【1 章演習問題の解答例】

【演習 1 解答例】

(1) A$=0.\dot{4}\dot{5}$ とおく

$$\begin{array}{rr} & 100A = 45.4545\cdots \\ -) & A = \ 0.4545\cdots \\ \hline & 99A = 45 \end{array}$$

$A = \dfrac{45}{99} = \dfrac{5}{11}$　　$0.\dot{4}\dot{5} = \dfrac{5}{11}\cdots$（答）

(2) $\dfrac{19}{37} = 0.513513513\cdots$

$= 0.\dot{5}\dot{1}\dot{3}$

であるから小数第 28 位は $28 \div 3 = 9$　余り 1

より 513 の繰り返しの最初の数となる.

(答) 5

【演習 2 解答例】

【解説】

「背理法」

ある命題を証明するとき,「その命題が成り立たないと仮定すると矛盾が生じる. 従ってその命題は成り立たなければならない.」という論法である.

【証明】

$\sqrt{2}$ が無理数でないと仮定すると, $\sqrt{2}$ は有理数であるから

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad (p \text{ と } q \text{ は互いに素な自然数}) \cdots ①$$

とおける. ①より

$$\sqrt{2}q = p$$
$$2q^2 = p^2 \cdots ②$$

$2q^2$ は 2 の倍数なので p^2は 2 の倍数

よって p は 2 の倍数$\cdots ③$

$p = 2r$ とおけて②へ代入すると

2

$$2q^2 = 4r^2$$
$$q^2 = 2r^2$$

$2r^2$は 2 の倍数なので q^2は 2 の倍数
よって q は 2 の倍数$\cdots$④
③, ④ は p と q が互いに素な自然数であることに矛盾する.
よって $\sqrt{2}$ は無理数である.

【演習 3 解答例】
$108 = 2^2 \cdot 3^3 \cdots$①
108 の正の約数は

$$\begin{cases} 2^p \cdot 3^q \\ p = 0, 1, 2 \\ q = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

とかけるので, その総数は $3 \times 4 = 12$ 個$\cdots$(答)
108 の正の約数は,

$$(2^0 + 2^1 + 2^2)(3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3)$$

を展開したときの項として得られる.
よって総和は,

$$(1 + 2 + 4)(1 + 3 + 9 + 27) = 7 \times 40 = 280 \cdots (\text{答})$$

108 の偶数の約数は

$$\begin{cases} 2^p \cdot 3^q \\ p = 1, 2 \\ q = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

とかけるので, その総数は $2 \times 4 = 8$ 個$\cdots$ (答)

【演習 4 解答例】
2 つの自然数を A, B
最大公約数を G, 最小公倍数を L とおくと

$$\begin{cases} A = aG \\ B = bG \quad (a, b \text{ は互いに素な自然数}) \\ L = abG \end{cases}$$

とおける．よって

$$\begin{cases} A = 28a & \cdots ① \\ B = 28b & \cdots ② \\ a, b \text{ は互いに素な自然数} & \cdots ③ \end{cases}$$

題意より

$1260 = 28ab$

$ab = 45 \cdots ④$

③より

a	1	5	9	45
b	45	9	5	1

$A = 28a$	28	140	252	1260
$B = 28b$	1260	252	140	28

よって 2 つの自然数は 28 と 1260，140 と $252 \cdots$(答)

【演習 5 解答例】

(1) $x^2 - 8y^2 + 2xy + x + 16y - 6$

$= x^2 + (2y+1)x - 2(4y^2 - 8y + 3)$

$= x^2 + (2y+1)x - 2(2y-1)(2y-3)$

$= \{x + 2(2y-1)\}\{x - (2y-3)\}$

$= (x + 4y - 2)(x - 2y + 3) \cdots$(答)

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 2(2y-1) & \longrightarrow & 4y-2 \\ 1 & \times & -(2y-3) & \longrightarrow & -2y+3 \\ & & & & \hline & & & & 2y+1 \end{array}$$

(2) $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$

$= (c-b)a^2 - (c^2 - b^2)a + bc(c-b)$

$= (c-b)\{a^2 - (c+b)a + bc\}$

$= (c-b)(a-b)(a-c)$

$= (a-b)(b-c)(c-a) \cdots$(答)

4

【演習 6 解答例】

2 進法における 1 桁の足し算は $0+0=0, 0+1=1, 1+0=1, 1+1=10$ であり，引き算は $0-0=0, 1-0=1, 1-1=0, 10-1=1$ である．

(1)
$$\begin{array}{rr} & 110_{(2)} \\ +) & 11_{(2)} \\ \hline & 1001_{(2)} \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rr} & 11011_{(2)} \\ +) & 111_{(2)} \\ \hline & 100010_{(2)} \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{rr} & 10100_{(2)} \\ -) & 1101_{(2)} \\ \hline & 111_{(2)} \end{array}$$

(4)
$$\begin{array}{rr} & 1101_{(2)} \\ \times) & 101_{(2)} \\ \hline & 1101 \\ & 1101 \\ \hline & 1000001_{(2)} \end{array}$$

【演習 7 解答例】

(1) $2.375 = 2 + 0.375$

$= 2 + 0.25 + 0.125$

$= 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3}$

$= 10.011_{(2)} \cdots$(答)

(2) 2 進法の小数では $2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, \cdots$ すなわち
$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$ で位どりされるので
$0.5 + 0.25 + 0.125 \cdots$
の和として，10 進数を表すことになり，無限小数となることがある．

【演習 8 解答例】

100 から 200 までの整数のうち，2 の倍数の集合を A，3 の倍数の集合を B とおくと，6 の倍数の集合は $A \cap B$ であり

$A = \{100, 102, \cdots, 200\} = \{2 \times 50, 2 \times 51, \cdots, 2 \times 100\}$

$B = \{102, 105, \cdots, 198\} = \{3 \times 34, 3 \times 35, \cdots, 3 \times 66\}$

$A \cap B = \{102, 108, \cdots, 198\} = \{6 \times 17, 6 \times 18, \cdots, 6 \times 33\}$

$|A| = 51, |B| = 33, |A \cap B| = 17$

よって

$$|A \cup B| = 51 + 33 - 17 = 67(\text{個}) \cdots (\text{答})$$

$$\underbrace{100 + 102 + \cdots + 200}_{51\text{ 個}} = \frac{51 \times (100+200)}{2} = 7650$$

$$\underbrace{102 + 105 + \cdots + 198}_{33\text{ 個}} = \frac{33 \times (102+198)}{2} = 4950$$

$$\underbrace{102 + 108 + \cdots + 198}_{17\text{ 個}} = \frac{17 \times (102+198)}{2} = 2550$$

よって，総和は 7650+4950-2550=10050$\cdots$(答)

【演習 9 解答例】

(1) $a_n = a + (n-1)d \quad \cdots ①$

とおくと

$a_{10} = a + 9d = 23 \quad \cdots ②$

$a_{20} = a + 19d = -7 \cdots ③$

③ − ② より

$$10d = -30$$
$$d = -3$$

①より $a = 23 + 27 = 50$

$a_n = 50 + (n-1) \times (-3)$

$a_n = -3n + 53 \cdots (\text{答})$

(2) $S_n = \dfrac{n\{2 \times 50 + (n-1) \times (-3)\}}{2} = \dfrac{n(103 - 3n)}{2} \cdots (\text{答})$

(3) 初項から第 n 項までの和 S_nが最大となるのは

$a_n > 0$ となる正の項をすべて加えたときである.

$$a_n = -3n + 53 > 0$$

$$n < \frac{53}{3} \fallingdotseq 17.6$$

よって初項から第 17 項までの和が最大となる.

$$S_{17} = \frac{17 \times (103 - 51)}{2} = \frac{17 \times 52}{2} = 442 \cdots (\text{答})$$

【演習 10 解答例】

(1) 初項 1，公差 1 の等差数列だから

$$a_n = 1 + (n-1) \times 1$$

よって

$$a_n = n$$

$$S_n = \frac{n\{2 + (n-1) \times 1\}}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

(2) 初項 1，公差 2 の等差数列だから

$$a_n = 1 + (n-1) \times 2$$

$$a_n = 2n - 1$$

$$S_n = \frac{n\{2 + (n-1) \times 2\}}{2} = \frac{n \times 2n}{n} = n^2$$

(3) 初項 1，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列だから

$$a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$S_n = \frac{1\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

