第３章　行列式

C 発展問題の解答

$\boxed{47}$　$I_n = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ （$n \geqq 2$） とおくと，

$$\det I_n = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{2\text{行} \\ +1\text{行}\times(-1)}}{=} \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{1\text{列展開}}{=} -\det J_{n-1} = -a_{n-1}$$

である．

(1) $a_1 = \det(2) = 2$．　(2) $a_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3$．

(3) $a_3 = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{1\text{列展開}}{=} 2\det J_2 + \det I_2 = 2a_2 - a_1 = 4$．

(4) $a_4 = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{1\text{列展開}}{=} 2\det J_3 + \det I_3 = 2a_3 - a_2 = 5$．

(5) $a_n = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{1\text{列展開}}{=} 2\det J_{n-1} + \det I_{n-1} = 2a_{n-1} - a_{n-2}$　（$n \geqq 3$）

より，　$a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2} = \cdots = a_2 - a_1 = 1$ だから，数列 $\{a_n\}$ は初項が $a_1 = 2$，公差が 1 の等差数列である．したがって，$\underline{a_n = (n-1) + 2 = n+1}$．

$\boxed{48}$

(1)

$$\det B=\left\{\begin{pmatrix}a^2\\ac\\c^2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2ab\\ad+bc\\2cd\end{pmatrix}\right\}\cdot\begin{pmatrix}b^2\\bd\\d^2\end{pmatrix}=(ad-bc)\begin{pmatrix}c^2\\-2ac\\a^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b^2\\bd\\d^2\end{pmatrix}=(ad-bc)^3=(\det A)^3.$$

(2)　$\operatorname{rank} A=0$ より，$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ すなわち，$a=b=c=d=0$ だから

$$B=\begin{pmatrix}a^2&2ab&b^2\\ac&ad+bc&bd\\c^2&2cd&d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$ したがって，$\underline{\operatorname{rank} B=0}$.

(3)　$\operatorname{rank} A=1<2$ より，A は正則でないので，$\det A=ad-bc=0$．したがって，$ad=bc$ に注意しておく．また，$\operatorname{rank} A=1\neq 0$ より，$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ だから，a^2,b^2,c^2,d^2 のうち，少なくとも一つは 0 でないので

$$B=\begin{pmatrix}a^2&2ab&b^2\\ac&2bc&bd\\c^2&2cd&d^2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$ よって，$\operatorname{rank} B\geqq 1\cdots$① である．

一方，（上の）行列 B の各列ベクトルの外積を計算すると

$$(B\text{の1列})\times(B\text{の2列})={}^t(2c^2\det A,-2ac\det A,0)={}^t(0,0,0)$$

$$(B\text{の1列})\times(B\text{の3列})={}^t(cd\det A,-(ad+bc)\det A,ab\det A)={}^t(0,0,0)$$

$$(B\text{の2列})\times(B\text{の3列})={}^t(0,-2bd\det A,2b^2\det A)={}^t(0,0,0)$$

より，どの 2 つの列ベクトルも 1 次独立でないので（問題集 3 章例題 3.1(2)参照） $\operatorname{rank} B\leqq 1\cdots$② である．　したがって，①，② より，$\underline{\operatorname{rank} B=1}$.

(4)　$\operatorname{rank} A=2$ より，A は正則なので，$\det A\neq 0$．したがって，$\det B=(\det A)^3\neq 0$ だから，$\underline{\operatorname{rank} B=3}$.

$\boxed{49}$　3 次の単位行列を $E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ とおく.

(1)　$P_1=\left(E\text{の2行と3行と入れ換えた行列}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=P_1^{-1}$.

$$P_2=\left(E\text{の1行に3行の2倍を加えた行列}\right)=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ P_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

(2)　$P_2P_1A=E$ ・・・（＊）より，$\det\left(P_2P_1A\right)=\det P_2\cdot\det P_1\cdot\det A=\det E=1$.

ここで，$\det P_1=-1,\ \det P_2=1$ だから，$\underline{\det A=-1}$.　また，A の行列式は零でないので正則であるから，（＊）の両辺に A^{-1} を右からかけると，$P_2P_1=A^{-1}$ だから

$$A^{-1}=P_2P_1=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

(3)　$\vec{b}$ に同じ基本変形を行って得られるベクトルは，(2) の結果を利用すると $P_2P_1\vec{b}=A^{-1}\vec{b}$ である. これは, 連立方程式 $A\vec{x}=\vec{b}$ の解 $\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$ と一致している.

$\boxed{50}$　(1) i 次単位行列を E_i，$i\times j$ 型の零行列を $0_{i\times j}$ と表記する $(i,j=1,2,\cdots)$.

