学んだ数学、少し先の数学

本講の目的は、大学でいくらか数学を学んだ人を主な対象として、何を学んだのかを確認しながら、それよりも少し先にどのような数学があるのかを示すことである。数学の学問的特色は、できるだけ一般的であることを目標としながら、厳密な論理に基づいて議論を進めることにある。そのような特色や、議論が抽象的であることが原因となって、学んだことを再確認する機会をもたないまま、また、学んだことの先にどのような学問が展開されているのかを知らないままで終わりがちである。それは、学んだことに自信を持ち、さらにそれを活かすという、学習の本来の目的にそぐうものではない。数学の歴史においても、当代一流の数学者の理解が時代の事情から不十分であったことが、混乱を生み出し、次の数学進展の契機になっている例がいくつも見られる。そうしたことを考えると、数学の学習は容易ではないがゆえに、ある程度の訓練を経たあとは、たとえきちんと理解できていなくても理解できたと思えるぐらいの気楽な学習の方法がつくられるべきであろう。おずおず、びくびくした気持ちで数学に接するよりも、いくらかの失敗や恥を恐れない気楽さのほうが、数学が活きてくるのではないだろうか。もちろん当該分野の研究を本業としようとする人は除いてのことである。こうした意図から本書はつくられている。読者に満足を与えることを願うものである。

本講の各項目は証明がないので短くできている。つまり、証明が気になる人はそれぞれの成書を見ていただくことを想定している。しかも、できるだけ説明を短くするように努めたので、円滑に読み進めることに困難を感じることも起こるであろう。しかし、そんな場合でも先に読み進めてほしい。そのような読み方を通して数学の概略をつかみとり、数学に対する前向きな気持ちをつくっていただくことが、本講の目的だからである。つまり、本講の目的は、通常の数学のテキストの目的とは明らかに異なる。

本講をつくるにあたっては、著者が学生のとき受けた講義とそれ以来学んだ多数の数学書がもとになっている。なお、確認のために岩波数学辞典第４版を参考にさせていただいた。

押川　元重

目 次

線型代数

1 行列とそれらの積

nm 個の数または文字式を n 行 m 列に長方形状に並べ両側から括弧で挟んだものを $n\times m$ **行列**という。$m\times n$ 行列は一般に成分に 2 重添字を付けて

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

と表す。成分が実数だけの行列を**実行列**、複素数が混じった行列を**複素行列**という。また、行の個数と列の個数が等しい行列を**正方行列**という。

$m\times n$ 行列と $n\times\ell$ **行列の積**を考えることができる。例えば、2×2 行列と 2×1 行列との積および 2×2 行列と 2×2 行列との積はそれぞれ

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}$$

となる。一般に (i,j) 成分が a_{ij} である $m\times n$ 行列と、(i,j) 成分が b_{ij} である $n\times\ell$ 行列との積は、(i,j) 成分が $a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$ となる $m\times\ell$ 行列である。

正方行列 A と正方行列 B との２つの積 AB と BA は必ずしも一致しない。このことを行列の積は**可換**でないという。

$n\times m$ 行列 A の行と列を入れ替えてできる $m\times n$ 行列を記号 A^T で表し、A の**転置行列**という。２つの行列の積 AB を考えることができる場合、$(AB)^T=B^TA^T$ がなりたつ。

2　行列式とその値

n^2 個の数または文字式を n 行 n 列に正方形状に並べ両側から縦線で挟んだものを n 次の**行列式**という。n 次の行列式は一般に

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

で表す。行列式にはその**値**というものがある。値の計算は、２次の行列式の場合は

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$$

として計算する。３次の行列式の場合も値を直接求めることもできるが、例えば、１行についての２次の行列式への展開等式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

を用いて計算できる。３次の行列式については、２行に沿って、３行に沿って、さらに、各列に沿っての２次の行列式への展開等式がある。n 次の行列式の値は、行（あるいは列）に沿っての $n-1$ 次の行列式への展開等式を用い、さらには、$n-2$ 次の行列式への展開等式を用い、$\cdots$ という具合にして計算できる。なお、行列式のある行（あるいは列）の何倍かを別の行（あるいは列）に加えても行列式の値は変わらないという性質がある。この性質を利用して、成分に 0 を増やすこと（掃き出すという）によって計算すると楽である。

$n\times n$ 行列 A の成分はそのままにしてできる n 次の行列式を記号 $|A|$ で表わすと、２つの $n\times n$ 行列 $A,\ B$ について、$|AB|=|A||B|$ がなりたつ。

3　正則行列と逆行列

$n \times n$ 行列 A が $|A| \neq 0$ をみたすとき、**正則行列**という。

対角線成分はすべて 1 でその他の成分はすべて 0 である $n \times n$ 行列を n 次の**単位行列**といい、記号 E_n で表すことにする。例えば、3 次の単位行列は

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

$n \times n$ 行列 A に対して、$n \times n$ 行列 B が $AB = BA = E_n$ をみたすとき、B を A の**逆行列**といい、記号 A^{-1} で表す。$|A||B| = |AB| = |E_n| = 1$ だから、逆行列を持つ行列は正則行列である。逆に、正則行列に対してはその逆行列を作ることができる。例えば、3×3 正則行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ について、A_{ij} を行列 A の (i, j) 成分を 1 に取り換え、他の i 行成分と j 列成分はすべて 0 と取り換えた 3×3 行列とすれば、逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} |A_{11}| & |A_{21}| & |A_{31}| \\ |A_{12}| & |A_{22}| & |A_{32}| \\ |A_{13}| & |A_{23}| & |A_{33}| \end{pmatrix}$$

である。この逆行列の公式については成分の並び方に注意が必要である。$n \times n$ 正則行列の逆行列も同様につくることができる。例えば、2×2 行列の逆行列は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。ただし、$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ のときである。

4　連立１次方程式（未知数の個数と等式の個数が一致する場合）

２つの未知数 $x_1,\ x_2$ をもち２つの等式からなる連立１次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{cases}$$

は行列を用いて

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

と表せる。左辺の 2×2 行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ が正則行列の場合、逆行列が存在するので、上の等式にその逆行列を左からかけると、解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

として求めることができる。この逆行列を具体的に書いて計算すると、解の公式

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

を得る。行列式を用いたこの解の公式がなりたつのは、分母の行列式の値が 0 でない場合である。この公式を**クラメルの公式**という。同様のことが、未知数 n 個、等式 n 個の連立１次方程式についてなりたつ。

5　数ベクトルの和と定数倍

n 個の実数を縦に並べて両側を括弧で挟んだもの、すなわち、実数を成分とする $n \times 1$ 行列を n **次元数ベクトル**という。２つの n 次元数ベクトルの和は

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

と各成分を加えてできる n 次元数ベクトルであり、c を実数とするとき、n 次元数ベクトルの c 倍は

$$c\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ \vdots \\ ca_n \end{pmatrix}$$

と各成分を c 倍してできる n 次元数ベクトルである。

n 次元数ベクトルを記号 $\boldsymbol{a}$ と太文字で表すことにする。また、n 次元数ベクトルの全体の集合を記号 R^n で表す。

$k+1$ 個の n 次元数ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}$ について、$\boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k$ をみたす k 個の実数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ が存在するとき、$\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ の **1 次結合**で表されるという。例えば、2 次元数ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が 2 つの 2 次元数ベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ の 1 次結合で表せるかどうかを調べるためには、ベクトルについての方程式 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ に解があるかどうかを調べればよい。このベクトルについての方程式を成分で表すと $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 & = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 & = 2 \end{cases}$ という連立 1 次方程式になるから、この連立 1 次方程式が解をもつかどうかを調べると良い。ベクトルの次元が高く、ベクトルの個数が多いばあいについても、1 次結合として表せるかどうかは、連立 1 次方程式が解をもつかどうかであり、それは掃き出し法と呼ばれる方法で調べることができる。

k 個の n 次元数ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ について、これら k 個のベクトルのうちいずれか一つのベクトルが、残りの $k-1$ 個のベクトルの 1 次結合として表せるとき、**1 次従属系**であるという。$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ が 1 次従属系でないとき、**1 次独立系**という。

ベクトルについての方程式 $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_k\boldsymbol{a}_k = \mathbf{0}$ を考える。この方程式を成分を用いて表せば連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nk}x_k & = 0 \end{cases}$$

となる。右辺がすべて 0 であるこの形の連立 1 次方程式を**斉次連立 1 次方程式**という。$x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$ がこの方程式をみたすことはすぐにわかるので、**自明な**

解という。$x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_k\boldsymbol{a}_k=\boldsymbol{0}$ が自明な解のみを持つときは $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ は 1 次独立系となり、自明な解のほかに解をもつときは $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ は 1 次従属系となる。

6 部分ベクトル空間と次元

n 次元数ベクトルの集合 V が和と定数倍について閉じているとき、すなわち、$\boldsymbol{x}\in V$ かつ $\boldsymbol{y}\in V$ ならば、$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in V$ がなりたち、$\boldsymbol{x}\in V$ かつ $c\in \mathrm{R}$ ならば、$c\boldsymbol{x}\in V$ がなりたつとき、**部分ベクトル空間**という。n 次元ベクトルの全体 R^n および零ベクトルだけからなる集合 $\{\boldsymbol{0}\}$ も部分ベクトル空間である。k 個の n 次元数ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ の 1 次結合として表すことができるベクトル全体の集合を記号 $\mathrm{L}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k)$ で表せば、$\mathrm{L}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k)$ は部分ベクトル空間になるので、$\mathrm{L}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k)$ を $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ が**張る部分ベクトル空間**という。

部分ベクトル空間 V に含まれる 1 次独立系の最大個数を V の**次元**といい、V の次元を記号 $\dim(V)$ で表す。$\dim(\mathrm{R}^n)=n$ であり、$\dim(\{\boldsymbol{0}\})=0$ である。$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ が張る部分ベクトル空間 $\mathrm{L}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k)$ の次元は、k 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ のなかから取り出してできる 1 次独立系のベクトルの最大個数である。

7 行列のランク

$m\times n$ 行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ の h 次の**小行列式**とは、A の h 個の行と列を定め、定めた行と列の両方に含まれる成分からできる h 次の行列式のことである。A の小行列式でその値が 0 でないものの次数の最大値を A の**ランク**といい、A のランクを記号 $\mathrm{rank}A$ で表す。A のそれぞれの列から定まる m 個の n 次元数ベクトルを $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ とするとき、

$$\mathrm{rank}A=\dim(\mathrm{L}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k))$$

がなりたつ。

$n\times n$ 正方行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ については、次の 4 つの命題は同

値である。

(1) $\mathrm{rank}A = n$

(2) A は正則行列である。

(3) $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ とするとき、$\dim(\mathrm{L}(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)) = n$

(4) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ の解は自明な解だけである。

8 線形写像

固定した $m \times n$ 実行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ と n 次元変数ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ に対して、$T\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$ でもって T を定めると、T は R^n から R^m への写像であり、線型性

$$\begin{array}{lll} (1) & \boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n, \boldsymbol{y} \in \mathrm{R}^n, \text{とするとき、} & T(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = T\boldsymbol{x} + T\boldsymbol{y} \\ (2) & \boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n, c \in \mathrm{R}, \text{とするとき、} & T(c\boldsymbol{x}) = cT\boldsymbol{x} \end{array}$$

をみたすので、T を $m \times n$ 実行列 A が定める R^n から R^m への**線形写像**という。逆に、T を R^n から R^m への線形性をみたす写像とすると、$T\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$ をみたす、$m \times n$ 実行列 A が定まる。

T を R^n から R^m への線形写像とするとき、R^m の部分集合 $\{\, T\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n \,\}$ を T の**像**といい、記号 $Im(T)$ で表す。$Im(T)$ は R^m の部分ベクトル空間であり、ベクトルを並べてできる行列 $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}$ から定まる線形写像 T の場合、$Im(T) = \mathrm{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$ がなりたつ。

T を R^n から R^m への線形写像とするとき、R^n の部分集合 $\{\, \boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n \mid T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \,\}$ を T の**核**といい、記号 $Ker(T)$ で表す。T の核 $Ker(T)$ は R^n の部分ベクトル空間である。

R^n から R^m への線形写像 T については、$\dim(Ker(T)) + \dim(Im(T)) = n$ という**次元定理**がなりたつ。

9　連立１次方程式の解の存在と解集合

未知数が n 個、等式が m 個の連立１次方程式

$$\left\{\begin{array}{lll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 & + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right. \tag{1}$$

は、$m \times n$ 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ が定める R^n から R^m への線形写像を T とし、$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ とすると、線形写像 T についての方程式

$$T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と表せる。これが解を持つための必要十分条件は、$\boldsymbol{b} \in Im(T) = \mathrm{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ であり、したがって、

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

がなりたつことである。また、解を持つ場合、解の一つを $\boldsymbol{c}$ とすれば、解全体の集合は $\boldsymbol{c} + Ker(T)$ となる。したがって、解が一意であるのは、$Ker(T) = \{\ \boldsymbol{0}\ \}$ のときである。このように、連立１次方程式の解の存在と一意性を、線形写像の言葉によって説明できる。