(4) 初項 2，公比 -2 の等比数列だから

$$a_n = 2 \cdot (-2)^{n-1}$$

$$S_n = \frac{2\{1 - (-2)^n\}}{1 - (-2)} = \frac{2\{1 - (-2)^n\}}{3}$$

【演習 11 解答例】

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n$

初項 1，公差 1 の等差数列の和だから

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\{2+(n-1)\times 1\}}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

(2) 恒等式 $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1 \cdots ①$

に $k = n, n-1, \cdots, 2, 1$ と代入すると

$$\begin{array}{rccccccccc}
 & (n+1)^3 & - & n^3 & = & 3\cdot n^2 & + & 3\cdot n & + & 1 \\
 & n^3 & - & (n-1)^3 & = & 3(n-1)^2 & + & 3(n-1) & + & 1 \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
+) & 2^3 & - & 1^3 & = & 3\cdot 1^2 & + & 3\cdot 1 & + & 1 \\
\hline
 & (n+1)^3 & - & 1 & = & 3\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 & + & 3\sum_{k=1}^{n} k & + & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1
\end{array}$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^3 - 1 - 3\times\frac{n(n+1)}{2} - n$$

$$= (n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - (n+1)$$

$$= \frac{(n+1)}{2}\times\{2(n+1)^2 - 3n - 2\}$$

$$= \frac{(n+1)}{2}\times(2n^2+n)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

【演習 12 解答例】

(1) $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1)$

$$= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(k^2+k) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)}{6} \times \{(2n+1)+3\} = \frac{n(n+1)(2n+4)}{6}$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

(2) $1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \cdots + n \cdot 1$
$$= \sum_{k=1}^{n} k \cdot (n-k+1) = \sum_{k=1}^{n}\{(n+1)k - k^2\}$$
$$= (n+1)\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2$$
$$= (n+1) \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$= \frac{n(n+1)}{6} \times \{3(n+1) - (2n+1)\}$$
$$= \frac{n(n+1)}{6} \times (n+2)$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

【演習 13 解答例】

(1) ${}_n\mathrm{C}_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

${}_n\mathrm{C}_{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\{n-(n-k)\}!} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$

よって ${}_n\mathrm{C}_k = {}_n\mathrm{C}_{n-k}$

【別解】

n 個の異なるものから r 個とる組合せは,

n 個の異なるものから $n-r$ 個残す組合せと, 一対一に対応するからである.

(2) ${}_n\mathrm{C}_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$$
\begin{aligned}
{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_k &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\{(n-1)-(k-1)\}!} + \frac{(n-1)!}{k!\{(n-1)-k\}!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\
&= \frac{(n-1)! \times k}{(k-1)!(n-k)! \times k} + \frac{(n-1)! \times (n-k)}{k!(n-k-1)! \times (n-k)} \\
&= \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)} + \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}
\end{aligned}
$$

よって ${}_n\mathrm{C}_k = {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_k$

【別解】

n 個の異なるものから r 個とり出す組合せは,

特定の 1 つ例えば A を選び，残り $n-1$ 個から k 個選ぶとり出し方と，

A を選ばないで，残り $n-1$ 個から k 個とり出す選び方の和に等しいからである.

【演習 14 解答例】

(1) $(x-3y)^{10}$ を展開したときの一般項は

$${}_{10}\mathrm{C}_r x^r (-3y)^{10-r} \cdots ①$$

x^7y^3の項は $r=7$ として

$$
\begin{aligned}
{}_{10}\mathrm{C}_7 x^7 (-3y)^3 &= (-3)^3 \times {}_{10}\mathrm{C}_3 x^7 y^3 \\
&= -27 \times 120 x^7 y^3 \\
&= -3240 x^7 y^3
\end{aligned}
$$

（答）-3240

(2) $(x+y+z)^8$ を展開したときの一般項は

$p+q+r=8$ として

$$\frac{8!}{p!q!r!} x^p y^q z^r \cdots ①$$

10

xy^4z^3の項は $p=1, q=4, r=3$ として

$$\frac{8!}{1!4!3!} = 280$$

（答）280

【演習 15 解答例】

$n \times n$ の魔法陣の定和は,

$$(1+2+3+\cdots+n^2) \div n$$
$$= \sum_{k=1}^{n^2} k \div n$$
$$= \frac{n^2(n^2+1)}{2} \div n$$
$$= \frac{n(n^2+1)}{2}$$

である.

【2 章の演習問題の解答例】

【演習 1 解答例】

(1) $y = 2x^2 - 12x + 11$

$= 2(x^2 - 6x) + 11$

$y = 2(x - 3)^2 - 7$

頂点 $(3, -7)$

軸の方程式　直線 $x = 3$

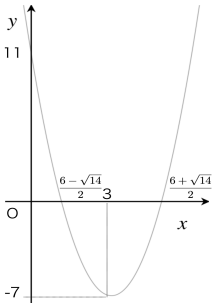


図 1

(2) $y = -x^2 + 2x + 3$

$= -(x^2 - 2x) + 3$

$y = -(x - 1)^2 + 4$

頂点 $(1, 4)$

軸の方程式　直線 $x = 1$

12

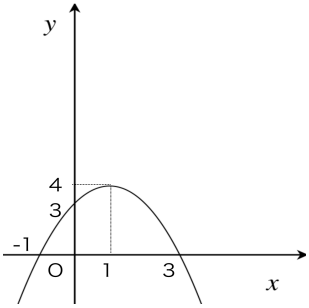


図 2

【演習 2 解答例】

求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c \cdots ①$ とおく

$\mathrm{A}(1,4), \mathrm{B}(3,2), \mathrm{C}(-2,-8)$ を通るから

$$\begin{cases} 4 = a + b + c & \cdots ② \\ 2 = 9a + 3b + c & \cdots ③ \\ -8 = 4a - 2b + c & \cdots ④ \end{cases}$$

③-②より

$$-2 = 8a + 2b$$

$$-1 = 4a + b \cdots ⑤$$

③-④より

$$10 = 5a + 5b$$

$$2 = a + b \cdots ⑥$$

⑤-⑥より

$$-3 = 3a \qquad a = -1$$

⑥より $b = 3$

②より $c = 2$

よって，求める 2 次関数は $y = -x^2 + 3x + 2 \cdots$(答)

【演習 3 解答例】

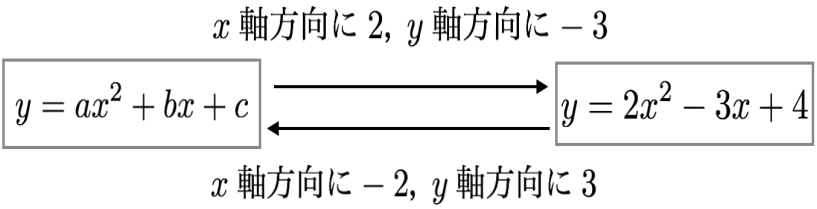


図 3

図**??**より $y = 2x^2 - 3x + 4$ のグラフを x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 平行移動すればよい．$x \to x + 2, y \to y - 3$ と書きなおして

$y - 3 = 2(x + 2)^2 - 3(x + 2) + 4$

$y = 2x^2 + 5x + 9 \cdots$(答)

【演習 4 解答例】

$y = ax^2 + bx + c$ のグラフは $y = ax^2$ のグラフを平行移動したものであるから，この 2 つの放物線は合同であり，$y = ax^2$ のグラフと $y = -ax^2$ のグラフは x 軸に関して対称であるのでこの 2 つの放物線も対称である．

よって $y = x^2$ のグラフと $y = ax^2 (a > 0)$ のグラフが相似であることを示せばよい．

$y = x^2 \quad \cdots ①$

$y = ax^2 \quad \cdots ②$

$y = kx \quad \cdots ③$

とおく．①,③の原点以外の交点の座標 P は

$\mathrm{P}\left(k, k^2\right) \cdots ④$

②,③の原点以外の交点の座標 Q は

$\mathrm{Q}\left(\dfrac{k}{a}, \dfrac{k^2}{a}\right) \cdots ⑤$

14

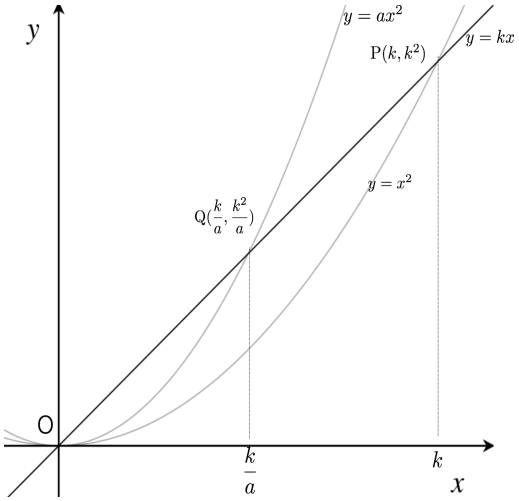


図 4

$$\mathrm{OP} = \sqrt{k^2 + k^4}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{OQ} &= \sqrt{\left(\frac{k}{a}\right)^2 + \left(\frac{k^2}{a}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{k^2 + k^4}{a^2}} \\ &= \frac{1}{|a|}\sqrt{k^2 + k^4} \\ &= \frac{1}{a}\sqrt{k^2 + k^4} \quad (\because a > 0)\end{aligned}$$

