})$$

と得られる。

そこで、質量中心を表現点とする質量行列は $T^T \cdot M \cdot T$ の演算で求めてもよいし、式 (iii) から (ix) の計算を質量中心点について計算する (すなわち、式 (iii), (v), (vi), (vii) については第 2 項以降の和の値、式 (ix) から (xi) は 0) ことで直接求めてもよい。結局、どちらの方法でも質量中心に関する質量行列は

$$M_G = \begin{bmatrix} 3\rho l^3 & & & & & \\ 0 & 3\rho l^3 & & & & \\ 0 & 0 & 3\rho l^3 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{6}\rho l^5 & & \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}\rho l^5 & \frac{7}{6}\rho l^5 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{6}\rho l^5 \end{bmatrix} \quad (\text{xiv})$$

と得られる。主慣性モーメントと慣性主軸は、この質量行列の右下の 3 行 3 列の部分行列である慣性テンソルの固有値解析を行えばよい。すなわち、

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{6}\rho l^5 & -\frac{1}{3}\rho l^5 & 0 \\ -\frac{1}{3}\rho l^5 & \frac{7}{6}\rho l^5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{6}\rho l^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{bmatrix} \quad (\text{xv})$$

の固有値問題を解いて、

$$\lambda = \frac{5}{6}\rho l^5, \quad \frac{9}{6}\rho l^5, \quad \frac{11}{6}\rho l^5$$

が 3 つの主慣性モーメントであり, それらそれぞれに対応する慣性主軸の方向余弦ベクトルは, 固有ベクトルを長さ 1 に正規化したベクトルとして得られるので, 上記の主慣性モーメントの順序に対応させて

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と求められる.

5 ① 運動方程式の導出

支点まわりのレバーの慣性モーメント I は

$$I = \int_0^L \rho x^2 dx = \frac{\rho L^3}{3} \quad (\text{i})$$

である. 初期状態の傾き角 $\theta_0 = 5^\circ$ から水平状態の $\theta_E = 90^\circ$ までの任意の傾き角 θ における重力によるレバーに作用する支点まわりの力のモーメント T は

$$T = \frac{\rho g L^2}{2} \sin \theta \quad (\text{ii})$$

そこで, 運動方程式は

$$\frac{\rho L^3}{3} \ddot{\theta} = \frac{\rho g L^2}{2} \sin \theta \quad (\text{iii})$$

となる.

② 運動方程式からの水平姿勢まで回転落下したときの角速度

$$\begin{aligned} \frac{\rho L^3}{3} \ddot{\theta} &= \frac{\rho g L^2}{2} \sin \theta \\ \Downarrow \\ \frac{\rho L^3}{3} \ddot{\theta} \dot{\theta} &= \frac{\rho g L^2}{2} \dot{\theta} \sin \theta \\ \Downarrow \quad \therefore \quad \frac{d\dot{\theta}^2}{dt} &= \frac{d\dot{\theta}^2}{d\dot{\theta}} \frac{d\dot{\theta}}{dt} = 2\dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{dt} = 2\dot{\theta} \ddot{\theta} \\ \frac{\rho L^3}{6} \frac{d\dot{\theta}^2}{dt} &= \frac{\rho g L^2}{2} \dot{\theta} \sin \theta \\ \Downarrow \\ \frac{\rho L^3}{6} \frac{d\dot{\theta}^2}{dt} &= \frac{\rho g L^2}{2} \frac{d}{dt} (-\cos \theta) \\ \Downarrow \\ \dot{\theta}^2 &= -\frac{3g}{L} \cos \theta + C_1 \quad (\text{iv}) \end{aligned}$$

となる．初期条件は $\theta_0 = 5$ で $\dot{\theta}(t=0) = 0$ なので，

$$C_1 = \frac{3g}{L} \cos \frac{5\pi}{180}$$

となり，式 (iv) は

$$\dot{\theta}^2 = -\frac{3g}{L} \cos \theta + \frac{3g}{L} \cos \frac{5\pi}{180} \quad (\text{v})$$

したがって， $\theta = \pi/2$ [rad] を代入して

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L} \cos \frac{5\pi}{180}} \text{ [rad/s]} \quad (\text{vi})$$