10　内積とノルム

2 つの n 次元数ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ に対して、実数 $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ との**内積**といい、記号 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ で表す。また、$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ を $\boldsymbol{x}$ の**ノルム**といい、記号 $\|\boldsymbol{x}\|$ で表す。$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}, \quad \|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ がなりたっている。内積とノルムの間には**シュヴァルツの不等式** $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ がなりたつ。零ベクトルではない 2 つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ が $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ をみたすとき、$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ とは**直交**するという。

k 個の n 次元数ベクトル $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_k$ のすべてがノルム 1 で、互いに直交しているとき、**正規直交系**という。

$n \times n$ 実行列 C が $C^TC = E_n$ をみたすとき、**直交行列**という。n 個の n 次元数ベクトル $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_n$ を並べてできる $n \times n$ 行列 $C = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \cdots & \boldsymbol{c}_n \end{pmatrix}$ が直交行列であるための必要十分条件は $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_n$ が正規直交系になることである。

11　正方行列の固有値と固有ベクトル

$n \times n$ 行列 A と数 λ が方程式 $|A - \lambda E_n| = 0$ をみたすとき、λ を A の**固有値**という。実行列 A の固有値 λ が実数であるとき、$Ker(A - \lambda E_n) \neq \{\mathbf{0}\}$ となる。ここで、$Ker(A - \lambda E_n)$ は行列 $A - \lambda E_n$ が定める R^n から R^n への線型写像の核である。核 $Ker(A - \lambda E_n)$ を A の固有値 λ の**固有空間**という。固有空間は 2 次元以上のこともある。固有値 λ の固有空間に属する零ベクトルでないベクトルを A の固有値 λ の**固有ベクトル**という。固有ベクトルは方程式

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くことによって求めることができる。

12　実対称行列の対角化

$n \times n$ 行列 A が $A^T = A$ をみたすとき、**実対称行列**という。実対称行列 A に対して、$AC = C\Lambda$ をみたす直交行列 C と実対角行列 Λ をつくることができる。これを実対称行列の**直交行列による実対角化**という。ここで実対角行列とは、対角線成分以外の成分はすべて 0 である実行列である。直交行列 C のつくりかたは、実対称行列の固有値はすべて実数になるので、各固有空間の正規直交系をとって並べればよい。実対角行列 Λ のつくりかたは、固有ベクトルの順番にその固有値を並べればよい。

$AC = C\Lambda$、および、直交行列の性質 $C^T C = E_n$ を用いると、すべての自然数 k について、$A^k = C^T \Lambda^k C$ がなりたつので、実対称行列 A の累乗 A^k が計算できる。

$p.q, r$ を実数とするとき、$px^2 + 2qxy + ry^2$ を２変数 x, y の**実２次形式**という。この実２次形式は $px^2 + 2qxy + ry^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と実対称行列を用いて表すことができる。直交行列 $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix} C = C \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ と実対角化できたとすると、直交行列による変数変換 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって、

$$px^2 + 2qxy + ry^2 = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$$

が得られる。最右辺は性質がわかりやすい実２次形式である。変数の個数が多い実２次形式についても、直交変換によってこのような性質がわかりやすい実２次形式で表せる。

多変数関数の極値において、関数は定数と２階の偏微係数からできる実２次形式の和で近似できるので、直交変換によって性質のわかりやすい実２次形式になおすと、その係数（固有値）の符号をみることによって、極値の性質（極大値か、極小値か、どちらでもないか）がわかる。このほかにも、実対称行列の直交行列による対角化の応用としては、２次曲面の分類や統計学の分散共分散行列の分析とそれによる主因子分析や因子分析などがある。

13　エルミート行列とユニタリー行列

実正方行列の固有値は実数であるとは限らず、複素数のこともある。したがって、固有ベクトルとして複素数を成分とするベクトルを考えることが必要になる。n 個の複素数を縦に並べて両側を括弧で挟んだものを n 次元**複素ベクトル**という。複素ベクトルの和や複素ベクトルの複素数倍による複素ベクトル空間が考える。また、２つの n 次元複素ベクトル $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ に対して、複素数 $z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} + \cdots + z_n\overline{w_n}$ を $\boldsymbol{z}$ と $\boldsymbol{w}$ との**複素内積**といい、記号 $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w})$ で表す。ここで、$\overline{w}$ は w の共役複素数である。複素内積には

$$c(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) = (c\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{z}, \bar{c}\boldsymbol{w})$$

$$\overline{(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w})} = (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z})$$

などの性質がある。

$n \times n$ 複素行列 A のすべての成分の共役複素数をとって転置してできる $n \times n$ 行列を記号 A^* で表し、A の**共役転置行列**という。$n \times n$ 複素行列 H が $H^* = H$ をみたすとき、**エルミート行列**という。$n \times n$ 複素行列 U が $U^*U = E_n$ をみたすとき、**ユニタリー行列**という。エルミート行列の固有値はすべて実数であり、エルミート行列 H に対して、$HU = U\Lambda$ をみたすユニタリー行列 U と実対角行列 Λ が存在する。

14　ジョルダン標準形

正方行列

$$\begin{pmatrix} \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \cdots$$

の固有値はすべて λ であるので、これらの行列を固有値 λ のジョルダン細胞といい、それぞれ順に、長さ 1、長さ 2、長さ 3、長さ 4、$\cdots$ と呼ぶことにする。また、さまざまな固有値のさまざまな長さのジョルダン細胞（重複を許す）がそれらの固有値が対角成分となるように並び、それ以外の成分はすべて 0 である正方行列

を**ジョルダン行列**と呼ぶことにする。**ジョルダン標準化可能定理**とは、$n \times n$ 行列 A に対して、$AS = SJ$ がなりたつような $n \times n$ 正則行列 S と $n \times n$ ジョルダン行列 J が存在するというものである。

$n \times n$ 行列 A について k 個のベクトルの列 $\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_{k-1}, \cdots, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1$ が、

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{a}_{k-1}, (A - \lambda E)\boldsymbol{a}_{k-1} = \boldsymbol{a}_{k-2}, \cdots, (A - \lambda E)\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_1, (A - \lambda E)\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{0}$$

をみたすとき、A の固有値 λ, 長さ k のジョルダン系列といい、$\boldsymbol{a}_k$ をその頭、$\boldsymbol{a}_1$ をその足と呼ぶことにする。この関係を行列で書き表すと、

$$A \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

と、固有値 λ、長さ k のジョルダン細胞で表せる。頭は $(A - \lambda E_n)^k \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$ をみたしていることを考慮して、正方行列 A の各固有値について、長いジョルダン系列から順次、それらの足が 1 次独立系になるように取り出して並べれば、ジョルダン標準形を作ることができる。ジョルダン標準形可能定理を用いると、正方行列 A の累乗 $A^k = S^{-1} J^k S$ が計算できる。線形微分方程式もジョルダン標準形を用いて解くことができる。

$\boxed{\text{微分積分}}$

15　実数

実数とは小数を用いて表せる数である。そのうち、2 つの整数の割算で表せる数である**有理数**は、有限の桁の小数で表せるか、何桁かの数が無限に繰り返す無限循環小数になる。それら以外の実数が**無理数**である。実数の間には和と積が考えられ、絶対値がある。絶対値についての不等式

$$|x + y| \leqq |x| + |y|$$

を三角不等式という。

実数列 a_n が実数 a に近づくとは、n を大きくしていくとき、距離 $|a_n - a|$ が 0 に近づくことである。

２つの実数 $a, b \quad (a < b)$ について、**開区間** (a, b)、**閉区間** $[a, b]$、**半開区間** $(a, b]$ と $[a, b)$ はそれぞれ次の実数の集合である。

$$(a, b) = \{ \quad x \quad | \quad a < x < b \quad \}$$

$$[a, b] = \{ \quad x \quad | \quad a \leqq x \leqq b \quad \}$$

$$(a, b] = \{ \quad x \quad | \quad a < x \leqq b \quad \}$$

$$[a, b) = \{ \quad x \quad | \quad a \leqq x < b \quad \}$$

実数 k が実数の集合 A に属するすべての実数 x について、$x \leqq k$ がなりたつとき、k は A の**上界**であるという。例えば、半開区間 $[1, 2)$ についての上界の全体は集合

$$[2, \infty) = \{ \quad x \quad | \quad 2 \leqq x \quad \}$$

である。上界を１個でももつ集合は**上に有界**であるという。上に有界な集合 A について、その上界全体の集合の最小値を集合 A の**上限**といい、記号 $\sup A$ で表す。したがって、半開区間 $[1, 2)$ については、$\sup[1, 2) = 2$ となる。最大値を持つ集合についてはその最大値が上限と一致する。最大値が無い集合でも、上に有界でさえあれば上限は存在する。このように、上限とは最大値を持たない集合について最大値に代わりうるような役割を果たす数である。

「上に有界な実数の集合には上限が存在する」、すなわち、その集合の上界全体の集合に最小値が存在する、というのが**実数の連続性の公理**と呼ばれるものである。実数全体には隙間がないということを表すこの実数の連続性の公理は、解の存在や最大値最小値の存在など微分積分学の存在に関わる理論の基盤として度々用いられる。

下界、下に有界、下限 inf の概念も同様に考えることができ、実数の連続性の公理は、「下に有界な実数の集合には下限が存在する」という命題と同値である。そのほかにも、実数の連続性の公理と同値な命題には次のようなものがある。

- 上に有界な単調増加数列（あるいは、下に有界な単調減少数列）は極限値を持つ。

- 上にも下にも有界な数列は収束する部分列を持つ。

- **コーシー列**は極限値を持つ。コーシー列とは、n, m を限りなく大きくしたとき $|a_n - a_m|$ が 0 に近づくような数列 $\{a_n\}$ のことである。

16　複素数

x,　y を 2 つの実数とするとき、$z = x + iy$ で表せる数を**複素数**という。このとき、i を**虚数単位**といい、x を複素数 z の**実部**、y を複素数 z の**虚部**という。複素数の和と積は次により計算する。

$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

$(x_1+iy_1)\times(x_2+iy_2) = x_1x_2+ix_1y_2+ix_2y_2+i^2y_1y_2 = (x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$

つまり、積については $i^2 = -1$ と置いて計算する。複素数の和と積についても、実数の場合と同様の計算規則がなりたつ。2 乗して -1 になるのは、i と $-i$ の 2 つあり、$i = \sqrt{-1}$ とも書く。

2 次方程式には実数解を持たないものがあるが、複素数の範囲で必ず解があり、解の公式もある。さらに、3 次以上の方程式も複素数の範囲で必ず解がある。3 次方程式と 4 次方程式にも解の公式があるが、5 次以上の方程式には解の公式が無いことが証明されている。

複素数 $z = x+iy$ に対して、$\overline{z} = x-iy$ を z の**共役複素数**という。$z\overline{z} = x^2-i^2y^2 = x^2 + y^2 \geqq 0$ がなりたつ。$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ を複素数 z の**絶対値**という。

複素数 $z = x + iy$ を座標平面の点 (x, y) に対応して考える。このときの座標平面を**複素平面**という。

複素平面において原点を中心とする半径 1 の円を、複素平面の**単位円**とよぶ。t を実数とするとき複素数 e^{it} を次のように定める。$t > 0$ のときは単位円上の点 $1+0i$ から単位円上を時計の針と逆方向に長さ t だけ進んだ単位円上の点が表す複素数を e^{it} とし、$t < 0$ のときは単位円上の点 $1 + 0i$ から単位円上を時計の針と同じ方向に長さ $-t$ だけ進んだ単位円上の点が表す複素数を e^{it} とする。また、$t = 0$ のときは、$e^{0i} = 1$ とする。このとき、次がなりたつ。

$$e^{2\pi i} = 1, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{\frac{\pi}{2}i} = i, \quad e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i$$

$$e^{it_1}e^{it_2} = e^{i(t_1+t_2)}, \quad |e^{it}| = 1$$

また、複素数 $z = x + iy$ と原点を結ぶ直線と単位円との交点が表す複素数を $e^{i\theta}$ とすれば、$z = |z|e^{i\theta}$ と表せる。

17　関数

例えば $y = x^2$ によって変数 x の値を定めるごとに変数 y の値が定まる。すなわち、この等式は数から数への対応を与えている。数から数への対応を**関数**という。関数を一般に記号 $y = f(x)$ で表す。数 x に対応する数を $f(x)$ で表わしている。このとき、x を独立変数、y を従属変数、f を関数記号という。独立変数、従属変数、関数記号としてどのような文字記号を用いるかは自由である。関数を従属変数を用いないで単に $f(x)$ で表わすこともある。また、$f(x)$ は必ずしも x についての数式で表せるものでなくてもよい。関数の独立変数がとりうる数の集合を**定義域**、関数の値がとりうる数の集合を**値域**という。

関数 $f(x)$ について、変数 x を実数 a に近づけるとき、$f(x)$ が実数 A に近づくことを記号 $\lim_{x \to a} f(x) = A$ で表し、A を**極限値**という。極限値について曖昧さのない厳密な議論するとき、