よって

$$\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}} = \frac{1}{a}$$

よって $y = ax^2$ のグラフは原点を中心として $y = x^2$ のグラフを $\dfrac{1}{a}$ 倍に拡大したグラフである．以上によりすべての放物線は相似である．

【演習 5 解答例】

$a^{2x}=3$ より $(a^x)^2=3$　　$a^x>0$ より

$a^x=\sqrt{3}$

$a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$x^{3x}=(a^x)^3=3\sqrt{3}$

$a^{-3x}=\dfrac{1}{a^{3x}}=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

よって　$\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\dfrac{3\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{9}}{\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{\dfrac{26}{9}\sqrt{3}}{\dfrac{4}{3}\sqrt{3}}=\dfrac{13}{6}\cdots$(答)

【演習 6 解答例】

(1)$\log_{10}6=\log_{10}(2\times3)=\log_{10}2+\log_{10}3=a+b$

(2) $\log_{10}9=\log_{10}3^2=2\log_{10}3=2b$

(3) $\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=\log_{10}10-\log_{10}2=1-\log_{10}2=1-a$

(4) $\log_3 16=\dfrac{\log_{10}16}{\log_{10}3}=\dfrac{\log_{10}2^4}{\log_{10}3}=\dfrac{4\log_{10}2}{\log_{10}3}=\dfrac{4a}{b}$

【演習 7 解答例】

$$\begin{cases} 0\le x\le 3 & \cdots① \\ y=4^{x+1}-2^{x+5}+32 & \cdots② \end{cases}$$

②より

$$\begin{aligned} y&=4\cdot4^x\quad -32\cdot2^x+32\\ &=4\cdot(2^x)^2-32\cdot2^x+32 \end{aligned}$$

$2^x=t$ とおくと①,②より

$$\begin{cases} 1\le t\le 8 & \cdots③ \\ y=4t^2-32t+32 & \cdots④ \end{cases}$$

④より

$$y=4(t-4)^2-32$$

③の範囲で④のグラフは図**??**のようになり

16

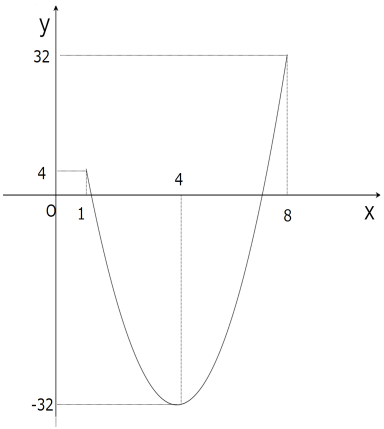


図 5

グラフより

$$\begin{cases} t = 4 \text{ のとき最小値 } -32 \\ t = 8 \text{ のとき最大値 } 32 \end{cases}$$

$t = 2^x = 4$ より $x = 2$

$t = 2^x = 8$ より $x = 3$

最小値 -32 $(x = 2 \text{ のとき})$

最大値 32 $(x = 3 \text{ のとき})$ $\cdots$(答)

【演習 8 解答例】

(1) $\mathrm{A} = 3^{37}$ とおく

$$\log_{10} \mathrm{A} = \log_{10} 3^{37} = 37 \log_{10} 3 = 37 \times 0.4771 = 17.6527$$

$$17 \leq \log_{10} 3^{37} < 18$$

$$10^{17} \leq 3^{37} < 10^{18}$$

よって 3^{37} は 18 桁の数である.

(2) $\log_{10} \mathrm{A} = 17.6527$ より $\mathrm{A} = 10^{17.6527}$

よって $3^{37} = 10^{17.6527} = 10^{0.6527} \cdot 10^{17} \cdots ①$

ここで

$$\log_{10} 4 = 2\log_{10} 2 = 2 \times 0.3010 = 0.6020$$

$$\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = 1 - \log_{10} 2 = 1 - 0.3010 = 0.6990$$

よって

$0.6020 < 0.6527 < 0.6990$ より

$$10^{0.6020} < 10^{0.6527} < 10^{0.6990}$$

$$4 < 10^{0.6527} < 5 \cdots ②$$

①, ②より 3^{37}の最高位の数字は 4 である.

(3) $3^0 = 1 \to 1$

$3^1 = 3 \to 3$

$3^2 = 9 \to 9$

$3^3 = 27 \to 7$

$3^4 = 81 \to 1$

$3^5 = 243 \to 3$ であり

$3^{37} = (3^4)^9 \cdot 3$

3^4の 1 の位の数は 1 だから

3^{37}の 1 の位の数字は 3 である.

(4) $A = \left(\frac{2}{3}\right)^{50}$ とおく

$$\log_{10} A = \log_{10} \left(\frac{2}{3}\right)^{50}$$

$$= 50(\log_{10} 2 - \log_{10} 3) = 50 \times (0.3010 - 0.4771)$$

$$= 50 \times (-0.1761)$$

$= -8.805$ よって

$$-9 < \log_{10} A < -8$$

$$-9 < \log_{10} \left(\frac{2}{3}\right)^{50} < -8$$

$$10^{-9} < \left(\frac{2}{3}\right)^{50} < 10^{-8}$$

より $\left(\frac{2}{3}\right)^{50}$ は小数第 9 位で初めて 0 でない数が現れる.

【演習 9 解答例】

A 市の人口を T とおくと，n 年後の人口は $(1.08)^n\mathrm{T}$

よって人口が 2 倍を超えるのは,

$$(1.08)^n\mathrm{T} > 2\mathrm{T}$$

$$\therefore (1.08)^n > 2 \cdots ①$$

を満たす最小の整数 n を求めればよい.

両辺に底 10 の対数をとると

$$\log_{10}\left(\frac{108}{100}\right)^n > \log_{10} 2$$

$$n(\log_{10} 108 - 2) > \log_{10} 2$$
$$n(\log_{10} 2^2 \cdot 3^3 - 2) > \log_{10} 2$$
$$n(2\log_{10} 2 + 3\log_{10} 3 - 2) > \log_{10} 2$$
$$n \times (2 \times 0.3010 + 3 \times 0.4771 - 2) > 0.3010$$
$$0.0333n > 0.3010$$
$$n > 9.039$$

（答）10 年後

【研究】電卓で 1.08 を 10 回たたいてみて下さい.

【演習 10 解答例】

$$\begin{cases} 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ & \cdots ① \\ \sin\theta = \dfrac{4}{5} & \cdots ② \end{cases}$$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

$$\cos\theta = \pm\frac{3}{5}$$

$\cos\theta = \dfrac{3}{5}$ のとき $\tan\theta = \dfrac{4}{3}$

$\cos\theta = -\dfrac{3}{5}$のとき$\tan\theta = -\dfrac{4}{3}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{3}{5} \\ \tan\theta = \dfrac{4}{3} \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{3}{5} \\ \tan\theta = -\dfrac{4}{3} \end{cases} \cdots (\text{答})$$

【演習 11 解答例】

$$\begin{cases} 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \cdots ① \\ 2\cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 = 0 \cdots ② \end{cases}$$

②より

$2(1-\sin^2\theta) + 3\sin\theta - 3 = 0$

$2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$

$(2\sin\theta - 1)(\sin\theta - 1) = 0$

$\sin\theta = \dfrac{1}{2}, 1$

①より

$\theta = 30^\circ,\ 90^\circ,\ 150^\circ \cdots (\text{答})$

【演習 12 解答例】

$$\begin{cases} y = -\sqrt{3}x + 3 & \cdots ① \\ y = x + 2 & \cdots ② \end{cases}$$

$y = -\sqrt{3}x$ と $y = x$ のなす角を求めればよい.