を得る．

③ 運動方程式からの水平姿勢まで回転落下したときの角速度

水平状態での位置エネルギーを基準に考えると，初期状態での位置エネルギーは

$$\frac{\rho g L^2}{2} \cos \left(\frac{5\pi}{180} \right) \quad (\text{vii})$$

であり，運動エネルギーは 0 である．

水平位置のときには，位置エネルギーが 0 であり，レバーの角速度の大きさを $\dot{\theta}$ とするとその運動エネルギーは

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\rho L^3}{3} \dot{\theta}^2 \quad (\text{viii})$$

である．したがって，エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\rho L^3}{3} \dot{\theta}^2 = \frac{\rho g L^2}{2} \cos \left(\frac{5\pi}{180} \right)$$

↓

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L} \cos \left(\frac{5\pi}{180} \right)}$$

と得られる．

6 図 5.16 を利用して，任意の傾き角 θ を一般化座標としてラグランジュ法を実行する．半円柱の質量中心の位置は半円柱と水平面の間で滑りが無い条件により，

$$\begin{bmatrix} x_G \\ y_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4R}{3\pi} \sin \theta - R\theta \\ R - \frac{4R}{3\pi} \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{i})$$

と表現できる．したがって，その速度は

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_G \\ \dot{y}_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{4R}{3\pi} \cos \theta - R \right) \dot{\theta} \\ \frac{4R}{3\pi} \dot{\theta} \sin \theta \end{bmatrix} \quad (\text{ii})$$

である．円柱に作用している外力は，重力の Mg ，水平面からの抗力 T および摩擦力 F である．そこで，ラグランジュ法での一般化力 Q は，式 (4.213) に基づいて，重力のなす仕事

$$Q = \begin{bmatrix} 0 \\ -Mg \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial x_G}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y_G}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Mg \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{4R}{3\pi} \cos \theta - R \\ \frac{4R}{3\pi} \sin \theta \end{bmatrix} = - \left(\frac{4R}{3\pi} \right) Mg \sin \theta \quad (\text{iii})$$

となる．ここで，摩擦力と抗力はその作用点に変位しないので仕事をしない．

運動エネルギー E は，質量中心の並進運動エネルギーと回転エネルギーの合計であるので，

● 並進運動エネルギー：

$$\frac{1}{2} M \begin{bmatrix} \dot{x}_G \\ \dot{y}_G \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x}_G \\ \dot{y}_G \end{bmatrix} = \frac{1}{2} M \left\{ \left(\frac{4R}{3\pi} \cos \theta - R \right)^2 + \left(\frac{4R}{3\pi} \right)^2 \sin^2 \theta \right\} \dot{\theta}^2 \quad (\text{iv})$$

● 回転運動エネルギー：

$$\frac{1}{2} I_Z \dot{\theta}^2 \quad (\text{v})$$

より，

$$E = \frac{1}{2} I_Z \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \left\{ \left(\frac{4R}{3\pi} \cos \theta - R \right)^2 + \left(\frac{4R}{3\pi} \right)^2 \sin^2 \theta \right\} \dot{\theta}^2 \quad (\text{vi})$$

そこで，公式の $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \theta} - Q = 0$ を計算する．すなわち，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \left\{ I_Z + M \left(\frac{4R}{3\pi} \cos \theta - R \right)^2 + M \left(\frac{4R}{3\pi} \right)^2 \sin^2 \theta \right\} \ddot{\theta} \\ &\quad + \frac{8MR^2}{3\pi} \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ &= \left\{ I_Z + MR^2 - 2MR \left(\frac{4R}{3\pi} \right) \cos \theta + M \left(\frac{4R}{3\pi} \right)^2 \right\} \ddot{\theta} \\ &\quad + \frac{8MR^2}{3\pi} \dot{\theta}^2 \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{vii})$$

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} = \frac{4MR^2}{3\pi} \dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (\text{viii})$$

と式 (iii) を公式に代入して

$$\left\{ I_Z + MR^2 - 2MR \left(\frac{4R}{3\pi} \right) \cos \theta + M \left(\frac{4R}{3\pi} \right)^2 \right\} \ddot{\theta} \\ = - \left\{ \left(\frac{4R}{3\pi} \right) MR \sin \theta \right\} \dot{\theta}^2 - \left(\frac{4R}{3\pi} \right) Mg \sin \theta \quad (\text{ix})$$