「どんなに小さな正数 ϵ についても、$0 < |x - a| < \delta$ をみたす x について、$|f(x) - A| < \epsilon$ がなりたつような正数 δ がとれる」

といった $\epsilon - \delta$ **式論理**を用いることもある。また、関数の極限値を数列の極限値を利用して議論することもあり、その場合に用いるのは、

「$\lim_{x \to a} f(x) = A$ がなりたつための必要十分条件は、a に収束するようなすべての数列 a_n について、数列 $f(a_n)$ は A に収束する」

という命題である。また、変数 x を実数 a よりも大きいほうから a に近づけるとき、$f(x)$ が実数 A に近づくことを記号 $\lim_{x \to a+} f(x) = A$ で表し、A を**右極限値**という。変数 x を実数 a よりも小さいほうから a に近づけるとき、$f(x)$ が実数 A に近づくことを記号 $\lim_{x \to a-} f(x) = A$ で表し、A を**左極限値**という。右極限値を記号 $f(a+)$ で、左極限値を記号 $f(a-)$ で書くこともある。

関数 $f(x)$ の定義域内の点 a について、$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ がなりたつとき、この関数は $x = a$ において**連続**であるという。これはこの関数のグラフの曲線が $x = a$ においてつながっていることを意味する。関数 $f(x)$ が開区間 (a, b) 内のすべての点で連続であり、$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$ および $\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$ をみたすとき、この関数は**閉区間** $[a, b]$ **で連続**であるという。

閉区間 $[a,b]$ で連続な関数はこの区間の値域において最大値と最小値が存在する。これを連続な関数についての**最大値・最小値の存在定理**という。

閉区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ について、M を $f(a)$ と $f(b)$ の間の数とすると、$f(\xi)=M$ をみたす ξ が開区間 (a,b) 内に存在する。これを連続関数についての**中間値の定理**という。

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続であることを $\epsilon-\delta$ 論法を用いると、
$[a,b]$ の中のすべての x とすべての正数 ϵ について、$|x'-x|<\delta$ をみたす $[a,b]$ の中のすべての x' について、$|f(x')-f(x)|<\epsilon$ がなりたつような正数 δ が存在する。
と表せる。ここにおける正数 δ は x と ϵ に関係して定まるのであるが、この正数 δ を ϵ だけに関係するものにできるという命題
すべての正数 ϵ について、$|x'-x|<\delta$ をみたす $[a,b]$ の中のすべての x と x' について、$|f(x')-f(x)|<\epsilon$ がなりたつような正数 δ が存在する。
を実数の連続性を用いて導くことができる。この命題を**一様連続性**という。一様連続性を導くうえで閉区間であるということが重要である。一様連続性を用いて閉区間での連続関数について定積分が定まることを導くことができる。

18　三角関数と指数関数

角度を単位円の弧の長さで測る方法を**弧度法**という。弧度法を用いるとき、

$$e^{it}=\cos t+i\sin t$$

の関係がなりたつ。これは余弦関数 $\cos t$ と正弦関数 $\sin t$ の定義と考えてもよい。

$$\begin{aligned}\cos(t_1+t_2)+i\sin(t_1+t_2)&=e^{i(t_1+t_2)}\\&=e^{it_1}e^{it_2}=(\cos t_1+\sin t_1)(\cos t_2+i\sin t_2)\\&=(\cos t_1\cos t_2-\sin t_1\sin t_2)+i(\cos t_1\sin t_2+\sin t_1\cos t_2)\end{aligned}$$

より、三角関数の和の公式

$$\cos(t_1+t_2)=\cos t_1\cos t_2-\sin t_1\sin t_2$$

$$\sin(t_1+t_2)=\sin t_1\cos t_2+\cos t_1\sin t_2$$

を導くことができる。三角関数についての他の公式も e^{it} の性質から導くことができる。

n を自然数とするとき、実数 a の n 乗は a を n 回かけたものであるが、正数 a と実数 x に対して a の x 乗 a^x を考えることができる。a^x を a を底とする**指数関数**という。指数関数は性質

$$a^x > 0, \qquad a^{x_1+x_2} = a^{x_1}a^{x_2}, \qquad (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1x_2}$$

をみたす。微積分学では特に

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = 2.817\cdots$$

を底とする指数関数 e^x が重要である。

19　逆関数

関数 $y = f(x)$ の値域に属する y に対して、$f(x) = y$ をみたす定義域に属する x がただ一つ定まるとき、y から x への対応 $x = g(y)$ で表わすとする。この関数 $x = g(y)$ をもとの関数の**逆関数**という。この逆関数は変数 x, y を取り替えて、$y = g(x)$ と表わしてもよい。

関数 $y = 2x+1$ の逆関数は $x = \frac{y-1}{2}$ である。

a を 1 と異なる正数とするとき、指数関数 $y = a^x$ の逆関数を $x = \log_a y$ で表わし、a を底とする**対数関数**という。対数関数の定義域は $(0,\infty)$ であり、値域は $(-\infty,\infty)$ である。また、対数関数は性質

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y, \qquad \log_a x^y = y\log_a x$$

をみたす。

関数 $y = x^2$ の定義域を $[0,\infty)$ に制限したものの逆関数は $x = \sqrt{y}$ である。

関数 $y = x^2$ の定義域を $(-\infty,0]$ に制限したものの逆関数は $x = -\sqrt{y}$ である。

正弦関数 $y = \sin x$ の定義域を $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ に制限したものの逆関数を $x = \sin^{-1} y$ で表し、**逆正弦関数**という。逆正弦関数の定義域は $[-1,1]$ であり、値域は $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ である。

余弦関数 $y = \cos x$ の定義域を $[0,\pi]$ に制限したものの逆関数を $x = \cos^{-1} y$ で表し、**逆余弦関数**という。逆余弦関数の定義域は $[-1,1]$ であり、値域は $[0,\pi]$ である。

正接関数 $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ の定義域を $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ に制限したものの逆関数を $x = \tan^{-1} y$ で表し、**逆正接関数**という。逆正接関数の定義域は $(-\infty,\infty)$ であり、値域は $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ である。

20　導関数

関数 $f(x)$ の導関数 f' (x) を求めることを、関数を**微分**するという。なお、関数を $y = f(x)$ と従属変数 y を用いて表すときは、導関数を $\dfrac{dy}{dx}$ とも表す。関数を微分するには、主な関数の導関数の公式や、関数の和、定数倍、積、商の導関数の公式、さらには合成関数の導関数の公式を用いるとよい。まず、主な関数の導関数の公式は

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \qquad (e^x)' = e^x, \qquad (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad (\sin x)' = \cos x, \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad (\cos^{-1} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad (\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

などであり、関数の和、定数倍、積、商の導関数の公式は

$$(cf(x) + dg(x))' = cf'(x) + dg'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

$$(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)g(x) - g(x)g'(x)}{f(x)^2}$$

である。また、関数 $y = f(x)$ と関数 $x = g(t)$ の**合成関数** $y = f(g(t))$ の導関数は

$$(f(g(t))' = f'(g(t))g'(t), \qquad \text{あるいは、} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

によって求めることができる。さらに、関数 $y = f(x)$ に逆関数が存在するとき、逆関数を $x = g(y)$ で表すと、$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$ によって逆関数の導関数を計算できる。

導関数 $f'(x)$ の $x = a$ での値 $f'(a)$ は、x が a に近づくときに $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ が近づく値である。したがって、すべての関数について、導関数が定まるわけではない。$f'(a)$ が定まるとき関数 $f(x)$ は $x = a$ で**微分可能**であるといい、$f'(a)$ を関数 $y = f(x)$ の $x = a$ における**微分係数**という。$\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ は独立変数が a から x まで変化したときの関数 $f(x)$ の値の変化の割合だから、$f'(a)$ は関数 $f(x)$ の $x = a$ における**瞬間変化率**である。関数 $y = f(x)$ のグラフを考えると、瞬間変化率 $f'(a)$ は点 $(a, f(a))$ における接線の傾きである。つまり、$x = a$ で微分可能であるとは、点 $(a, f(a))$ において接線が定まるということである。接線の方程式は $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ となる。

導関数の値 $f'(a)$ は関数 $y = f(x)$ の $x = a$ における変化率だから、$f'(a) > 0$ ならば関数は $x = a$ で増加、$f'(a) < 0$ ならば関数は $x = a$ で減少している。すなわ

ち、導関数の値の正負を見ることによって、関数の増加減少の変化を調べることができる。

関数 $f(x)$ が開区間 (a,b) のすべての点で微分可能であり、閉区間 $[a,b]$ で連続であれば、$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$ をみたす点 ξ が開区間 (a,b) の中に存在する。これを**平均値の定理**という。平均値の定理は微積分学において度々用いられる。平均値の定理は $f(b)=f(a)+f'(\xi)(b-a)$ とも表わすことができる。

商の形をした関数の極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ において、$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$、あるいは、$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty$ となるものを、**不定形の極限**という。不定形の極限において、$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するならば、$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ がなりたつ。これは $a=\infty$ のときもなりたつ。これを**ロピタルの定理**という。ロピタルの定理は平均値の定理を用いて証明できる。

関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ をさらに微分してできる関数を記号 $f''(x)$ あるいは記号 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ で表し、$y=f(x)$ の**２次導関数**という。３次、４次、$\cdots$ といったさらに次数の高い導関数も考える。連続な導関数をもつ関数は C^1 **級**であるといい、連続な２次導関数をもつ関数は C^2 **級**であるという。

$x=a$ の近くで関数 $f(x)$ が C^2 級であれば

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a+\theta(x-a))(x-a)^2$$

をみたす θ が開区間 $(0,1)$ 内に存在する。ここで $a+\theta(x-a)$ は a と x の間の数を表している。

このことは、$x=a$ の近くで関数 $y=f(x)$ が２次関数 $y=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$ で近似できることを意味するので、$f'(a)=0, f''(a)>0$ ならば、関数 $y=f(x)$ は $x=a$ で極小値 $f(a)$ を、$f'(a)=0, f''(a)<0$ ならば、関数 $y=f(x)$ は $x=a$ で極大値 $f(a)$ をとる。$x=a$ で**極小値**（あるいは**極大値**）をとるとは関数を $x=a$ の近くに制限して考えると最小値（あるいは最大値）をとるということである。

$x=a$ の近くで関数 $f(x)$ が C^n 級であれば、

$$\begin{aligned}f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}\\+\frac{f^n(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n\end{aligned}$$

をみたす $0<\theta<1$ が存在する。これを**テーラーの定理**という。

テーラーの定理を関数 $f(x)=e^x$ に適用すれば、$f^{(n)}(x)=e^x$ だから、すべての自然数 n について、

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta x}x^n}{n!}$$

をみたす $0<\theta<1$ が存在する。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\theta x}x^n}{n!}=0$ がなりたつから、

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

がすべての実数 x についてなりたつ。

21　偏導関数

２変数関数 $w=f(x,y)$ の変数 y を定数と考えて、x で微分したときの導関数を記号 $f_x(x,y)$、あるいは、$\dfrac{\partial w}{\partial x}$ で表し、x についての**偏導関数**という。y についての偏導関数 $f_y(x,y)$, $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ も同様に考える。関数の偏導関数を計算することを**偏微分**するという。

２変数関数 $w=f(x,y)$ と２つの１変数関数 $x=g(t), y=h(t)$ の合成関数 $w=f(g(t),h(t))$ は１変数関数であり、その導関数は

$$(f(g(t),h(t)))' = f_x(g(t),h(t))g'(t) + f_y(g(t),h(t))h'(t)$$

$$\text{あるいは、}\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

により、計算できる。ただし、$w=f(x,y)$ が偏微分可能で、$x=g(t), y=h(t)$ がともに微分可能であっても、合成関数 $w=f(g(t),h(t))$ は必ずしも微分可能にならない。偏導関数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ が連続関数で、$x=g(t), y=h(t)$ がともに微分可能ならば、合成関数 $w=f(g(t),h(t))$ は微分可能になり、上の公式がなりたつ。このことは多変数関数独特の事情である。

２変数関数が偏微分可能であり、偏導関数がすべて連続関数であるとき、C^1 **級**という。

C^1 級の２変数関数 $w=f(x,y)$ と２つの偏微分可能な２変数関数 $x=g(u,v), y=h(u,v)$ との合成関数 $w=f(g(u,v),h(u,v))$ は偏微分可能であり、

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

がなりたつ。

２変数関数 $w = f(x, y)$ の偏導関数 $f_x(x, y)$ の x に関する偏導関数を記号 $f_{xx}(x, y)$ あるいは、$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ で、y に関する偏導関数を記号 $f_{xy}(x, y)$、あるいは、$\dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$ で表し、偏導関数 $f_y(x, y)$ の x に関する偏導関数を記号 $f_{yx}(x, y)$、あるいは、$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ で、y に関する偏導関数を記号 $f_{yy}(x, y)$、あるいは、$\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ で表す。これらを**２次偏導関数**という。

２変数関数が２回偏微分可能であり、すべての２次偏導関数が連続関数であるとき C^2 **級**であるという。２変数関数 $f(x, y)$ が C^2 級であるときは、$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ がなりたつ、すなわち、偏微分する順序によらない。