$0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$より

なす角は $75^\circ \cdots (\text{答})$

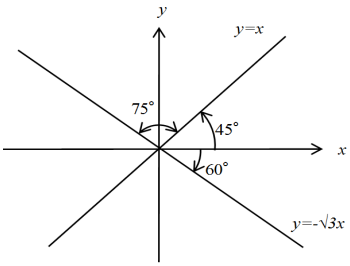


図 6

【演習 13 解答例】

(1) $\begin{cases} 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ & \cdots ① \\ \sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2} & \cdots ② \end{cases}$

②の両辺を 2 乗して

$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \dfrac{1}{4}$

$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{4}$

$2\sin\theta\cos\theta = -\dfrac{3}{4}$

$\sin\theta\cos\theta = -\dfrac{3}{8} \cdots$(答)

(2) $\sin^3\theta + \cos^3\theta = (\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)$

$= (\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta)$

$= \dfrac{1}{2} \times \left(1 + \dfrac{3}{8}\right)$

$= \dfrac{11}{16} \cdots$(答)

(3) $A = \sin\theta - \cos\theta$とおく

$A^2 = (\sin\theta - \cos\theta)^2$

$= 1 - 2\sin\theta\cos\theta$

$= 1 + 2 \times \dfrac{3}{8} = \dfrac{7}{4}$

①の範囲で $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{-3}{8} < 0$

だから $\sin\theta > 0, \cos\theta < 0$

よって $\sin\theta - \cos\theta > 0$

$A = \sqrt{\dfrac{7}{4}} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$　よって

$\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{\sqrt{7}}{2} \cdots$(答)

(4) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

より

$$\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}\\ \cos\theta=\dfrac{1-\sqrt{7}}{4}\end{cases}\quad\cdots(\text{答})$$

【演習 14 解答例】

△ABC において

$\angle BAC=45^\circ$

$\dfrac{AC}{\sin 75^\circ}=\dfrac{100}{\sin 45^\circ}\cdots①$

△ACD において

$AD=AC\times\sin 45^\circ\cdots②$

①, ②より

$AD=\dfrac{\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ}\times 100\times\sin 45^\circ$

$=100\sin 75^\circ$

$=100\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$=25(\sqrt{6}+\sqrt{2})\quad(m)$

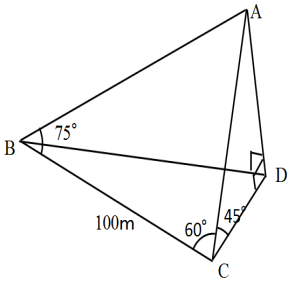


図 7

22

【解説】

$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ)$

$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$を用いた.

【演習 15 解答例】

図**??**は，点 O を中心とする単位円である．円周上の点 A，B を図のように定める．

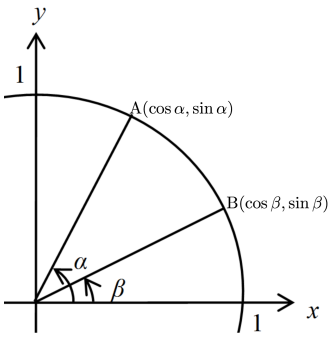


図 8

△OAB に余弦定理を用いると

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2\mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB} \cos(\alpha - \beta) = 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha - \beta)$$

よって

$$\mathrm{AB}^2 = 2 - 2\cos(\alpha - \beta) \cdots ①$$

また，2 点間の距離の公式を用いると

$$\mathrm{AB}^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$$

$$= (\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta) + (\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta)$$

$$= (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + (\cos^2\beta + \sin^2\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$$

よって

$$\mathrm{AB}^2 = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)\cdots②$$

①,②より

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cdots(4)\text{ 式}$$

が成り立つ.

④式で $\beta \to -\beta$ と書き換えると

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)$$

$\cos(-\beta) = \cos\beta$

$\sin(-\beta) = -\sin\beta$より

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\cdots(3)\text{ 式}$$

が成り立つ.

(3) 式で $\alpha \to \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ で置き換えると

$$\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right\} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta - \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta\cdots③$$

ここで

$$\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right\} = \cos\left\{\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right\} = \sin(\alpha-\beta)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha \quad \text{より}$$

③ 式は

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\cdots(2)\text{ 式}$$

となる.

(2) 式で $\beta \to -\beta$ と置き換えると

24

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$

$$\cos(-\beta)=\cos\beta$$

$$\sin(-\beta)=-\sin\beta \quad \text{より}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\cdots(1)\ \text{式}$$

となる.

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, 加法定理 (1) 式, (2) 式より

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

分子, 分母を $\cos\alpha\cos\beta$ で割ると

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

よって

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\cdots(5)\ \text{式}$$

が成り立つ.

(5) 式で $\beta\to-\beta$ と置き換えると

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}$$

$\tan(-\beta)=-\tan\beta$より

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\cdots(6)\ \text{式}$$

が成り立つ.

以上により証明終了.

【演習 16 解答例】

$$\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi & \cdots①\\ \sin\alpha=\dfrac{3}{5} & \cdots②\end{cases}$$

①, ②よりαは図**??**のような角だから

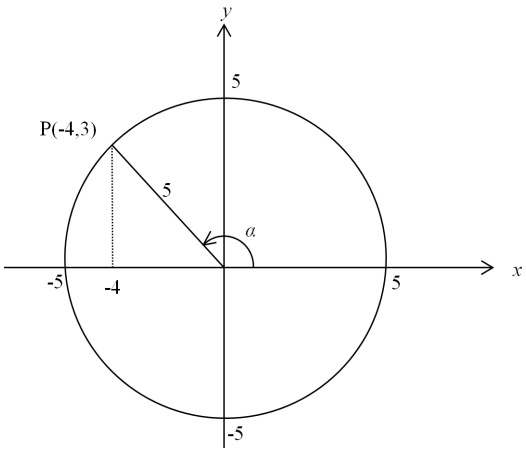


図 9

$\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$, $\tan\alpha = -\dfrac{3}{4}$

(1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$= 2 \times \frac{3}{5} \times \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25} \cdots (答)$$

(2) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$$= 2 \times \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{7}{25} \cdots (答)$$

(3) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
において$\alpha \to \dfrac{\alpha}{2}$とすると

$\cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 1$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{1+\left(-\frac{4}{5}\right)}{2} = \frac{1}{10}$$

26

①より

$$\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$$

よって $\cos\dfrac{\alpha}{2} > 0$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \cdots (\text{答})$$

(4) $\tan 2\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \dfrac{-\dfrac{24}{25}}{\dfrac{7}{25}} = -\dfrac{24}{7} \cdots (\text{答})$

【演習 17 解答例】

(1) $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha)$

$= \sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha$

$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + (1 - 2\sin^2\alpha)\sin\alpha$

$= 2\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) + (1 - 2\sin^2\alpha)\sin\alpha$

$= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \cdots (\text{答})$

(2) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

辺々を加えると

$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta \cdots ①$

$\begin{cases} \alpha + \beta = A \\ \alpha - \beta = B \end{cases}$ とおくと

$\alpha = \dfrac{A+B}{2}, \beta = \dfrac{A-B}{2}$ よって

$\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} \cdots (\text{答})$

【3 章の演習解答の解答例】

【演習 1 解答例】

(1) $\vec{c} = k\vec{a} + \ell\vec{b}$ より

$$(2, 18) = k(7, -2) + \ell(3, 1) \iff \begin{cases} 2 &= 7k + 3\ell \quad \cdots ① \\ 18 &= -2k + \ell \quad \cdots ② \end{cases}$$

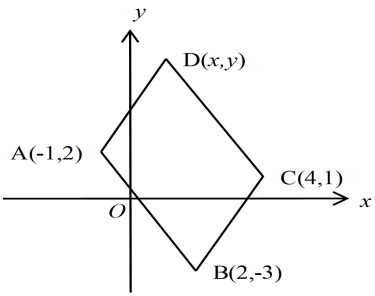
① − ② × 3 より

$-52 = 13k$

$k = -4, \ell = 10$

よって $\vec{c} = -4\vec{a} + 10\vec{b} \cdots$(答)

(2) 図**??**より $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となればよい.



$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (x + 1, y - 2)$

$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (2, 4)$ より

$$\begin{cases} x + 1 = 2 \\ y - 2 = 4 \end{cases}$$

よって $x = 1, y = 6$

$\mathrm{D}(1, 6) \cdots$(答)

図 10

【演習 2 解答例】

(1) $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$

$= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}$

$= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$

よって

$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \cdots$(答)

(2) 題意より $7 = 1 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 9$

28

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{3}{2}\cdots$(答)

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$より

$\cos\theta=\dfrac{\frac{3}{2}}{1\times 3}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leq\theta\leq 180^\circ$より

$\theta=60^\circ\cdots$(答)

【解説】

(1) の結果より

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos\theta$

図**??**より，この式は余弦定理そのものであることがわかる.