$B=\left(\begin{array}{c:c}\widetilde{A}^{(r)}&0_{r\times(n-r)}\\\hdashline\widetilde{A}_{21}&E_{n-r}\end{array}\right)$ とおくと，§3.3 例題 3.3 より，$|B|=\left|\widetilde{A}^{(r)}\right|\cdot\left|E_{n-r}\right|=\left|\widetilde{A}^{(r)}\right|$　$\cdots$ ①

同様に，$C=\left(\begin{array}{c:c}|A|E_r&A_{12}\\\hdashline0_{(n-r)\times r}&A_{(n-r)}\end{array}\right)$ とおくと，　$|C|=\left||A|E_r\right|\cdot\left|A_{(n-r)}\right|=|A|^r\cdot\left|A_{(n-r)}\right|$　$\cdots$ ②

$AB=\left(\begin{array}{c:c}A^{(r)}&A_{12}\\\hdashline A_{21}&A_{(n-r)}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c:c}\widetilde{A}^{(r)}&0_{r\times(n-r)}\\\hdashline\widetilde{A}_{21}&E_{n-r}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c:c}|A|E_r&A_{12}\\\hdashline0_{(n-r)\times r}&A_{(n-r)}\end{array}\right)=C$ より $|AB|=|A|\cdot|B|=|C|\cdots$③

したがって，①，②を③に代入して，$|A|\cdot\left|\widetilde{A}^{(r)}\right|=|A|^r\cdot\left|A_{(n-r)}\right|$.

(2) (1)の結果より，

$r=2$ のとき，$|A|\cdot\left|\widetilde{A}^{(2)}\right|=|A|^2\cdot\left|A_{(n-2)}\right|$ より， $|A|\cdot\left(\left|\widetilde{A}^{(2)}\right|-|A|\cdot\left|A_{(n-2)}\right|\right)=0$．

これは，行列 A の n^2 個の成分 $a_{ij}\,(1\leqq i,j\leqq n)$ に関する恒等式だから

例えば， $A=E_n$ のとき， $|A|=1\neq 0$ に注意すると（後の $\boxed{50}$ の注意参照）

$\left|\widetilde{A}^{(2)}\right|-|A|\cdot\left|A_{(n-2)}\right|=0$． したがって， $|A|\cdot\left|A_{(n-2)}\right|=\left|\widetilde{A}^{(2)}\right|$．

(3) A の (i,j) 余因子を $\tilde{a}_{ij}$ とおくと，

奇数次の交代行列の行列式は 0 だから（教科書 第 3 章演習問題 B 12 参照），

$$\tilde{a}_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&d&e\\-d&0&f\\-e&-f&0\end{vmatrix}=0,\quad \tilde{a}_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}0&b&c\\-b&0&f\\-c&-f&0\end{vmatrix}=0.$$ また

$$\tilde{a}_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-a&d&e\\-b&0&f\\-c&-f&0\end{vmatrix}\underset{3\text{列展開}}{=}-\left\{ebf-f\,(af+cd)\right\}=f\,(af-be+cd),$$

$$\tilde{a}_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}a&b&c\\-d&0&f\\-e&-f&0\end{vmatrix}\underset{3\text{列展開}}{=}-\left\{cdf-f\,(-af+be)\right\}=-f\,(af-be+cd).$$

以上より， $\left|\widetilde{A}^{(2)}\right|=\left|{}^t\begin{pmatrix}\tilde{a}_{11}&\tilde{a}_{12}\\\tilde{a}_{21}&\tilde{a}_{22}\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\tilde{a}_{11}&\tilde{a}_{21}\\\tilde{a}_{12}&\tilde{a}_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-f\,(af-be+cd)\\f\,(af-be+cd)&0\end{vmatrix}$．

したがって， $\left|\widetilde{A}^{(2)}\right|=f^2(af-be+cd)^2\cdots$④． また， $\left|A_{(2)}\right|=\begin{vmatrix}0&f\\-f&0\end{vmatrix}=f^2\cdots$⑤．

(2)の結果より， $n=4$ のとき， $|A|\cdot\left|A_{(2)}\right|=\left|\widetilde{A}^{(2)}\right|$．

これに④，⑤を代入して $|A|\cdot f^2=f^2(af-be+cd)^2$． したがって，

$f^2\left\{|A|-(af-be+cd)^2\right\}=0$ だから（後の $\boxed{50}$ の注意参照），$|A|=(af-be+cd)^2$．

50 の注意　$f(x_1,\cdots,x_n)$ と $g(x_1,\cdots,x_n)$ を実数係数（または複素数係数）の変数 $x_1,\cdots,x_n$ に関する多項式とする．次の定理が成り立つ．

$\boxed{\text{定理A}}$　ある n 個の数 $a_1,\cdots,a_n$ に対して，$f(a_1,\cdots,a_n)\neq 0$ のとき