関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) の近傍で C^2 級ならば、点 (a, b) の近傍で

$$
\begin{aligned}
f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \\
&+ \frac{1}{2}\{f_{xx}(a + \theta(x - a), b + \theta(y - b))(x - a)^2 \\
&\quad + 2f_{xy}(a + \theta(x - a), b + \theta(y - b))(x - a)(y - a) \\
&\quad + f_{yy}(a + \theta(x - a), b + \theta(y - b))(y - b)^2\}
\end{aligned}
$$

をみたす θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する。

C^2 級の２変数関数 $f(x, y)$ が $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ をみたすとき、$(x, y) = (a, b)$ の近くで関数は $f(a,b)+\frac{1}{2}(f_{xx}(a,b)(x-a)^2+2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+f_{yy}(a,b)(y-b)^2)$ で近似でき、最後の項は実２次形式だから、2×2 実対称行列 $\begin{pmatrix} f_{xy}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{pmatrix}$ の固有値が２つとも正であれば、関数は $(x, y) = (a, b)$ で極小値をとり、固有値が２つとも負であれば、関数は $(x, y) = (a, b)$ で極大値をとる。２変数以上の多変数関数についても、２次の偏微分係数からできる実対称行列の固有値の符号で極大、極小の判別ができる。

22 陰関数

点 (a, b) の近くで定義された C^1 級の２変数関数 $F(x, y)$ が $F(a, b) = 0$ および、$F_y(a, b) \neq 0$ をみたすならば、$x = a$ の近くで定義された C^1 級の関数 $y = f(x)$ で $F(x, f(x)) = 0$ および、$f(a) = b$ をみたすものが存在する。しかも、ただ一つであ

る。この関数 $y = f(x)$ を $F(x,y) = 0$ の**陰関数**という。地図において平地では等高線が決まらないことに対応しているのが、条件 $F_y(a,b) \neq 0$ である。

点 (a,b,c) の近くで定義された C^1 級の 3 変数関数 $F(x,y,z)$ が $F(a,b,c) = 0$ および、$F_z(a,b,c) \neq 0$ をみたすならば、(a,b) の近くで定義された C^1 級の 2 変数関数 $z = f(x,y)$ で $F(x,y,f(x,y)) = 0$ および、$f(a,b) = c$ をみたすものが存在する。しかも、ただ一つである。この関数 $z = f(x,y)$ を $F(x,y,z) = 0$ の陰関数という。

これらを**陰関数の存在定理**という。もっと変数が多い場合や複数の方程式の場合の陰関数の存在定理もある。陰関数を考える必要があるときにこの定理を用いる。

23　ラグランジュの未定乗数法

C^1 級の関数 $F(x,y)$ が、別の C^1 級の関数 $G(x,y)$ で決まる集合 $\{\,(x,y) \mid G(x,y) = 0\,\}$ に制限したとき、この集合に属する点 (a,b) で極値をとるならば、3 変数の関数 $H(x,y,\lambda) = F(x,y) - \lambda G(x,y)$ について、

$$H_x(a,b,\lambda) = H_y(a,b,\lambda) = H_\lambda(a,b,\lambda) = 0$$

をみたす実数 λ が存在する。この定理は、**条件付きの極値**であるための必要条件を、変数を増やした 3 変数の関数の極値として与えている。変数の個数を増やし、条件を与える関数の個数を増やした定理もある。この定理を用いて極値を求める方法を、**ラグランジュの未定乗数法**という。

24　定積分

閉区間 $[a,b]$ で定義された有界な関数 $f(x)$ を考える。区間 $[a,b]$ の中に $n+1$ 個の点をとり、それを $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$ とすると、区間 $[a,b]$ は n 個の小区間 $[x_{i-1}, x_i],\ i = 1, 2, \cdots, n$ に分割されるので、この**分割**を記号 Δ で表す。i 番目の小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ における関数 $f(x)$ の上限を M_i、下限を m_i として、

$$S(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}), \quad s(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

と置く。さらに、分割 Δ を動かしたときの下限と上限を

$$S = \inf_{\Delta} S(\Delta), \quad s = \sup_{\Delta} s(\Delta)$$

と置くと、$s \leqq S$ がなりたつ。特に $s = S$ がなりたつとき、関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で**積分可能**であるという。また、この一致した値を記号 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ で表し、関数 $f(x)$ の閉区間 $[a,b]$ での**定積分**という。

閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 $f(x)$ は積分可能であり、$F(t) = \displaystyle\int_a^t f(x)dx$ と置くと、$F'(t) = f(t)$ がなりたつ。積分して微分すれば元の関数が得られるという微分と積分の関係を示している。このことを、**微積分学の基本定理**という。微積分学の基本定理は、$\displaystyle\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$ とも表すことができ、定積分は不定積分によって計算できることを示している。したがって、定積分は不定積分のさまざまな性質を用いて計算する。なかでも、関数 $x = g(t)$ が $g(\alpha) = a, g(\beta) = b$ をみたせば

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

がなりたつという**置換積分の公式**が有用である。

25　広義積分

例えば、$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ といった積分を考える必要も起こるが、これは有限区間で定義した定積分から外れている。そこで、

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{1}{x}dx = \lim_{M\to\infty} \log x\Big|_1^M = \lim_{M\to\infty}(\log M - 0) = \infty$$

という具合に、積分区間 $[1, M]$ に制限し、次に、M を限りなく大きくしたものとして考える。

例えば、$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ は被積分関数 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $(0 < x \leqq 1)$ が有界関数でないから、定積分の定義から外れている。そこで、

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\epsilon\to 0+} 2\sqrt{x}\Big|_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0+}(2 - 2\sqrt{\epsilon}) = 2$$

という具合に、積分区間を $[\epsilon, 1]$ $(\epsilon > 0)$ に制限し、次に、ϵ を 0 に近づけたものとして考える。このように、本来、有限区間上の有界な関数についての定積分を拡張して考えた積分を**広義積分**という。

26　二重積分

閉区間 $[a,b]$ で定義された２つの連続な関数 $g(x), h(x)$ は、$c \leqq g(x) < h(x) \leqq d, \quad a \leqq x \leqq b$ をみたすものとする。このとき、座標平面の長方形集合 $[a,b]\times[c,d]$ の部分集合である

$$D = \{ (x,y) \mid a \leqq x \leqq b,\ g(x) \leqq y \leqq h(x) \}$$

を $g(x)$ と $h(x)$ で挟まれた**縦線型集合**という。縦線型集合 D で定義された有界な関数を $f(x,y)$ を考える。

区間 $[a,b]$ の中に $n+1$ 個の点を、区間 $[c,d]$ の中に $m+1$ 個の点をとり、それぞれ $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b,\ c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{j-1} < y_j < \cdots = y_m = d$ とすると、長方形集合 $[a,b]\times[c,d]$ は nm 個の小長方形集合 $[x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j],\ i = 1, 2, \cdots, n\ j = 1, 2, \cdots, m$ に**分割**されるので, この分割を記号 Δ で表す。

(i,j) 番目の小長方形集合と D との共通集合 $[x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j]\cap D$ における関数 $f(x,y)$ の上限を M_{ij}、下限を m_{ij} とする。なお、$[x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j]\cap D$ が空集合のときは $M_{ij} = m_{ij} = 0$ とする。

$$S(\Delta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}), \quad s(\Delta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

と置く。さらに、分割 Δ を動かしたときの下限と上限を

$$S = \inf_{\Delta} S(\Delta), \quad s = \sup_{\Delta} s(\Delta)$$

と置くと、$s \leqq S$ がなりたつ。特に $s = S$ がなりたつとき、関数 $f(x,y)$ は D で**2重積分可能**であるという。また、この一致した値を記号 $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ で表し、関数 $f(x,y)$ の D での**2重積分**という。

２つの連続関数 $g(x), h(x)$ で挟まれた縦線型集合 D 上で定義された連続関数 $f(x,y)$ は２重積分可能であり、２重積分は

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

により、つまり、まず x を固定して y について定積分して得られる x についての関数を、次に x について定積分するという**累次積分**によって求めることができる。

２重積分についての**置換積分**については、$x = g(u,v), y = h(u,v)$ によって (u,v) 平面の領域 E が (x,y) 平面の領域 D に１対１に写像されるとき、

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(g(u,v), h(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$$

がなりたつ。ここで $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を x, y の u, v に関する**ヤコビアン**という。

ここでは簡単のために 2 重積分について説明したが、3 重積分、4 重積分、… 、n 重積分も考えることができて、同様のことが言える。

無限級数

27 無限級数

実数あるいは複素数の無限個の和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ を**無限級数**という。無限級数は和を表す記号シグマ $\sum$ を用いて、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ とも表す。第 n 項までの和を $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とするとき、数列 s_n が収束するとき、無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**収束**するという。

28 正項級数と交項級数

各項がすべて正の値をとる無限級数を**正項級数**という。正項級数は第 n 項までの和 $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ が単調増大数列になるので、s_n が上に有界であるとき収束し、上に有界でないときは発散する。たとえば、

r を正数とするとき、正項級数 $1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} + \cdots$ は $0 < r < 1$ のとき $\frac{1}{1-r}$ に収束し、$r \geqq 1$ のとき発散する。

s を正数とするとき、正項級数 $1 + \dfrac{1}{2^s} + \dfrac{1}{3^s} + \cdots + \dfrac{1}{n^s} + \cdots$ は $s > 1$ のとき収束し、$s \leqq 1$ のとき発散する。

正項級数が収束するか、発散するかを判定する方法としては、収束するか発散するかがわかっている正項級数と比較する方法や、$f(n) = a_n$ をみたす関数 $f(x)$

の積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ の値が有限になるかどうかでみる方法のほかに、次のようなものもある。

正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ において、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$ であるとき、$r<1$ ならば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束し、$r>1$ ならば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。

正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ において、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=r$ であるとき、$r<1$ ならば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束し、$r>1$ ならば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。

$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ はすべて正数とするとき、無限級数 $a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{n-1}a_n+\cdots$ を**交項級数**と言う。$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ をみたす単調減少数列であるとき、交項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ は収束する。

各項の絶対値をとった無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束するならば、もとの無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**収束**するので、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束するような無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**絶対収束**するという。

29　べき級数

z を変数とする無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ を**べき級数**という。このべき級数は、$R=1/\displaystyle\lim_{k\to\infty}\sup_{k\leqq n<\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$ と置くとき、$|z-z_0|<R$ をみたす z で収束し、$|z-z_0|>R$ をみたす z では収束しないので、$\{\, z \mid |z-z_0|<R \,\}$ をこのべき級数の**収束円**、R を**収束半径**という。

$\boxed{\text{微分方程式}}$

30　１階の微分方程式

$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ という形をした**変数分離形**微分方程式は、$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ と変数を分離して、両辺の不定積分 $\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx$ を計算することによって解を得ることができる。

$y' = f(\frac{y}{x})$ という形をした**同次形**微分方程式は $u = \frac{y}{x}$ と変数変換すると、$u' = \frac{1}{x}(f(u) - u)$ と変数分離形になるので、解を求めることができる。

$y' + P(x)y = Q(x)$ という形をした**１階線形微分方程式**は解の公式

$$y = e^{-\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C)$$

を用いて解ける。

$y' + P(x)y = Q(x)y^n$ という形をした**ベルヌーイの微分方程式**は、$z = y^{1-n}$ と変数変換すると、$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$ と１階線形微分方程式になるので、解ける。

31　２階の微分方程式

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ という形をした**同次形２階線形微分方程式**の２つの解 $y_1(x), y_2(x)$ が、$W(y_1(x), y_2(x)) = y_1(x)y_2(x)' - y_1'(x)y_2(x) \neq 0$ をみたすならば、一般解は $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ と表せる。$W(y_1(x), y_2(x))$ を**ロンスキー行列式**という。

$y'' + Py' + Qy = 0 \quad (P, Q$ は実数$)$ という形をした同次形の**定数係数２階線形微分方程式**の解については、この微分方程式の**特性方程式**と呼ばれる２次方程式 $\alpha^2 + P\alpha + Q = 0$ の解が α_1, α_2 であるとき、$y = C_1e^{\alpha_1 x} + C_2e^{\alpha_2 x}$ $(C_1, C_2$は定数$)$ が一般解であるので、

1. 特性方程式が相異なる２つの実数解 a_1, a_2 をもつときは、$y = C_1e^{a_1x} + C_2e^{a_2x}$ が一般解である。

2. 特性方程式が重解 a をもつときは、$y = e^{ax}(C_1x + C_2)$ が一般解である。

3. 特性方程式が複素数解 $a \pm ib$ をもつときは、$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$ が一般解である。

非同次形の２階線形微分方程式 $y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x)$ については、$y_1(x), y_2(x)$ を $W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0$ をみたす同次形方程式 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ の解とするとき、

$$c_1(x) = -\int \frac{R(x)y_2(x)}{W(y_1(x), y_2(x))}dx + C_1, \quad c_2(x) = \int \frac{R(x)y_1(x)}{W(y_1(x), y_2(x))}dx + C_2$$