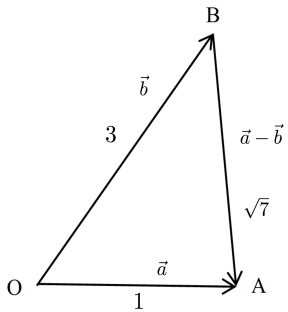


図 11

$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$は重要な公式で

$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

など多項式の展開と同様な公式が証明できる.

【演習 3 解答例】

(1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a_1,a_2),\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(b_1,b_2)$

2 点間の距離の公式より

$$\mathrm{AB}^2 = \left\{\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}\right\}^2$$

$$= (a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-2(a_1b_1+a_2b_2)\cdots①$$

△OAB で余弦定理を用いて

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = \left(\sqrt{a_1^2+a_2^2}\right)^2+\left(\sqrt{b_1^2+b_2^2}\right)^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$= (a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-2\vec{a}\cdot\vec{b}\cdots②$$

①,②より

$$-2\vec{a}\cdot\vec{b} = -2(a_1b_1+a_2b_2)$$

よって

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1+a_2b_2$$

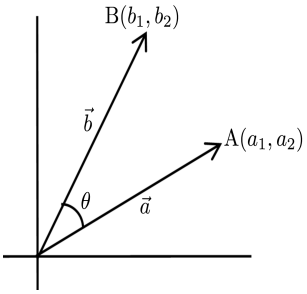


図 12

(2) $\vec{a}=(1,\sqrt{3}), \vec{b}=(\sqrt{3},1)$ より

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4}\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より

$\theta = 30^\circ \cdots$(答)

【演習 4 解答例】

$\vec{a} = (3, 4) \cdots ①$

平行な単位ベクトル $\vec{e_1}$ は，同じ向きの単位ベクトルと逆向きの単位ベクトルがあるから

$|\vec{a}| = 5$ より

$$\vec{e_1} = \pm\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \pm\frac{1}{5}(3, 4) = \left(\pm\frac{3}{5}, \pm\frac{4}{5}\right) \text{ 複号同順}$$

垂直な単位ベクトル $\vec{e_2} = (x, y) \cdots ②$ とおくと

$\vec{a} \perp \vec{e_2}$ より $\vec{a} \cdot \vec{e_2} = 0$ よって

$$3x + 4y = 0 \cdots ③$$

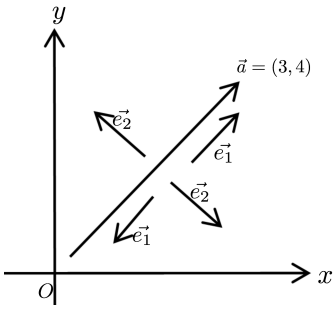


図 13

$|\vec{e_2}| = 1$ より

$|\vec{e_2}| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$

$$x^2 + y^2 = 1 \cdots ④$$

③ より $y = -\frac{3}{4}x$　④ へ代入

$$x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 1$$

$$\frac{25}{16}x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{16}{25}$$

$$x = \pm\frac{4}{5}$$

$x = \dfrac{4}{5}$のとき③より $y = -\dfrac{3}{5}$

$x = -\dfrac{4}{5}$のとき③より $y = \dfrac{3}{5}$

$\vec{e_2} = \left(\pm\dfrac{4}{5}, \mp\dfrac{3}{5}\right)$ 複号同順

【演習 5 解答例】

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & y \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(1) $AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-4 & 2y-6 \\ -x+2 & -y+3 \end{pmatrix}$

$AB = O$ より

$$\begin{cases} 2x-4=0 & \cdots① \\ -x+2=0 & \cdots② \\ 2y-6=0 & \cdots③ \\ -y+3=0 & \cdots④ \end{cases}$$

①, ②より $x = 2$

③, ④より $y = 3$

$x = 2, y = 3 \cdots$(答)

(2) $BA = \begin{pmatrix} x & y \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y & -2x+y \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

となり $BA = O$ となる x, y は存在しない. $\cdots$(答)

(3) 一般に行列の積では $AB \neq BA$ である.

$A \neq 0, B \neq 0$ のとき, $AB = 0$ となる行列 B は存在することがある.

【演習 6 解答例】

$A^2 - (a+d)A = A\{A - (a+d)E\}$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -ad+bc & 0 \\ 0 & -ad+bc \end{pmatrix} = -(ad-bc)E$$

よって $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=0$ が成り立つ.

【演習 7 解答例】

ケーリー・ハミルトンの定理

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=0$ において $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots①$

$a+d=1, ad-bc=1$ より

$$A^2-A+E=0$$

よって

$A^2=A-E\cdots$①の両辺に A をかけて

$$A^3=A^2-A$$
$$A^4=A^3-A$$
$$A^5=A^4-A^3$$
$$A^6=A^5-A^4$$

辺々を加えて

$$A^6=E$$

よって $A^6=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

【演習 8 解答例】

$A=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\cdots①$

ケーリー・ハミルトンの定理より

$A^2-5A+OE=O$

$A^2=5A\cdots②$

②の両辺に $A^{n-1}(n\geq 2)$ をかけて

$A^{n+1}=5A^n\cdots③$

これは $n=1$ のときも成り立つ.

(1) $A^n = 5A^{n-1}$

$= 5^2 A^{n-2}$

$= 5^{n-1}A$

$A^n = 5^{n-1}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\cdot 5^{n-1} & 3\cdot 5^{n-1} \\ -2\cdot 5^{n-1} & -5^{n-1} \end{pmatrix} \cdots$(答)

(2) $A + A^2 + \cdots + A^n$

$= A + 5A + \cdots + 5^{n-1}A$

$= (1 + 5 + \cdots + 5^{n-1})A$

$= \dfrac{5^n - 1}{5 - 1}A$

$= \dfrac{5^{n-1}}{4}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2}(5^{n-1}) & \dfrac{3}{4}(5^{n-1}) \\ -\dfrac{1}{2}(5^{n-1}) & -\dfrac{1}{4}(5^{n-1}) \end{pmatrix} \cdots$(答)

【演習 9 解答例】

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(1) $\triangle = 1 - 2 = -1 \neq 0$ より P^{-1} が存在し

$$P^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) $B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ より

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

より $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

(注) 厳密には数学的帰納法で証明する.

(4) $B = P^{-1}AP$ より

$$B^n = (P^{-1}AP)^n = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)$$
$$= P^{-1}A^nP$$

$B^n = P^{-1}A^nP$ の両辺に左から P, 右から P^{-1}をかけると

$$PB^nP^{-1} = A^n$$
$$A^n = PB^nP^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1+2^{n+1} & -1+2^n \\ 2-2^{n+1} & 2-2^n \end{pmatrix}\cdots(\text{答})$$

【演習 10 解答例】

雨粒は無風状態であれば地面に対して垂直に約 5m/s で落下している．この速度ベクトルを $\overrightarrow{v}_{\text{地}\to\text{雨}}$ で表す．このベクトルの大きさは 5 であり，地面に向かって垂直下向きである.

次に，我々が車に乗って時速 36km/h で水平に走っているとき，車は地面に水平に秒速 10m/s で移動する．この速度ベクトルを $\overrightarrow{v}_{\text{地}\to\text{車}}$ で表す．このベクトルの大きさは 10 で，向きは地面に平行である.

さて，車から雨を見れば，そのベクトルは

$$\overrightarrow{v}_{\text{車}\to\text{雨}} = \overrightarrow{v}_{\text{車}\to\text{地}} + \overrightarrow{v}_{\text{地}\to\text{雨}} = -\overrightarrow{v}_{\text{地}\to\text{車}} + \overrightarrow{v}_{\text{地}\to\text{雨}} = \overrightarrow{v}_{\text{地}\to\text{雨}} - \overrightarrow{v}_{\text{地}\to\text{車}}$$

であり，図 **??**のように雨粒が斜めに見える.