$f(x_1,\cdots,x_n)\cdot g(x_1,\cdots,x_n)=0$ が $x_1,\cdots,x_n$ に関する恒等式ならば

$g(x_1,\cdots,x_n)=0$ も $x_1,\cdots,x_n$ に関する恒等式となる．□

注意：定理Aの証明には，次の定理Bを用いる．

$\boxed{\text{定理B}}$　$f(x)$ を実数係数（または複素数係数）の多項式とする．

多項式として $f(x)\neq 0$（（x に関する）0 でない係数がある）ならば

方程式 $f(x)=0$ の解は有限個（d 次方程式ならば d 個以下）．□

【証明】方程式の次数 d に関する帰納法により証明する．

(1)　$d=0$ のとき：$f(x)=C=(\text{定数})\neq 0$ だから，方程式 $f(x)=0$ は解を持たない．

すなわち，解の個数は $0=d$．

(2)　$d\geqq 1$ のとき：次の（ア），（イ）より主張が成り立つ．

（ア）　$f(x)=0$ が解を持たなければ，解の個数は $0(\leqq d)$．

（イ）　$f(x)=0$ が解 $x=a$ を持てば，$f(a)=0$ だから，因数定理により

$f(x)=(x-a)g(x)$（$g(x)$ は次数 $d-1$，$g(x)\neq 0$）と因数分解する．

帰納法の仮定より，方程式 $g(x)=0$ の解は，$d-1$ 個以下だから

方程式 $f(x)=0$ の解は，d 個以下となる．

(1)，(2) より，0 以上の整数 d に対して主張が成り立つ．■

【定理Aの証明】「等式 $f(x)=0$ が x に関する恒等式でなければ，多項式として $f(x)\neq 0$ である」ことに注意する（対偶を考えればあきらか）．

変数の個数 n に関する帰納法により，対偶：

ある n 個の数 $a_1,\cdots,a_n$ に対して，$f(a_1,\cdots,a_n)\neq 0$ のとき

$g(x_1,\cdots,x_n)=0$ が $x_1,\cdots,x_n$ に関する恒等式でないならば

$f(x_1,\cdots,x_n)\cdot g(x_1,\cdots,x_n)=0$ も $x_1,\cdots,x_n$ に関する恒等式ではない

を証明する．

（1） $n=1$ のとき： $x_1=x$ とおく．

等式 $f(x)=0$ および $g(x)=0$ は， x に関する恒等式ではないので，方程式 $f(x)=0$ および $g(x)=0$ の解は有限個しかない（定理Ｂ）．したがって，これら有限個の解以外の数 c を選べば， $f(c)\neq 0$， $g(c)\neq 0$ となる．このとき $f(c)\cdot g(c)\neq 0$ より， $f(x)\cdot g(x)=0$ は x に関する恒等式ではない．

（2） $n\geqq 2$ のとき： $g(x_1,\cdots,x_n)=0$ は $x_1,\cdots,x_n$ に関する恒等式ではないので，ある n 個の数 $b_1,\cdots,b_n$ が存在して， $g(b_1,\cdots,b_n)\neq 0$ となる．

等式 $f(a_1,\cdots a_{n-1},x_n)=0$ および $g(b_1,\cdots,b_{n-1},x_n)=0$ は， x_n に関する恒等式ではないので，（1）と同じ理由により， $f(a_1,\cdots a_{n-1},c_n)\neq 0$， $g(b_1,\cdots,b_{n-1},c_n)\neq 0$ となる数 c_n がある．

このとき，等式 $f(x_1,\cdots x_{n-1},c_n)=0$ および $g(x_1,\cdots,x_{n-1},c_n)=0$ は， $x_1,\cdots,x_{n-1}$ に関する恒等式ではないので，帰納法の仮定により，

$f(x_1,\cdots x_{n-1},c_n)g(x_1,\cdots,x_{n-1},c_n)=0$ も $x_1,\cdots,x_{n-1}$ に関する恒等式ではない．

よって，$n-1$ 個の数 $c_1,\cdots,c_{n-1}$ が存在して，$f(c_1,\cdots c_{n-1},c_n)\cdot g(c_1,\cdots c_{n-1},c_n)\neq 0$ となるから， $f(x_1,\cdots,x_n)\cdot g(x_1,\cdots,x_n)=0$ は $x_1,\cdots,x_n$ に関する恒等式ではない．

(1)，(2) より，1 以上の整数 n に対して主張が成り立つ． ■

$\boxed{51}$ n 次単位行列を E_n （$n\geqq 2$）とする． $A\tilde{A}=|A|E_n$ だから，両辺の行列式をとると， $|A\tilde{A}|=|A|\cdot|\tilde{A}|=|A|^n$ より， $|A|\left(|\tilde{A}|-|A|^{n-1}\right)=0$ が成り立つ．これは，行列 A の n^2 個の成分 $a_{ij}\,(1\leqq i,j\leqq n)$ に関する恒等式だから，例えば， $A=E_n$ のとき $|A|=1\neq 0$ に注意すると（$\boxed{50}$ の注意参照） $|\tilde{A}|-|A|^{n-1}=0$．したがって， $|A|=0$ ならば $|\tilde{A}|=0$ が成り立つ．