と置けば、$y = c_1(x) + c_2(x)$ が一般解である。

32 微分方程式の解の存在と一意性

微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ について、実数値関数 $f(x, y)$ が $(x, y) = (a, b)$ の近くで連続で、$|f(x, y) - f(x, z)| \leqq L|y - z|$ をみたす正数 L が存在する（これを**リプシッツ条件**という）ならば、$y(a) = b$ みたす解 $y(x)$ が存在し、一通りである。これを**解の存在と一意性定理**という。解の存在と一意性がわかっているならば、それを前提とした議論を進めることができる。また、コンピュータなどで数値解を求めることができる。なお、この存在と一意性定理は連立微分方程式の場合にも拡張できる。

ベクトル解析

33 平面曲線

座標平面の**曲線**は一般に２つの関数 $x(t), y(t)$ を用いて、$C : x = x(t), y = y(t) \ (\alpha \leqq t \leqq \beta)$ として与えられる。このとき、$(x(\alpha), y(\alpha)), (x(\beta), y(\beta))$ をそれぞれこの曲線 C の**始点**、**終点**という。なお、始点と終点が一致する曲線を**閉曲線**といい、途中で交わらない閉曲線を**単純閉曲線**という。

$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ と置くとき、$\boldsymbol{r}'(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$ をこの曲線上の点 $(x(t_0), y(t_0))$ における**接ベクトル**という。この**曲線の長さ**は $\displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$ となるので、$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$ を**線素**という。

34　グリーンの定理

２つの２変数連続関数 $P(x,y), Q(x,y)$ でできる $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ を**１次微分形式**という。１次微分形式 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ の曲線 $C : x = x(t), y = y(t)$ $(\alpha \leqq t \leqq \beta)$ に沿っての積分を

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta (P(x(t),y(t))\frac{dx}{dt}(t) + Q(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}(t))dt$$

で定義する。このとき、C^1 級の関数 $P(x,y), Q(x,y)$ と反時計回りに回る単純閉曲線 C で囲まれた領域 D について

$$\int\int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

がなりたつ。これを**グリーンの定理**という。グリーンの定理は、重積分の値がその積分領域をとり囲む曲線の線積分に一致するというものであり、定積分の値は両端の関数の値の差に等しいという微積分学の基本定理 $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$ の２次元版である。

35　外積ベクトル

２つの３次元数ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対して定まる３次元数ベクトル $\begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$ を記号 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ で表し、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**外積ベクトル**という。この外積ベクトルは、３つの３次元数ベクトル $\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と３次の行列式を用いて、さらに２次の行列式を用いて、

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \boldsymbol{i} \\ a_2 & b_2 & \boldsymbol{j} \\ a_3 & b_3 & \boldsymbol{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}$$

と表せる。外積ベクトル $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ の両方に直交するベクトルであり、そのノルムは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を両辺とする平行四辺形の面積に等しい。

36　曲面

座標空間の**曲面**は一般に 3 つの 2 変数関数 $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ を用いて

$$S : \begin{cases} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \qquad ((u,v) \in D) \\ z &= z(u,v) \end{cases}$$

で表すことができる。このとき、$v = v_0$ を固定して得られる 1 変数 u の 3 つの関数で得られる曲線を u 曲線といい、$u = u_0$ を固定して得られる 1 変数 v の 3 つの関数で得られる曲線を v 曲線とう。曲面上の点 $(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$ における u 曲線の接ベクトル $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0) \end{pmatrix}$ と v 曲線の接ベクトル $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0) \end{pmatrix}$ とが張る平面をこの点における**接平面**といい、これら 2 つの接ベクトルの外積ベクトルをこの点における**法線ベクトル**という。また、法線ベクトルをそのノルムで割ってノルム 1 にしたベクトルを**単位法線ベクトル**といい、記号 $\boldsymbol{n}$ で表す。

法線ベクトルのノルムを $J(u,v)$ で表すと、

$$J(u,v) = \sqrt{(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v})^2 + (\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v})^2 + (\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v})^2}$$

となり、曲面 S の面積は $\displaystyle\iint_D J(u,v)dudv$ で与えられるので、$dS = J(u,v)dudv$ を**面素**という。

37　ベクトル場

座標空間の各点 (x,y,z) に数ベクトル $\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} W_x(x,y,z) \\ W_y(x,y,z) \\ W_z(x,y,z) \end{pmatrix}$ が与えられているとき、$\boldsymbol{W}$ を**ベクトル場**という。なお、ここで用いている記号 W_x などは、x についての偏導関数ではなく、ベクトル場の x 成分を意味する。このベクトル場に対して、次で与えられる $\mathrm{div}\, \boldsymbol{W}$ および $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{W}$ をそれぞれベクトル場 $\boldsymbol{W}$ の**発散**、**回転**という。

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{W} = \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z}, \qquad \mathrm{rot}\, \boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} \frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial W_y}{\partial z} \\ \frac{\partial W_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x} \\ \frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

発散および回転はナブラ記号 $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ および内積とベクトル積の記号を用いて形式的に

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{W} = \nabla \cdot \boldsymbol{W}, \qquad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{W} = \nabla \times \boldsymbol{W}$$

と表すことができる。ここで $\nabla \cdot \boldsymbol{W}$ の $\cdot$ は内積を表す。粗く言えば、発散はベクトル場への湧き出し・吸い込みの大きさを表し、回転はベクトル場が運動を変化させる方向と大きさを表すものである。

38　ガウスの定理とストークスの定理

ベクトル場 $\boldsymbol{W}$ と、閉曲面 S で囲まれた領域 V について

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{W} dxdydz = \iint_S \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

がなりたつ。ここで、$\boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{n}$ はベクトル場 $\boldsymbol{W}$ と法線単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ の内積を表し、$dS = J(u,v)dudv$ は面素である。これを**ガウスの定理**という。ガウスの定理は、ベクトル場による領域 V の内部の湧き出し・吸い込みの総量が曲面 S からの流入・流出の総量に等しいことを表しており、微積分学の基本定理の 3 次元版である。

ベクトル場 $\boldsymbol{W}$ と、閉曲線 $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ を境界にもつ曲面 S について

$$\iint_S (\mathrm{rot}\boldsymbol{W}) \cdot \boldsymbol{n} dS = \int_C \boldsymbol{W} \cdot d\boldsymbol{r}$$

がなりたつ。ここで、$\boldsymbol{n}$ は閉曲線 C の回る向きに右ねじを回したときのねじが進む方向を向いた曲面の単位法線ベクトルであり、$dS = J(u,v)dudv$ は面素である。これを**ストークスの定理**という。ストークスの定理は微積分学の基本定理の曲面版である。

$\boxed{\text{複素関数}}$

39　複素関数

変数 z と関数がとる値 $f(z)$ がともに複素数である複素数変数の複素数値関数 $w = f(z)$ を考える。

変数 z を複素数 α に近づけるとき、$\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}$ がある複素数に近づくとき、この関数 $w = f(z)$ は $z = \alpha$ で**微分可能**であるといい、近づく値を $f'(\alpha)$ で表す。

例　　関数 $f(z) = z^2$ のとき、変数 z を複素数 α に近づけるとき、

$$\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} = \frac{z^2-\alpha^2}{z-\alpha} = z+\alpha$$

は 2α に近づくので、$f'(\alpha) = 2\alpha$ である。すなわち、$f'(z) = 2z$ である。

例　　関数 $f(z) = z$ のとき、変数 z を複素数 α に近づけるとき、

$$\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} = \frac{z-\alpha}{z-\alpha} = 1$$

は 1 に近づくので、$f'(\alpha) = 1$ である。すなわち、$f'(z) = 1$ である。

例　　関数 $f(z) = \frac{1}{z}$ のとき、変数 z を複素数 $\alpha \neq 0$ に近づけるとき、

$$\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} = \frac{\frac{1}{z}-\frac{1}{\alpha}}{z-\alpha} = -\frac{1}{z\alpha}$$

は $-\frac{1}{\alpha^2}$ に近づくので、$f'(\alpha) = -\frac{1}{\alpha^2}$ である。すなわち、$f'(z) = -\frac{1}{z^2}$ である。

$x(t), y(t)$ を区間 $[a,b]$ で定義された 2 つの実数値関数とすると、$z(t) = x(t) + iy(t), \quad (a \leqq t \leqq b)$ は複素平面の曲線を描く。この曲線を C で表すとき、曲線 C の沿っての複素関数 $f(z)$ の**線積分** $\int_C f(z)dz$ を次で定義する。

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

例　　$f(z) = z^2, \qquad C : z = ae^{it} \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$ とするとき、

$$\int_C z^2 dz = \int_0^{2\pi} a^2e^{2it}aie^{it}dt = a^3i\int_0^{2\pi} e^{3it}dt = a^3i\frac{1}{3i}e^{3it}\Big|_0^{2\pi} = a^3(e^{6\pi i}-e^0) = 0$$

となる。ここでを $(e^{it})' = ie^{it}$ 用いた。

例　　$f(z) = \frac{1}{z}, \qquad C : z = ae^{it} \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$ とするとき、

$$\int_C \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{ae^{it}}aie^{it}dt = \int_0^{2\pi} idt = it|_0^{2\pi} = i(2\pi-0) = 2\pi i$$

複素関数 $f(z)$ が開集合 D のすべての点で微分可能であるとき、D で**正則**な関数であるという。べき級数で決まる関数はその収束円の内部で正則である。

複素平面上の曲線 $C: z = z(t)$ $(\alpha \leqq t \leqq \beta)$ が $z(\alpha) = z(\beta)$ をみたすとき、**閉曲線**という。また、途中で交わることがない閉曲線を**単純閉曲線**という。

$f(x)$ を開集合 D で正則な関数とし、単純閉曲線 C の内部の点及び曲線上の点はすべて D に属するならば、$\displaystyle\int_C f(z)dz = 0$ がなりたつ。これを**コーシーの積分定理**という。

コーシーの積分定理と同じ条件のもとで、しかも、曲線 C が反時計回りに回るならば、単純閉曲線 C の内部の点 w について、

$$f(w) = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-w}dz$$

がなりたつ。これを**コーシーの積分表示**という。コーシーの積分表示は、単純閉曲線上の点での関数の値が単純閉曲線内部のすべての点での関数の値を決めているということである。

また、開集合 D で正則な関数 $f(z)$ は何度でも微分可能である。実数値関数の場合は開区間で１回微分可能であっても、必ずしも２回微分可能とは限らない。これらの正則関数についての結果は、複素関数の微分が、実数変数の場合の２方向からの（小さい方からと大きい方からの）極限と違って、複素数の多方向からの（ぐるりと３６０度方向からの）極限によって決まっていることによるものである。

40　複素積分による実積分の計算

たとえば、実積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx$ は複素積分を利用して計算できる。計算においては、関数 $\dfrac{1}{z^2+1} = \dfrac{1}{(z-i)(z+i)}$ が正則でないのは $z = i$ と $z = -i$ だけであることを利用する。小さい正数 δ と大きい正数 M について、５つの曲線

$$C_1 : z = t\ (-M \leqq t \leqq 1),\ C_2 : z = t\ (0 \leqq t \leqq M),\ C_3 : z = it\ (0 \leqq t \leqq \delta)$$

$$C_4 : z = i + \delta e^{it} \quad (-\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{3\pi}{2}), \quad C_5 : z = Me^{it} \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

を考えると、$C_1 + C_3 - C_4 - C_3 + C_2 + C_5$（ただし、$-C$ は曲線 C の逆回りを表わす）は反時計回りに回る単一閉曲線であり、曲線上およびその内部で関数 $\frac{1}{z^2+1}$

は正則だから、コーシーの積分定理より $\displaystyle\int_{C_1+C_3-C_4-C_3+C_2+C_5}\frac{1}{z^2+1}dz=0$ がなりたつ。したがって、

$$\int_{M}^{M}\frac{1}{x^2+1}dx=\int_{C_1+C_2}\frac{1}{z^2+1}dz=\int_{C_4}\frac{1}{z^2+1}dz-\int_{C_5}\frac{1}{z^2+1}dz$$

がなりたつ。

$$\begin{aligned}\int_{C_4}\frac{1}{z^2+1}dz&=\int_{C_4}\frac{1}{2i}(\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i})dz\\&=\frac{1}{2i}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\delta e^{it}}i\delta e^{it}dt+\frac{1}{2i}\int_{C_4}\frac{1}{z+i}dz\\&=\frac{1}{2i}\int_0^{2\pi}idt+0=\frac{2i\pi}{2i}=\pi\end{aligned}$$

がなりたつ。また、

$$\begin{aligned}|\int_{C_5}\frac{1}{z^2+1}dz|&=|\int_0^{\pi}\frac{1}{M^2e^{2it}+1}iMe^{it}dt|\\&\leqq\int_0^{\pi}\frac{M}{M^2-1}dt=\frac{M\pi}{M^2-1}\end{aligned}$$