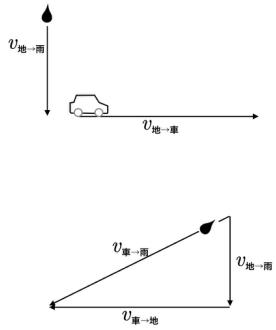


図 14

一般に，静止している座標系に対し $\overrightarrow{v}_a$ で動く点 A を基準に，$\overrightarrow{v}_b$ で動く点 B の運動を見るとき，その相対速度 $\overrightarrow{v}_{a\to b}$ は

$$\overrightarrow{v}_{a\to b} = \overrightarrow{v}_b - \overrightarrow{v}_a$$

で与えられる．

【演習 11 解答例】

交差点に向かって，図 **??**のように 2 台の車 (A, B) が等速で直進してくる場合，A から見た B の位置は，ほとんど変化しない．人間の目は，動いているものの認識はしやすいが，停止しているものへの認識はしにくいという特性がある．また，正面に近い中心視野には注意が向きやすいが，その周りの周辺視野では把握する情報に注意が向きにくいという特性もある．このような要因が重なり，見えてはいるがそれに注意が向かないという現象が起こるのである．このような錯視があるということを十分に認識し，注意されたい．

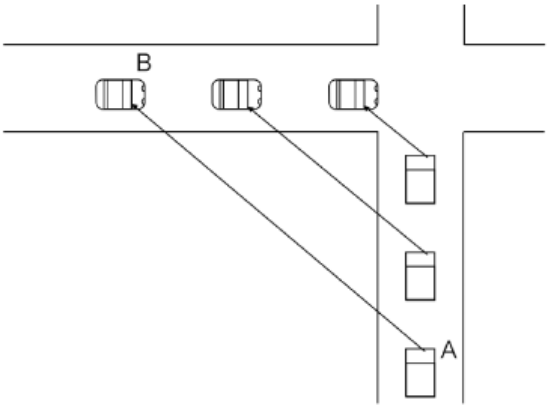


図 15

【演習 12 解答例】

例えば，図**??**は高速道路交通網の例であるが，インターチェンジあるいはジャンクションを頂点に道路を辺に対応させればグラフの言葉で問題を定式化できる．鉄道網であれば，駅が頂点，線路が辺となる．

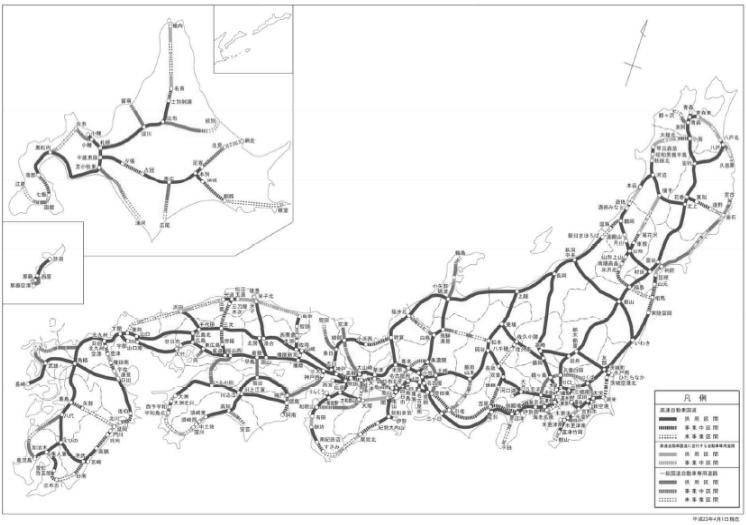


図 16　高規格幹線道路網図（国土交通省道路局
http://www.mlit.go.jp/road/sisaku/dorogyousei/0.pdf）

【演習 13 解答例】

グラフを図示するとき，辺に矢印を付けるのが有向グラフ，矢印がないのが無向グラフである．有向グラフでは，頂点 u から v に向かう辺 (u, v) と，v から u に向かう辺 (v, u) は別の辺である．一方だけが存在することもあり得る．両方が存在する場合でも，その属性がおなじである必要がない．無向グラフの場合は，辺 (u, v) と (v, u) は同じものである．

従って，無向グラフの記述を有向グラフに書き直すには，図示したグラフの辺に矢印をつけ，それに対応して，ある頂点 u，v に対する辺 (u, v) と (v, u) のうちの矢印に対応するもののみを選択する．

【演習 14 解答例】

例えば，図**??**の有向グラフの隣接行列は，図**??**となる．

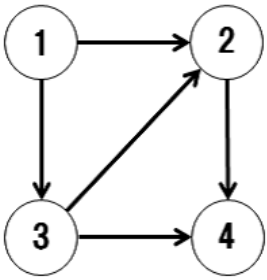


図 17　有向グラフの例

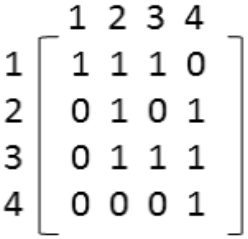


図 18　図**??**の隣接行列

一方，向きを反転した有向グラフは図**??**となり，その隣接行列は図**??**となる．

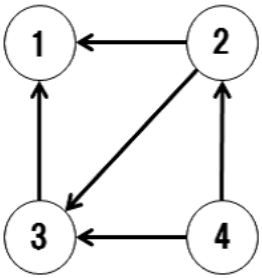


図 19　向きを反転したグラフ

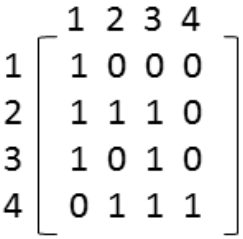


図 20　図**??**の隣接行列

2 つの隣接行列を比較する．最初の有向グラフの隣接行列を A, その要素を (i, j) とすると，向きを変えた有向グラフの隣接行列は， A の (i, j) 要素と (j, i) 要素を入れ替えた A の**転置行列**（transposed matrix）A^T となっていることがわかる．転置行列は，行列 A に対してその対角線で要素を折り返した行列のことである．すなわち，有向グラフの向きを変えたグラフの隣接行列は，もとの行列の転置行列となる．

【4 章演習問題の解答】

【1】

※ [ ] 内は便宜上のもので数学的には正しい記法ではない.

(1) $\lim_{x\to 6}\sqrt{x+3}=\sqrt{6+3}=3$

(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\left[\dfrac{1}{+0}\right]=\infty$

(3) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\dfrac{(x+4)(x-1)}{(x+2)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\dfrac{x+4}{x+2}=\dfrac{1+4}{1+2}=\dfrac{5}{3}$

(4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{x(\sqrt{1-x}+1)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{(1-x)-1}{x(\sqrt{1-x}+1)}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{-1}{\sqrt{1-x}+1}=\dfrac{-1}{\sqrt{1-0}+1}=-\dfrac{1}{2}$

(5) $\lim_{x\to 2-0}\dfrac{1}{(x-2)^3}=\left[\dfrac{1}{\{(2-0)-2\}^3}=\dfrac{1}{-0}\right]=-\infty$

(6) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{x-4}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x+5/x}{1-4/x}=\infty$

【2】

(1) $y'=3\cdot\left\{-\dfrac{(2x+1)'}{(2x+1)^2}\right\}=-\dfrac{6}{(2x+1)^2}$

(2) $u=-x+2$ とおくと $y=\sqrt{u^3}$ となるから, $\dfrac{dy}{du}=\dfrac{3}{2}\sqrt{u}$, $\dfrac{du}{dx}=-1$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}=\dfrac{3}{2}\sqrt{u}\cdot(-1)=-\dfrac{3}{2}\sqrt{-x+2}$

(3) 積の微分公式によって

$y'=x'\log x+x(\log x)'=1\cdot\log x+x\dfrac{1}{x}=\log x+1$

(4) $y'=\dfrac{1'\sin x-1\cdot(\sin x)'}{\sin^2 x}=-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

(5) $t=x-\dfrac{\pi}{6}$ とおくと $y=\cos t$, よって $\dfrac{dy}{dt}=-\sin t$, $\dfrac{dt}{dx}=1$

$\therefore\ y'=\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx}=(-\sin t)\cdot 1=-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

(6) $t=-\dfrac{1}{x}$ とおくと $y=e^t$. よって $\dfrac{dy}{dt}=e^t$, $\dfrac{dt}{dx}=x^{-2}=\dfrac{1}{x^2}$

$$\therefore\ y' = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = e^t \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$$

【3】

(1) $y = x^3 - 3x + 1$ を微分して $y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. $y' = 0$ は $x = -1, 1$ のときで，増減表は

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	3	↘	-1	↗

よって，グラフは

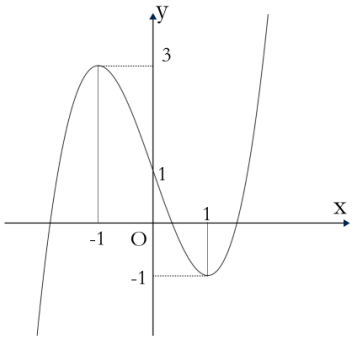


図 21

(2) $y = \dfrac{2x^2 + x + 2}{x^2 + 1} = 2 + \dfrac{x}{x^2 + 1}$ を微分して

$$y' = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2+1)^2} = -\frac{(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$y' = 0$ は $x = -1, 1$ のときで，増減表は