と解を得る．これは例題 5.7 の解と同じである．

7 片側の車輪について，車軸（慣性主軸の 1 本）まわりの慣性モーメント I_ξ は次のように求められる．

$$I_\xi = \rho \int_0^{\frac{D}{2}} 2\pi r t \cdot r^2 dr = \frac{\pi \rho t}{32} D^4 \approx 33.77 [\text{kgm}^2]$$

そこで，車軸中心線に関する車輪全体の慣性モーメント I'_ξ は

$$I'_\xi = 2I_\xi \approx 67.54 [\text{kgm}^2]$$

となる．

車輪回転角速度（自転）は

$$\omega_0 = \frac{130000}{3600 \times D/2} \approx 83.98 [\text{rad/s}]$$

であり，電車のカーブを走る角速度ベクトル（歳差運動）は

$$\Omega = \frac{130000}{3600 \times 1200} \approx 0.03 [\text{rad/s}]$$

である．それらは互いに直交している．そこで，ジャイロモーメントの大きさ J は

$$J = \Omega \omega_0 I_{\xi\xi} \approx 0.03 \times 83.98 \times 67.54 \approx 170.2 [\text{Nm}]$$

と計算される．ジャイロモーメントの向きは左手の指を使って簡単に判断できる．すなわち，左手人差し指を車軸と平行に車両進行方向に対して左側に向ける（車軸の回転を右ねじの回転と考える）．そして，親指を下に向ける（カーブは右に曲がっているから）．そうすると，中指は電車の後ろ向きとなる．その中指の向きが指し示すトルクベクトルは，カーブの内側車輪をレールから浮かせる方向（鉛直上向き）に作用することがわかる．

ちなみにこの状況での遠心力による車両をカーブ外側に傾かせようとする力のモーメントは

$$m \cdot r \cdot \Omega^2 \cdot h \approx 25000 \times 1200 \times 0.03^2 \times 1.5 \approx 4.05 \times 10^4 [\text{Nm}]$$

と計算できる．本問題での想定状況ではジャイロモーメントは遠心力による力のモーメントより大幅に小さいことがわかる．

8 まず 3 枚ブレードのローターの回転軸（慣性主軸の 1 本）まわりの慣性モーメント $I_{\xi\xi}$ は

$$I_{\xi\xi} = 3\rho \int_0^l r^2 dr = \rho l^3 \approx 1.56 \times 10^5 \text{ [kgm}^2\text{]} \quad (\text{i})$$

と計算される． η 軸と ς 軸まわりの 2 つの主慣性モーメントについてはそれぞれ $I_{\eta\eta}$, $I_{\varsigma\varsigma}$ と表しておく．

さて，運動座標系（ローターの南から東方向への首振り）の角速度ベクトルは運動座標系上で

$$\boldsymbol{\omega}^{\text{rel}} = \begin{bmatrix} \omega_{\xi} \\ \omega_{\eta} \\ \omega_{\varsigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi \end{bmatrix} \quad (\text{ii})$$

である．ローターの角運動量は

$$\boldsymbol{h}^{\text{rel}} = \begin{bmatrix} -\frac{2\pi f}{60} I_{\xi\xi} \\ 0 \\ \phi I_{\varsigma\varsigma} \end{bmatrix} \quad (\text{iii})$$

と得られる．そこで，ジャイロモーメントは

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}_{\text{gyro}}^{\text{rel}} &= -\boldsymbol{\omega}^{\text{rel}} \times \boldsymbol{h}^{\text{rel}} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{2\pi f}{60} I_{\xi\xi} \\ 0 \\ \phi I_{\varsigma\varsigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2\pi f}{60} \phi I_{\xi\xi} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\approx \begin{bmatrix} 0 \\ 2.28 \times 10^4 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ [N}\cdot\text{m]} \quad (\text{iv}) \end{aligned}$$

と得られる．

左手を使って，その人差し指を ξ 軸の負の方向へ向け，歳差運動を示すために親指を ς 軸の正の方向（鉛直上向き）へ向ける．すると中指が η 軸の正方向を向く．すなわち，ジャイロモーメントはローターの首を下げようとする力のモーメントとして支柱 A 点に発生する．