だから、$M\to\infty$ とすることによって、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx=\pi$ を得る。この例の場合は $\frac{1}{x^2+1}$ の不定積分が $\tan^{-1}x$ であることを用いて計算できるのであるが、このような複素積分とコーシーの定理を使うことによってしか計算できない実積分もある。なお、コーシーの積分表示をコーシーの定理から導くにあたっては、この計算例とほぼ同じ考え方を用いる。

測度とルベーク積分

41　シグマ加法性をもつ測度

閉区間 $[a,b]$、開区間 (a,b)、半開区間 $[a,b)$ と $(a,b]$ の長さはいずれも $b-a$ である。これは１点だけの長さは０と言うことである。$a<b<c<d$ とし、区間 $[a,d)$ の３つの小区間 $[a,b)$ と $[b,c)$ と $[c,d)$ への分割を考えると、区間 $[a,d)$ の長さは３つの小区間の長さの和に等しい。n 個の区間に分割しても、分割してできる小区

間の長さの和はもとの区間の長さに等しい。このことを長さの**有限加法性**という。区間 $[0,1)$ の無限個の小区間 $[1-\frac{1}{k-1}, 1-\frac{1}{k})$, $k=1,2,3.\cdots$ への分割を考えても、

$$(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{k}-\frac{1}{k-1})+\cdots=1-0$$

がなりたつので、これら無限個の小区間の長さの和はもとの区間 $[0,1)$ の長さに等しい。これを長さの**シグマ加法性**という。このように区間の長さは有限加法性だけでなくシグマ加法性をも持っている。有限個の重なりのない区間の和集合について、それらの区間の長さの和を、その集合の長さと考えても、やはりシグマ加法性がなりたつ。では、どのような実数の集合についてまで、シグマ加法性を持つような「長さ」を考えることができるであろうか。ここでシグマ加法性に拘るのは、それが極限を考える解析学を豊かにするからである。

実数の集合の集まり $\mathfrak{B}$ で次の性質をもつものを実数の**シグマ集合体**という。

(1) 空集合 $\emptyset$ は $\mathfrak{B}$ に属する。

(2) $\mathfrak{B}$ に属する集合 E の補集合 E^c は $\mathfrak{B}$ に属する。

(3) $\mathfrak{B}$ に属する集合 $E_n \quad (n=1,2,\cdots)$ の和集合 $\cup_{n=1}^{\infty} E_n$ は $\mathfrak{B}$ に属する。

すべての区間の集まりを含むようなシグマ集合体で一番小さいものが存在する。それを記号 $\mathfrak{B}(\mathrm{R})$ で表し、R の**ボレル集合体**という。ボレル集合体に属する集合 E に対して、シグマ加法性をもつ長さ $\lambda(E)$ が定まる。つまり、λ は、区間 $[a,b)$ については $\lambda([a,b))=b-a$ であり、シグマ加法性

$$E_n \in \mathfrak{B}(\mathrm{R}) \quad (n=1,2,\cdots) \text{ かつ、} E_n \cap E_m = \emptyset \text{ ならば、} \lambda(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$$

をみたす。この λ を R の**ルベーク測度**といい、$(\mathrm{R}, \mathfrak{B}(\mathrm{R}), \lambda)$ を**１次元ルベーク空間**という。

２次元空間 R^2 の「面積」であるシグマ加法性をもつ２次元ルベーグ空間 $(\mathrm{R}^2, \mathfrak{B}(\mathrm{R}^2), \lambda)$ や、d 次元空間 R^d の「体積」であるシグマ加法性をもつ d 次元ルベーグ空間 $(\mathrm{R}^d, \mathfrak{B}(\mathrm{R}^d), \lambda)$ も考えることができる。

現代の確率論は、根源事象の空間 Ω の部分集合からできたシグマ集合体 $\mathfrak{B}(\Omega)$ に属する集合に対して与えられたシグマ加法性をもつ確率 P（ただし、$\mathrm{P}(\Omega)=1$）からなる確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega), \mathrm{P})$ をもとにして議論する。

42　ルベーク積分

ルベーク積分は可測関数について考える。実数変数の実数値関数 $f(x)$ が**可測関数**であるとは、すべての実数 a について、集合 $\{ \ x \mid f(x) < a \ \}$ がボレル集合体

$\mathfrak{B}(\mathrm{R})$ に属するような関数のことである。連続関数は可測関数である。可測関数 $f(x)$ については $a < b$ をみたす a, b について、ルベーク測度 $\lambda(\{\, x \mid a \leqq f(x) < b \,\})$ が定まる。

まず非負値可測関数 $f(x)$ について、ルベーク積分を考える。非負値関数とは正の値または 0 のみをとり負の値をとらない関数のことである。n を自然数とするとき関数 $f(x)$ がとりうる値の集合 $[0, \infty)$ を、区間 $[0, n)$ を長さ $\frac{1}{2^n}$ の $n2^n$ 個の小区間と区間 $[n, \infty]$ とへの分割を考え、各小区間の最小値と関数がその小区間の値をとる測度の積のすべての和

$$\sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \lambda(\{\, x \mid \frac{k-1}{2^n} \leqq f(x) < \frac{k}{2^n} \,\}) + n\lambda(\{\, x \mid n \leqq f(x) < \infty \,\})$$

を考える。n に関係するこの和が上に有界であるとき、$f(x)$ は**ルベーク積分可能**であるという。このとき、上の和の n についての上限を記号 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\lambda(dx)$ で表す。

次に負の値も取りうる可測関数 $f(x)$ のルベーク積分は次のように考える。

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) \geqq 0 \text{ をみたす } x \text{ について}) \\ \quad 0 & (f(x) < 0 \text{ をみたす } x \text{ について}) \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} -f(x) & (f(x) < 0 \text{ をみたす } x \text{ について}) \\ \quad 0 & (f(x) \geqq 0 \text{ をみたす } x \text{ について}) \end{cases}$$

と置くと、$f_+(x)$ と $f_-(x)$ はともに非負値可測関数であり、$f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ がなりたつ。$f_+(x)$ と $f_-(x)$ がともにルベーク積分可能であるとき、関数 $f(x)$ は**ルベーク積分可能**と言い、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_+(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} f_-(x)dx$ を $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\lambda(dx)$、あるいは、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ で表し、関数 $f(x)$ の**ルベーク積分**と言う。

閉区間 $[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$ について、この閉区間以外の点では値 0 をとるように延長して考えた関数はルベーグ積分可能であり、ルベーク積分の値は定積分（**リーマン積分**と言う）の値と一致する。しかも、ルベーク積分が対象とする関数は有界でなくてもよく連続でなくてもよいなど、定積分が対象とする関数よりもずっと広い。なお、リーマン積分は関数が定義された区間の分割を考えたが、ルベーク積分は関数がとる値の区間の分割を考えている。

d 次元のルベーク空間 $(\mathrm{R}^d, \mathfrak{B}(\mathrm{R}^d), \lambda)$ 上の可測関数 $f(x)$ に対してルベーク積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{R}^d} f(x)\lambda(dx)$ を同様に考えることができるが、さらには、一般の集合 X の部分集合からできるシグマ集合体 $\mathfrak{B}(X)$ に属する集合に対して定められたシグマ加法性をもつ測度 m からなる測度空間 $(X, \mathfrak{B}(X), m)$ 上の可測関数 $f(x)$ に対してもルベーク積分 $\displaystyle\int_X f(x)m(dx)$ を考えることができる。

測度空間 $(X, \mathfrak{B}(X), m)$ において、ルベーク積分可能な関数の列 $f_n(x)$ と可測関数 $f(x)$ とが、各点 $x \in X$ で、$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ をみたし、さらに、$|f_n(x)| \leqq g(x) \quad (x \in X, n = 1, 2, \cdots)$ をみたすルベーク積分可能な関数 $g(x)$ が存在するならば、$f(x)$ もルベーク積分可能であり、

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) m(dx) = \int_X f(x) m(dx)$$

がなりたつ。これを**ルベーク収束定理**という。このような収束定理を用いることができることが、ルベーク積分が解析学においてリーマン積分と違って有効な点である。

フーリエ級数

43 二乗可積分な関数

区間 $(-\pi, \pi)$ で定義された複素数に値をとる関数 $f(x)$ で、$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$ をみたすものをこの区間における**2乗可積分関数**という。ここで積分はルベーク積分を考える。区間 $(-\pi, \pi)$ で2乗可積分な関数の全体を記号 $\mathrm{L}(-\pi, \pi)$ で表す。$f(x)$ と $g(x)$ とを $\mathrm{L}(-\pi, \pi)$ に属する関数とし、c, d を2つの複素数とすると、$cf(x) + dg(x)$ も $\mathrm{L}(-\pi, \pi)$ に属する関数になるので、$\mathrm{L}(-\pi, \pi)$ はベクトル空間である。

$\mathrm{L}(-\pi, \pi)$ に属する関数 $f(x)$ と $g(x)$ とについて、積分の値 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} dx$ を記号 (f, g) と置く。ここで、$\overline{g(x)}$ は $g(x)$ の共役複素数である。(f, g) は複素数ベクトル空間の複素内積と同じ性質をみたす。

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ について、$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$ と置くと、

$$\begin{aligned} (e_n, e_m) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i(n-m)} e^{i(n-m)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} & = 0 \qquad (n \neq m \text{ のとき}) \\ \frac{1}{2\pi} x \Big|_{-\pi}^{\pi} & = 1 \qquad (n = m \text{ のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

がなりたつ。すなわち、$e_n(x)$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ は互いの内積は0であり、すべてノルム $\|e_n\| = \sqrt{(e_n, e_n)}$ が1である、つまり、正規直交系である。したがって、無限個の $e_n(x)$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ は1次独立系となるので、$\mathrm{L}(-\pi, \pi)$ は無限次元のベクトル空間である。

さらに、$\mathrm{L}(-\pi,\pi)$ に属する関数 $f(x)$ について、

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-\{(f,e_0)e_0(x)+\sum_{n=1}^{N}((f,e_n)e_n(x)+(f,e_{-n})e_{-n}(x))\}|^2dx=0$$

がなりたつ。これは、$(f,e_0)e_0(x)+\displaystyle\sum_{n=1}^{n=N}((f,e_n)e_n(x)+(f,e_{-n})e_{-n}(x))$ が何らかの意味で $f(x)$ に近づくということであるが、それはすべての点 x で近づくという意味ではない。なぜなら、$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|dx=0$ がなりたつからといって、すべての点 x で $f(x)=g(x)$ がなりたつわけではないからである。

44　フーリエ級数

区間 $(-\pi,\pi)$ で定義された複素数に値をとる関数 $f(x)$ に対して、$(f,e_0)e_0(x)+\displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty}((f,e_n)e_n(x)+(f,e_{-n})e_{-n}(x))$ を $f(x)$ の**複素フーリエ級数展開**と呼び、このことを記号

$$f(x)\sim(f,e_0)e_0(x)+\sum_{n=1}^{n=\infty}((f,e_n)e_n(x)+(f,e_{-n})e_{-n}(x))$$

で表す。複素フーリエ級数展開は無限級数の形をしているので収束するかどうかも問題であるし、まして、複素フーリエ級数展開が $f(x)$ にすべての $-\pi<x<\pi$ で等しいかどうかも問題である。記号$\sim$が使われているのはそのような理由からである。ただ、$e_n(x)$ $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ が正規直交系であることから導かれることであるが、これらのうちの有限個の和で表される関数 $f(x)=c_0e_0(x)+\displaystyle\sum_{n=1}^{n=N}(c_ne_n(x)+c_{-n}e_{-n}(x))$ の場合はその複素フーリエ級数展開は $f(x)$ 自身と一致する。

$n=1,2,\cdots$ について、

$$\begin{aligned}(f,e_n)e_n(x)+(f,e_{-n})e_{-n}(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\cos nx-i\sin nx)dx\ (\cos nx+i\sin nx)\\&\quad+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\cos nx+\sin nx)dx\ (\cos nx-i\sin nx)\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx\ \ \cos nx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx\ \ \sin nx\end{aligned}$$

であり、$(f,e_0)e_0(x) = \frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ だから、

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \ n = 0, 1, 2, \cdots, \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad n = 1, 2, \cdots$$

と置けば、複素フーリエ級数展開は $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ となる。関数 $f(x)$ が実数値をとる場合は係数 a_n, b_n がすべて実数になるので、これは、**実フーリエ級数展開**と考えることもできる。しかし、これら関数のフーリエ級数展開がもとの関数とすべての x で同じ値をとることは期待できないし、しかも、連続関数でも一致しない例がある。

フーリエ級数展開の収束についてはさまざまなことが調べられているが、結果の一つは、関数 $f(x)$ が、区間 $[-\pi, \pi]$ の有限個の点 $-\pi = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{i-1} < a_i < \cdots < a_n$ で区切られたすべての開区間 (a_{i-1}, a_i), $(i = 1, 2, \cdots, n)$ で C^1 級であり、すべての区分点で左極限 $f(a_i - 0)$ および右極限 $f(a_i + 0)$ が存在するならば、区分点以外のすべての点 x でフーリエ級数展開は $f(x)$ に一致し、それぞれの区分点では $\dfrac{f(a_i - 0) + f(a_i + 0)}{2}$ に一致するというものである。