また $\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\left(2 + \dfrac{x}{x^2+1}\right) = 2$, $\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\left(2 + \dfrac{x}{x^2+1}\right) = 2$

より，グラフは

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$

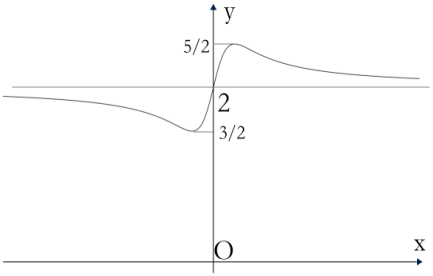


図 22

【4】

(1) $t = x + 2$ とおくと，$x = t - 2$．t で微分すると $\dfrac{dx}{dt} = 1$.

$$\int \sqrt[3]{(x+2)^2}dx = \int t^{\frac{2}{3}}dt = \frac{1}{\frac{2}{3}+1}t^{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{3}{5}\sqrt[3]{(x+2)^5} + C$$

(2) $t = ax - b$ とおくと，$x = \dfrac{t+b}{a}$．t で微分して $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{a}$.

$$\int (ax-b)^3 dx = \int t^3 \frac{1}{a}dt = \frac{1}{4a}t^4 + C = \frac{(ax-b)^4}{4a} + C$$

(3) $t = 2x^2 + 1$ とおくと，$x^2 = \dfrac{t-1}{2}$．t で微分して $2x\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \quad xdx = \dfrac{1}{4}dt.$

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}dx = \int \frac{1}{4\sqrt{t}}dt = \frac{1}{4}\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}t^{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2+1} + C$$

(4) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ だから,

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-(\cos x)'}{\cos x} dx = -\log|\cos x| + C$$

(5)

$$\int (2x+1)\cos x dx = (2x+1)\sin x - \int (2x+1)'\sin x dx$$

$$= (2x+1)\sin x - \int 2\sin x dx = (2x+1)\sin x + 2\cos x + C$$

(6)

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} dx$$

ここで $\cos x = t$ とおくと, $-\sin x dx = dt$ で,

$$\int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} dx = \int \frac{-dt}{1-t^2} = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\log|t-1| - \log|t+1|\right) + C = \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C = \frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C$$

【5】

(1) $\displaystyle\int_0^3 3x^2 dx = \Big[x^3\Big]_0^3 = 3^3 - 0^3 = 27$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\cos\frac{\pi}{4} + \cos 0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

(3) $t = x+1$ とおくと $x = 0$ のとき $t = 1$, $x = 1$ のとき $t = 2$ となり, $\dfrac{dt}{dx} = 1$ つまり $dx = dt$ であるから

$$\int_0^1 (x+2)\sqrt{x+1} dx = \int_1^2 (t+1)\sqrt{t} dt = \int_1^2 (t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}}) dt = \Big[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big]_1^2$$

$$= \frac{2}{5}2^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} - \frac{2}{3} = \frac{2}{5}\cdot 4\sqrt{2} + \frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2} - \frac{16}{15} = \frac{44\sqrt{2} - 16}{15}$$

(4) $x = \tan\theta$ とおくと $x = 0$ のとき $\theta = 0$, $x = 1$ のとき $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ となり, $\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ つまり $dx = \dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$ であるから

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2\theta+\tan^2\theta\cdot\cos^2\theta}d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

(5) $\Big[xe^x\Big]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 1\cdot e^x dx = e - \Big[e^x\Big]_0^1 = 1$

(6)

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = \int_\alpha^\beta (x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}dx$$

$$= \int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}dx = \Big[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3 - \frac{(\beta-\alpha)}{2}(x-\alpha)^2\Big]_\alpha^\beta$$

$$= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 - \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3 = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

【6】

(1) $x^2-4x+3=0$ を解いて, $x=1$, $x=3$ において x 軸と交わり, **図??**に示すように $1 \le x \le 3$ では $y < 0$ となるから, 面積 S は

$$S = -\int_1^3 (x^2-4x+3)dx = -\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_1^3 = \frac{4}{3}$$

(2) $y = x(x+1)(x-2)$ と因数分解され, この曲線は x 軸と $x = 0, -1, 2$ の 3 点で交わる. $-1 \le x \le 0$ で $y \ge 0$, $0 \le x \le 2$ で $y \le 0$ だから求める面積 S は,

$$S = \int_{-1}^0 (x^3-x^2-2x)dx + \int_0^2 -(x^3-x^2-2x)dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4}-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^4}{4}+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2 = \frac{37}{12}$$

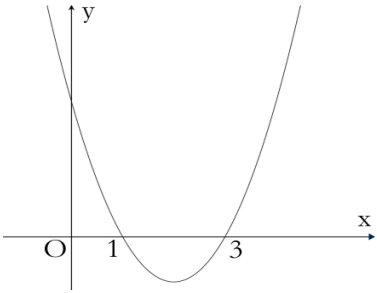


図 23

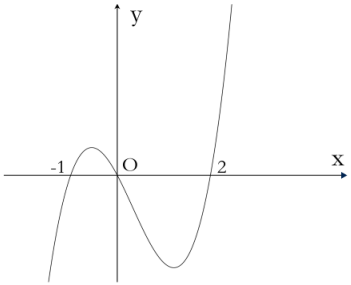


図 24

(3) 楕円と x 軸との交点は，$y=0$ として，$x=-a, a$．この楕円は x 軸，y 軸に関して対象であるから，求める面積 S は楕円の第一象限の部分と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積を 4 倍して求められる．楕円の $x>0, y>0$ の部分は，式を変形して $y=b\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}$ だから，

$$S=4\int_0^a b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx$$

ここで $\dfrac{x}{a}=t$ とおくと $x=0$ は $t=0$，$x=a$ は $t=1$，$\dfrac{1}{a}dx=dt$ だから，

$$S = 4\int_0^1 b\sqrt{1-t^2}\cdot a dt = 4ab\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$$

ここで $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$ は半径 1 の四分円の面積を表し，その値は $\dfrac{\pi}{4}$ である．
よって $S = ab\pi$

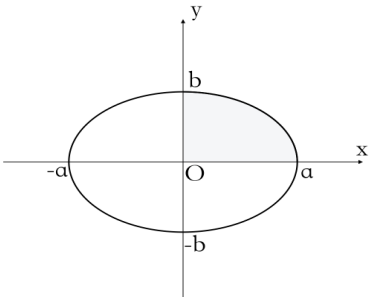


図 25

【7】 $x+\sqrt{1+x^2}$ を x で微分すると，

$$\left(x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right)' = 1+\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x = 1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}$$

よって，$x+\sqrt{1+x^2}=t$ の両辺をそれぞれ微分して $\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}dx = dt$
これを変形して，$\dfrac{t}{\sqrt{1+x^2}}dx = dt.\quad \therefore \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \dfrac{1}{t}dt.$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \frac{1}{t}dt = \log|t| + C = \log\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C$$

【8】 与えられた式は長径 a，短径 b の楕円であり，グラフは**図??**である．y 軸まわりに回転した回転体の体積は $V = \pi\displaystyle\int_{-b}^{b} x^2 dy$ で計算されるから，与えら

れた式を

$$x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

と変形して，上下の対称性を考慮して $x = 0$ から b までの定積分を計算し 2 倍すればよい．

$$V = 2\cdot\pi\int_0^b x^2 dy = 2\pi\int_0^b a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)dy = 2\pi a^2\left[y - \frac{y^3}{3b^2}\right]_0^b = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

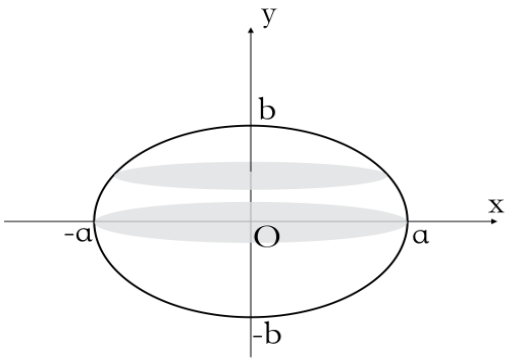


図 26

【9】 この円のうち，中心 (0,2) より上にある部分を $y_1 = 2+\sqrt{1-x^2}$，下部を $y_2 = 2-\sqrt{1-x^2}$ とおく．この円は半径 1 だから，立体が存在する x の範囲は $-1 \le x \le 1$ である．求める体積 V は，y_1 と 2 直線 $x = -1, x = 1(0 \le y \le 2)$ とで囲まれた図形を x 軸周りに回転してできる立体の体積 V_1 から，y_2 と直線 $x = -1, x = 1(0 \le y \le 2)$ とで囲まれた図形を x 軸周りに回転してできる立体の体積 V_2 をひいたものである．

$$V = V_1 - V_2 = \int_{-1}^1 \pi y_1^2 dx - \int_{-1}^1 \pi y_2^2 dx$$

$$= \int_{-1}^1 \pi\{4+4\sqrt{1-x^2}+(1-x^2)\}dx - \int_{-1}^1 \pi\{4-4\sqrt{1-x^2}+(1-x^2)\}dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 8\pi\sqrt{1-x^2}dx$$

ここで $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$ は，半径 1 の円の上半分の面積を表し，その値は $\frac{\pi}{2}$ である．よって，求める体積は

$$V = 8\pi\frac{\pi}{2} = 4\pi^2$$

【10】

(1) $B(q,p) = \int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-1}dx$ において $1-x=t$ とおくと $x=1-t$ だから，$x=0$ のとき $t=1$，$x=1$ のとき $t=0$，$dx=-dt$ より，

$$B(q,p) = \int_1^0 (1-t)^{q-1}t^{p-1}\cdot(-dt) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$$

ここで，定積分の変数は他の文字にしてもよいので，t を x とすれば

$$\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = B(p,q)$$

$$\therefore \quad B(p,q) = B(q,p)$$

(2) $B(p,q)$

$$= \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \Big[\frac{x^p}{p}(1-x)^{q-1}\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^p}{p}\{(1-x)^{q-1}\}'dx$$

$$= 0 - \int_0^1 \frac{x^p}{p}(q-1)(1-x)^{q-2}\cdot(-1)dx = \int_0^1 \frac{q-1}{p}x^p(1-x)^{q-2}dx$$

$$= \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{(p+1)-1}(1-x)^{(q-1)-1}dx = \frac{q-1}{p}B(p+1,q-1)$$

(3) (2) より

$$B(p,q) = \frac{q-1}{p}B(p+1,q-1) = \frac{q-1}{p}\frac{q-2}{p+1}B(p+2,q-2) = \cdots\cdots$$

$$= \frac{(q-1)(q-2)\cdots 1}{p(p+1)(p+2)\cdots(p+q-2)} B(p+q-1,1)$$

ここで $B(p+q-1,1)$ は

$$B(p+q-1,1) = \int_0^1 x^{p+q-2}dx = \Big[\frac{x^{p+q-1}}{p+q-1}\Big]_0^1 = \frac{1}{p+q-1}$$

であるから,

$$B(p,q) = \frac{(q-1)(q-2)\cdots 1}{p(p+1)(p+2)\cdots(p+q-2)} \frac{1}{p+q-1}$$

$$= \frac{(q-1)!}{p(p+1)\cdots(p+q-1)} = \frac{(q-1)!}{(p+q-1)\cdots(p+1)p} \cdot \frac{(p-1)!}{(p-1)!}$$

$$= \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$$

【5 章の演習問題の解答】

【1】

2 本当たる確率を P_1 とおくと

$$P_1 = \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$$

1 本当たる確率を P_2 とおくと

$$P_2 = \frac{{}_2C_2 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} = \frac{6}{10}$$

2 本ともはずれる確率を P_3 とおくと

$$P_3 = \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$$

X=1000,100,-500 より

$E(X) = 1000 \times \frac{1}{10} + 100 \times \frac{6}{10} + (-500) \times \frac{3}{10}$

$$= \frac{1000 + 600 - 500}{10} = \frac{100}{10} = 10(\text{円})$$

期待金額が 10 円なので期待金額の考え方からするとこのくじを引くことは得であるといえる.

【2】

(1) $(15 + 20 + 35 + 40 + 50) \div 5 = 32$

(2) 小さい順に並べて，1　4　6　8　9　10　　$\therefore (6 + 8) \div 2 = 7$

(3) 出現頻度をかぞえる
9:1(回) 3:2(回) 6 :2(回) 4 :3(回) 10:2(回) 1 :1(回) 8:1(回) 7:1(回) であるから，　最も多いのは 4 の 3 回.

(4) 平均値 $51 \div 5 = 10.2$,
分散
$= (8 - 10.2)^2 + (9 - 10.2)^2 + (10 - 10.2)^2 + (11 - 10.2)^2 + (13 - 10.2)^2 \div 5$

$= ((-2.2)^2 + (-1.2)^2 + (-0.2)^2 + 0.8^2 + 2.8^2) \div 5$

$= (4.84 + 1.44 + 0.04 + 0.64 + 7.84) \div 5$

$= 14.8 \div 5 = 2.96$

標準偏差は 1.7

(5) 中央値（仮の平均値）からの差を求めると $(-2) + (-1) + 0 + 1 + 3 = 1$ ∴ $1 \div 5 = 0.2$ よって求める平均値は $10 + 0.2 = 10.2$.

【3】

	x	y	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})$	$y - \bar{y}$	$(y - \bar{y})$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
A	8	7	0	0	0	0	0
B	7	5	-1	1	-2	4	2
C	9	9	1	1	2	4	2
D	9	7	1	1	0	0	0
E	7	7	-1	1	0	0	0
計	40	35	0	4	0	8	4

x の平均値$\bar{x} = \frac{40}{5} = 8$ 点，x の分散 ${s_x}^2 = \frac{4}{5} = 0.8$ 点

y の平均値$\bar{x} = \frac{35}{5} = 7$ 点，y の分散 ${s_y}^2 = \frac{8}{5} = 1.6$

x の標準偏差 $s_x = \sqrt{0.8} \fallingdotseq 0.89$ 点

y の標準偏差 $s_y = \sqrt{1.6} \fallingdotseq 1.26$ 点

共分散 $s_{xy} = \frac{4}{5} = 0.8$

相関係数 $r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{0.8}{\sqrt{0.8}\sqrt{1.6}} = \frac{0.8}{\sqrt{0.8}\sqrt{0.8}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\fallingdotseq \frac{1.414}{2} \fallingdotseq 0.707 \fallingdotseq 0.71$$

標準偏差は

$$\frac{\text{得点} - \text{平均点}}{\text{標準偏差}} \times 10 + 50$$

で定義される量である．得点から平均点を引いた偏差をちらばり具合を表す標準偏差で標準化し，評価しやすくするためにその値を 10 倍し，50 を加えた値である．試験の点数などでは平均点が偏差値の 50 点となり見やすくなっている．また同じ得点であっても，平均点，標準偏差の大小により、客観的な評価

ができるといわれている.

この問いではC君の数学と英語は同じ9点であるが,

数学の偏差値

$$\frac{9-8}{0.89}\times 10+50 \fallingdotseq 61.2 \text{ 点}$$

英語の偏差値

$$\frac{9-7}{1.26}\times 10+50 \fallingdotseq 65.9 \text{ 点}$$

となり，英語の得点のほうが高く評価されるという結果となる.

【4】

得点データ	階級値 x	度数 f	xf	$\lvert x-\bar{x}\rvert$	$(x-\bar{x})^2 f$
$15-25$	20	1	20	37	1369
$25-35$	30	3	90	27	2187
$35-45$	40	8	320	17	2312
$45-55$	50	12	600	7	588
$55-65$	60	10	600	3	90
$65-75$	70	8	560	13	1352
$75-85$	80	6	480	33	3174
$85-95$	90	2	180		2178
		$n=50$	2850	160	13250

平均値 $\frac{2850}{50}=57$,　分散 $\frac{13250}{50}=265$,　標準偏差 $\sqrt{265}=16.3$.

【5】

$X: x_1, x_2, x_3 \cdots, x_n$ とおくと

X の平均$\bar{x}=\dfrac{x_1, x_2, \cdots, x_n}{n}$

偏差の合計平均は

$$\frac{1}{n}\{(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+\cdots+(x_n-\bar{x})\}$$

$$=\frac{1}{n}\{(x_1+x_2+\cdots+x_n)-n\bar{x}\}$$

$$=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\bar{x}$$

$$= \bar{x} - \bar{x} = 0$$

偏差の合計の平均が 0 となるため，ちらばり具合を表す量として使うことはできない.

【6】

【解答略】