この結果をたとえば関数 $f(x) = x$, $(-\pi < x < \pi)$ に適用すると、

$$x = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\sin kx}{k} \quad (-\pi < x < \pi)$$

が得られる。この等式に $x = \frac{\pi}{2}$ を代入することによって、

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{k+1}\frac{1}{2k+1} + \cdots$$

が得られる。

45　周期関数

世の中には周期的に変化するものが多い。$f(x + L) = f(x)$ をみたす関数 $f(x)$ を周期 L の関数と言う。典型的な周期関数である三角関数の周期は 2π であり、周期 L の関数は $y = \frac{2\pi x}{L}$ と変数を変えることによって、周期 2π の関数となるので、周期 2π の関数を考えれば十分である。そのためには、区間 $[-\pi, \pi)$ で定義された関数を考えればよいということになる。フーリエ級数は偏微分方程式などの数学の様々な分野だけでなく、音響処理、画像処理などのさまざまな分野において用いられている。

46　波動方程式

偏微分方程式 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=c^2(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2})$ (ただし、$c>0$) を**波動方程式**という。ここでは１次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (1)$$

を考える。変数を $u=x-ct,\ v=x+ct$ と変換して、合成関数の偏微分公式を用いて計算すると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x}&=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\\
\frac{\partial w}{\partial t}&=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}=-c\frac{\partial w}{\partial u}+c\frac{\partial w}{\partial v}\\
\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}&=(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial x})+(\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x})\\
&=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}&=-c(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 w}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial t})+c(\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial t})\\
&=c^2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2c^2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+c^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}
\end{aligned}$$

だから、(1) より、$\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=0$ を得る。$\dfrac{\partial}{\partial u}(\dfrac{\partial w}{\partial v})=0$ より、$\dfrac{\partial w}{\partial v}=p(u)$ と u の関数として表せる。両辺を積分すると、$w=\displaystyle\int p(u)du+f_2(v)$ と v の関数 $f_2(v)$ を用いて表せる。$f_1(u)=\displaystyle\int p(u)du$ と置くと、$w=f_1(u)+f_2(v)$ となり、$w=w(x,t)=f_1(x-ct)+f_2(x+ct)$ が (1) の解である。$f_1(x-ct)$ を**進行波**といい、$f_2(x+ct)$ を**後退波**という。

次に $t=0$ における条件である初期条件 $w(x,0)=g(x),\ \dfrac{\partial w}{\partial t}(x,0)=h(x)$ をみたす (1) の解を求める。$u(x,0)=f_1(x)+f_2(x)=g(x)$ となる。また、$\dfrac{\partial w}{\partial t}=-cf'_1(x-ct)+cf'_2(x+ct)$ だから、$\dfrac{\partial w}{\partial t}(x,0)=-cf'_1(x)+cf'_2(x)=h(x)$ を得る。これを積分すると、$f_1(x)-f_2(x)=-\frac{1}{c}\int_0^x h(x)dx+d$ となる。連立方程式

$$f_1(x)+f_2(x)=g(x), \qquad f_1(x)-f_2(x)=-\frac{1}{c}\int_0^x h(x)dx+d$$

から、$f_1(x)=\frac{1}{2}(g(x)-\frac{1}{c}\int_0^x h(x)dx+d),\ f_2(x)=\frac{1}{2}(g(x)+\frac{1}{c}\int_0^x h(x)dx-d)$ を得る。したがって、

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(g(x-ct)+g(x+ct))+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(x)dx$$

が求める解である。この解を**ダランベールの解**という。

47　熱伝導方程式

偏微分方程式 $\frac{\partial w}{\partial t}=c^2(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2})$ (ただし、$c>0$) を**熱伝導方程式**という。ここでは 1 次元の熱伝導方程式

$$\frac{\partial w}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (1)$$

を区間 $[0,\pi]$ で、しかも両端点における境界条件 $w(0,t)=w(\pi,t)=0$ のもとで考える。区間の長さを π としたのは、計算式をできるだけ簡単にするためだけのことである。

また、$w(x,t)=f(x)g(t)$ と表せる解を考えることにする。このことから、$\frac{\partial w}{\partial t}=f(x)g'(t),\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=f''(x)g(t)$ となるので、(1) は $f(x)g'(t)=c^2f''(x)g(t)$ となる。これより、$\frac{g'(t)}{c^2g(t)}=\frac{f''(x)}{f(x)}=\lambda$ は定数となる。これより得られる $f''(x)=\lambda f(x)$ は定数係数 2 階線形微分方程式であり、$g'(t)=c^2\lambda g(t)$ は変数分離形の 1 回微分方程式である。

(1) $\lambda>0$ の場合、$\lambda=k^2$ と置くと、微分方程式 $f''(x)=k^2f(x)$ の解は、$f(x)=Ce^{kx}+De^{-kx}$ (C,D は定数) だから、$w(0,t)=f(0)g(t)=(C+D)g(t)=0,\ w(\pi,t)=(Ce^{k\pi}+De^{-k\pi})g(t)=0$ となり、これががなりたつのは、$C=D=0$ あるいは $g(t)\equiv 0$ であるので、$w(x,t)\equiv 0$ となる。

(2) $\lambda=0$ の場合、$f''(x)=0$ だから、$f(x)=Cx+D$ (C,D は定数) となる。$w(0,t)=f(0)g(t)=Dg(t)=0,\ w(\pi,t)=(C\pi+D)g(t)=0$ がなりたつのは、$C=D=0$ あるいは $g(t)\equiv 0$ であるので、$w(x,t)\equiv 0$ となる。

(3) $\lambda<0$ の場合、$\lambda=-k^2,\ k>0$ と置くと、微分方程式 $f''(x)=-k^2f(x)$ の解は $f(x)=C\cos kx+D\sin kx$ (C,D は定数) だから、$w(0,t)=f(0)g(t)=Cg(t)=0,\ w(\pi,t)=f(\pi)g(t)=(C\cos k\pi+D\sin k\pi)g(t)=0$ となる。これがなりたつの

は、$k=1,2,\cdots$ あるいは $g(t)\equiv 0$ のときである。$k=1,2,\cdots$ のとき、微分方程式 $g'(t)=-c^2k^2g(t)$ の解は $g(t)=Ee^{-c^2k^2t}$ (E は定数) だから、$w(x,t)=\sin kxe^{-c^2k^2t}$ が (1) の境界条件 $w(0,t)=w(\pi,t)=0$ をみたす解である。この解の $t=0$ のときは $w(x,0)=\sin kx$ である。

したがって、これらの有限個の 1 次結合である $w(x,t)=\displaystyle\sum_{k=1}^{N} b_k \sin kxe^{-c^2k^2t}$ も (1) $\dfrac{\partial w}{\partial t}-c^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$ の境界条件 $w(0,t)=w(\pi,t)=0$ をみたす解であり、初期値は $w(x,0)=\displaystyle\sum_{k=1}^{N} b_k \sin kx$ となる。

$f(x)$ を区間 $[0,\pi]$ で定義された C^1 級の実関数で $f(0)=f(\pi)=0$ をみたすものとするとき、区間 $[-\pi,0]$ に属する x に対して $f(x)=-f(-x)$ で定義すると、$f(x)$ は区間 $[-\pi,\pi]$ で定義された奇関数になるので、その実フーリエ係数は

$$a_n=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=0,\ n=0,1,2,\cdots\ b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx,\ n=1,2,\cdots$$

となり、そのフーリエ級数展開は $-\pi\leqq x\leqq\pi$ で $f(x)$ に一致するので、$w(x,t)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin kxe^{-c^2k^2t}$ は (1) の境界条件 $w(0,t)=w(\pi,t)=0$ および初期条件 $w(x,0)=f(x)\quad(0\leqq x\leqq\pi)$ をみたす解である。

ヒルベルト空間

48　数列空間 ℓ^2

2 次元数ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は 2 つの実数 $x,\ y$ を並べたものであるが一つのものとみたように、無限個の実数が並んだ実数列も一つのものとみて $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$ と表す。縦に並べないで横に並べたのは紙面を節約するためである。$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2<\infty$ をみたす実数列 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$ の全体を記号 ℓ^2 で表す。ℓ^2 に属する 2 つの実数列 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots),\ \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)$ の和を

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n,\cdots)$$

で定めると、この和も ℓ^2 に属する。ℓ^2 に属する実数列 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$ の実数 c 倍を

$$c\boldsymbol{x}=(cx_1,cx_2,\cdots,cx_n,\cdots)$$

で定めると、この実数倍も ℓ^2 に属する。すなわち、ℓ^2 は実ベクトル空間である。また、ℓ^2 に属する 2 つの実数列 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots)$ に対して、

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n + \cdots$$

と置くと、$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は内積の性質をみたす。

さらに、すべての $n = 1, 2, \cdots$ について、n 番目だけが 1 で他はすべて 0 である実数列を記号 $\boldsymbol{e}_n$ で表せば、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n, \cdots$ は互いに直交する、すべてノルム 1 の ℓ^2 に属する実数列の列である。したがって、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n, \cdots$ は無限個の 1 次独立系であるから、ℓ^2 は無限次元のベクトル空間である。なお、ℓ^2 における内積から決まるノルムは $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}$ となる。

49 ヒルベルト空間

内積をもつ無限次元ベクトル空間 H は、H の要素の列 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n, \cdots$ が $\lim_{n,m\to\infty} \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_m\| = 0$ をみたすならば、$\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\| = 0$ をみたす $\boldsymbol{x}$ が H の中に存在するとき、**ヒルベルト空間**という。ℓ^2 は実ヒルベルト空間であり、区間 $[a, b]$ で定義された 2 乗可積分な複素関数の全体 $\mathrm{L}[a, b]$ は複素ヒルベルト空間である。

ヒルベルト空間は関数空間の一種であり、量子力学の理論的基礎づけとしても用いられている。

$\boxed{\text{集合と距離空間}}$

50 集合

すでに用いたのであるが、数学の議論の多くは集合を用いて記述される。集合とはものの集まりのことであるが、集合といえるからには、その集合に属する要素であるか、属さない要素であるかが明確であることが必要である。要素 x が集合 A に属することを記号 $x \in A$ で表す。集合の表し方には、その集合に属する要素を並べる方法と、その集合に属する要素の特性を記述する方法がある。後者に従えば、2 つの集合 A, B の和集合と共通集合はそれぞれ

$$A \cup B = \{\, x \mid x \in A \text{ または } x \in B \,\}$$

$$A \cap B = \{\ x \mid x \in A \text{かつ} x \in B\ \}$$

となる。集合 Λ の要素 λ ごとに集合 A_λ が与えられているとき、それらの**和集合**と**共通集合**はそれぞれ

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{\ x \mid x \in A_\lambda \text{となる} \lambda \in \Lambda \text{が存在する}\ \}$$

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{\ x \mid \text{すべての} \lambda \in \Lambda \text{について} x \in A_\lambda\ \}$$

となる。特に、集合の列 $A_n,\ n = 1, 2, \cdots$ が与えられたとき

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{\ x \mid x \in A_n \text{となる} n \text{が存在する}\ \}$$

を**可算和集合**という。

集合 A の要素はすべて集合 B の要素であるとき、記号 $A \subset B$ で表し、A は B の**部分集合**であるという。

全体集合 X の部分集合だけを考えるとき、集合 A に属さない X の要素の全体の集合を記号 A^c で表し、A の**補集合**という。補集合については、

$$(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c, \qquad (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$$

がなりたつ。これを**ドモルガンの法則**という。

51 写像

集合 A の各要素 x に対して集合 Y の要素 $\phi(x)$ が対応しているとき、ϕ を X から Y への**写像**という。関数は数の集合から数の集合への写像である。X から Y への写像 ϕ と X の部分集合 A に対して、Y の部分集合 $\{\ \phi(x) \mid x \in A\ \}$ を記号 ϕA で表し、ϕ による A の**像**という。X から Y への写像 ϕ と Y の部分集合 B に対して、X の部分集合 $\{\ x \mid \phi x \in B\ \}$ を記号 $\phi^{-1}B$ で表し、ϕ による B の**逆像**という。X から Y への写像 ϕ について、B を Y の部分集合とするとき、$\phi(\phi^{-1}B) = B \cap \phi X$ がなりたつが、A を X の部分集合とするとき、$A \subset \phi^{-1}(\phi A)$ となり、必ずしも等号はなりたたない。また、

$$\phi^{-1}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \phi^{-1} B_\lambda, \qquad \phi^{-1}(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \phi^{-1} B_\lambda,$$

$$\phi(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \phi A_\lambda, \qquad \phi(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \phi A_\lambda$$

がなりたつ。

これらのうち、$\phi(\phi^{-1}B) = B \cap \phi X$ は次のように証明する。まず、y を $\phi(\phi^{-1}B)$ に属する要素とすれば、$y = \phi x$ をみたす $\phi^{-1}B$ の要素 x が存在する。ϕx は B と ϕX の両方に属する要素となるから、y は $B \cap \phi X$ に属する。逆に、$B \cap \phi X$ に属する要素 y について、$y = \phi x$ をみたす X の要素 x が存在する。y は B に属するから、x は $\phi^{-1}B$ に属する。ゆえに、y は $\phi(\phi^{-1}B)$ に属する。左辺の集合に属する要素は右辺の集合に属し、右辺の集合に属する要素は左辺の集合に属するということだから、両辺の集合は等しい。左辺の集合が空集合のときは右辺の集合も空集合になり、右辺の集合が空集合のときは左辺の集合も空集合になる。他の集合と写像についての関係も同じように証明できる。

写像と集合の最後の関係においては等号がなりたっていない。3 点集合 $X = \{a, b, c\}$ から 2 点集合 $Y = \{d, e\}$ への写像 ϕ を、$\phi a = d, \phi b = \phi c = e$ とすれば、

$$\phi\{a, b\} \cap \phi\{a, c\} = \{d, e\} \cap \{d, e\} = \{d, e\}, \quad \phi(\{a, b\} \cap \{a, c\}) = \phi\{a\} = \{d\}$$

だから、$\phi\{a, b\} \cap \phi\{a, c\} \neq \phi(\{a, b\} \cap \{a, c\})$ となり、その例になっている。また、$\phi^{-1}(\phi\{b\}) = \phi^{-1}\{e\} = \{b, c\}$ だから、$A \subset \phi^{-1}(\phi A)$ で等号がなりたたない例になっている。

52　距離空間

集合 X のすべての 2 つの要素の組 x, y に対して、正または 0 の値 $d(x, y)$ が定まり、次の性質をみたすとき、d を**距離**といい、(X, d) を**距離空間**という。

(1)　すべての $x \in X, y \in X$ について、$d(x, y) = d(y, x)$

(2)　すべての $x \in X, y \in X, z \in X$ について、$d(x, y) \leqq d(x, z) + d(z, y)$

(3)　$d(x, y) = 0$ がなりたつための必要十分条件は $x = y$ である。

実数全体 R における絶対値は距離であり、複素数全体 C における絶対値も距離である。n 次元数ベクトル空間 R^n のノルムで定まる

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

も距離である。閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数の全体 $\mathrm{C}([0,1])$ における

$$\int_0^1 |f(x)-g(x)|dx, \quad f(x)\in \mathrm{C}([0,1]), g(x)\in \mathrm{C}([0,1])$$

も距離である。

53　近傍、集積点、境界、開集合、閉集合、連続

距離空間 (X,d) の点 $x_0\in X$ と正数 ϵ に対して、X の部分集合 $U_\epsilon(x_0)=\{\,x\mid d(x_0,x)<\epsilon\,\}$ を x_0 の ϵ **近傍**という。X の部分集合 A に属する点 x_0 が A の**内点**であるとは、$U_\epsilon(x_0)\subset A$ をみたすような $\epsilon>0$ があることである。X の部分集合 O が**開集合**であるとは、O に属する点はすべて O の内点であることである。X に属する点 x_0 が X の部分集合 A の**境界点**であるとは、x_0 のどのような ϵ 近傍 $U_\epsilon(x_0)$ にも A に属する点と A に属さない点があることである。X の部分集合 F が**閉集合**であるとは、F の境界点はすべて F に属することである。開集合 O の補集合 O^c は閉集合であり、閉集合 F の補集合 F^c は開集合である。

距離空間 X から距離空間 Y の写像 ϕ が X の点 x_0 で**連続**であるとは、すべての正数 ϵ に対して、$d(x,x_0)<\delta$ をみたす x について、$d(\phi x,\phi x_0)<\epsilon$ となるような、つまり、$\phi U_\delta(x_0)\subset U_\epsilon(\phi x_0)$ をみたすような正数 δ が存在することである。

X のすべての点で ϕ が連続となるための必要十分条件は、Y のすべての開集合 O について、$\phi^{-1}O$ が X の開集合になることである。これは、距離空間における連続写像という抽象性の強い議論であるが、抽象性の強い議論の例として、以下にこのことの証明を示してみる。

まず、必要性を示すために、O を Y の開集合とし、$x_0\in\phi^{-1}O$ とする。$\phi x_0\in O$ であり、O は開集合だから、$U_\epsilon(\phi x_0)\subset O$ をみたす $\epsilon>0$ が存在する。ϕ は x_0 で連続だから、$\phi U_\delta(x_0)\subset U_\epsilon(\phi x_0)$ をみたす $\delta>0$ が存在する。したがって、$\phi U_\delta(x_0)\subset O$ となり、$U_\delta(x_0)\subset\phi^{-1}O$ がなりたつから、$\phi^{-1}O$ は X の開集合となり、必要性を示すことができた。

次に、十分性を示すために、$x_0\in X$ とし、$\epsilon>0$ とする。$U_\epsilon(\phi x_0)$ は Y の開集合だから、$\phi^{-1}U_\epsilon(\phi x_0)$ は X の開集合であり、$x_0\in\phi^{-1}U_\epsilon(\phi x_0)$ だから、$U_\delta(x_0)\subset\phi^{-1}U_\epsilon(\phi x_0)$ をみたす $\delta>0$ が存在する。ゆえに、$\phi U_\delta(x_0)\subset U_\epsilon(\phi x_0)$ がなりたつので、ϕ は x_0 で連続となり、十分性を示すことができた。

数学を専門としない人が数学の本を読んだとき、その一般的で抽象的な内容に戸惑うことがある。数学が一般的抽象的になるのは、対象の論理的な本質をつか

みとることにより、対象への理解を深めるためである。したがって、一般化、抽象化することによって、対象の具体的な特質の一部が抜け落ちることがあることを見逃さないことが大切である。例えば、実数には距離的な性質だけではなく和や積の性質と大小関係の性質があり、複素数には距離の性質、和と積についての性質はあるが、大小関係の性質はなく、その代わりに代数方程式がいつでも解をもつという性質がある。

群、環、体

54　群

1 行目は $1,2,3$ を順に書き、2 行目は $1,2,3$ を並べ替えて書いたものの全体を記号 S_3 で表す。すなわち、

$$S_3=\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\}$$

である。例えば、S_3 の要素の一つである $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ は、3 個の文字の並び $\begin{pmatrix}a&b&c\end{pmatrix}$ の 1 番目の文字を 2 番目に、2 番目の文字を 3 番目に、3 番目の文字を 1 番目に並べ替える操作を表すものと考える。このことを

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c&a&b\end{pmatrix}$$

で表す。操作 $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ を行った後に操作 $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$ を行う操作の結合を記号 $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ で表せば、

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c&a&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c&b&a\end{pmatrix}$$

となるから、

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

である。また、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

だから、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

である。すなわち、これらの２つの操作は順番を入れ替えると異なる。この性質を操作が**非可換**であるという。S_3 の３つの操作を σ, τ, η とすると、

$$\eta \cdot (\tau \cdot \sigma) = (\eta \cdot \tau) \cdot \sigma$$

がなりたつ。この性質を**結合の法則**という。結合の法則がなりたつのは、$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) \end{pmatrix}$，$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \tau(1)1 & \tau(2) & \tau(3) \end{pmatrix}$ とするとき、i 番目は操作 σ により $\sigma(i)$ 番目になり、さらに操作 τ により $\tau(\sigma(i))$ 番目になるから、

$$\tau \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \tau(\sigma(1)) & \tau(\sigma(2)) & \tau(\sigma(3)) \end{pmatrix}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \eta \cdot (\tau \cdot \sigma) &= \eta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \tau(\sigma(1)) & \tau(\sigma(2)) & \tau(\sigma(3)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \eta(\tau(\sigma(1))) & \eta(\tau(\sigma(2))) & \eta(\tau(\sigma(3))) \end{pmatrix} = (\sigma \cdot \tau) \cdot \sigma \end{aligned}$$

となるからである。

S_3 の要素 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ は並べ替えを行わない操作である。これを記号 e で表し、**単位元**という。単位元 e については、すべての S_3 の要素 σ について $\sigma \cdot e = e \cdot \sigma = \sigma$ がなりたつ。また、S_3 の要素 σ に対して、σ による並べ替えをもとにもどす操作を τ とすれば、$\tau \cdot \sigma = \sigma \cdot \tau = e$ がなりたつ。この τ を σ の**逆元**といい、記号 σ^{-1} で表す。例えば、S_3 の要素 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ については、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

がなりたつから、$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆元は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$、つまり、$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ である。

一般に、集合 G の２つの要素 σ, τ に対して G の要素 $\tau \cdot \sigma$ が定まって、次の性質 (1),(2),(3) を満たすとき、G を**群**という。

(1) G のすべての要素 σ, τ, η について、$\eta \cdot (\tau \cdot \sigma) = (\eta \cdot \tau) \cdot \sigma$ がなりたつ（この性質を**結合の法則**という）。

(2) G のすべての要素 σ に対して $\sigma \cdot e = e \cdot \sigma = \sigma$ がなりたつような G の要素 e が存在する（このような e を**単位元**という）。

(3) G のすべての要素 σ に対して $\tau \cdot \sigma = \sigma \cdot \tau = e$ をみたすような G の要素 τ が存在する（このような τ を σ の**逆元**といい、記号 σ^{-1} で表わす）。

演算 $\cdot$ が可換、すなわち、すべての２つの要素 σ, τ について、$\sigma \cdot \tau = \tau \cdot \sigma$ がなりたつような群を**可換群**という。

例、　n を自然数とするとき、1 行目は $1, 2, \cdots, n$ を順に書き、2 行目は $1, 2, \cdots, n$ を並べ替えて書いたものの全体を S_n で表し、S_n の要素の結合 $\cdot$ を S_3 と同様に考えると、S_n は群である。S_n を n 次の**対称群**という。S_n は可換群ではない。

例、　実数の全体 R は数の和の演算 $+$ について可換群である。このとき単位元は数 0 である。しかし、正数の全体 R_+ は和の演算 $+$ について群にならない。和についての逆元が R_+ のなかにないからである。

例、　正数の全体 R_+ は数の積の演算 $\times$ について可換群になる。このとき単位元は数 1 である。しかし、実数の全体 R は積の演算 $\times$ について群にならない。数 0 の積についての逆元がないからである。

例、　複素数の全体 C は数の和の演算 $+$ について可換群であるが、数の積の演算 $\times$ について群にならない。数 0 の積についての逆元がないからである。

55　体

２つの演算 $+, \cdot$ をもつ集合 K は次をみたすとき**体**という。

(1)　　K は演算 $+$ について可換群である。

(2)　K から 0 を除いた $K-\{0\}$ は演算 $\cdot$ について可換群である。

(3)　K の任意の３つの要素 x,y,z について

$$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$$

がなりたつ（この性質を**分配の法則**という)。

例　実数の全体 R は体である。これを**実数体**という。

例　複素数の全体 C は体である。これを**複素数体**という。

例　有理数の全体 Q は体である。これを**有理数体**という。なお、有理数とは２つの整数の比として表せる数のことである。

56　環

２つの演算 $+$, $\cdot$ をもつ集合 R は次をみたすとき**環**という。

(1)　　K は演算 $+$ について可換群である。

(2)　　演算 $\cdot$ について、結合の法則がなりたつ。

(3)　R の任意の３つの要素 x,y,z について

$$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z,\qquad (x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$$

がなりたつ。

演算 $\cdot$ が可換、すなわち、すべての２つの要素 σ, τ について、$\sigma\cdot\tau=\tau\cdot\sigma$ がなりたつような環を**可換環**という。

例　整数の全体 Z は可換環である。これを**整数環**という。

例　$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ を $n+1$ 個の実数とするとき（ただし、$a_n\neq 0$）、$a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_2t^2+a_1t+a_0$ を t を変数とする n 次の多項式という。t を変数

とする多項式の全体 $R(t)$ は可換環になる。これを**多項式環**という。ただし、演算 $+, \cdot$ は、例えば

$$(2t^2 + 3t + 4) + (5t + 6) = 2t^2 + 8t + 10$$

$$(2t^2 + 3t + 4) \cdot (5t + 6) = 10t^3 + 27t^2 + 38t + 24$$

のように普通の式の計算をする。

例　n 次の行列の全体 M_n は行列の和と行列の積について環になる。これを **n 次の全行列環**という。全行列環は可換でない。

環 R の部分集合で、環の性質をみたすものを**部分環**という。環 R の部分環 I が $RI \subset I$ をみたすとき、**イデアル**という。

例　　2 の倍数の全体 $Z(2) = \{\ 2k \mid k \in Z\ \}$ は Z のイデアルである。同様に、n の倍数の全体 $Z(n) = \{\ nk \mid k \in Z\ \}$ は Z のイデアルである。

$Z(4) \subset Z(2)$ や $Z(6) \subset Z(2)$ がなりたつ。一般に m が n の約数であるとき、$Z(n) \subset Z(m)$ がなりたつ。

I が $Z(2)$ を真に含むイデアルであれば、$I = Z$ がなりたつ。この性質をもつイデアルを**極大イデアル**であるという。$Z(n)$ が極大イデアルになるための必要十分条件は n が素数であることである。このように素数を極大イデアルで特徴づけることができる。

索 引