C 問題解答

(問題訂正)　**64** の「半平面」は「半空間」に訂正します.

59. (1) $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ である.

直線 $ax+by=0$ の方向ベクトルの一つは, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. 点 P', P'' の座標をそれぞれ (x', y'), (x'', y'') とすると,

- P' と P'' の中点 $\left(\dfrac{x'+x''}{2}, \dfrac{y'+y''}{2}\right)$ は直線 $ax+by=0$ 上の点だから $a\dfrac{x'+x''}{2} + b\dfrac{y'+y''}{2} = 0$ をみたす.
- $\overrightarrow{\mathrm{P}'\mathrm{P}''} \perp \boldsymbol{v} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{P}'\mathrm{P}''} \cdot \boldsymbol{v} \Longleftrightarrow -b(x''-x') + a(y''-y') = 0$

となる. 連立方程式

$$\begin{cases} a(x''+x') + b(y''+y') = 0 \\ -b(x''-x') + a(y''-y') = 0 \end{cases}$$

を x'', y'' について解くと

$$x'' = \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}x' + \frac{-2ab}{a^2+b^2}y', \quad y'' = \frac{-2ab}{a^2+b^2}x' + \frac{-(b^2-a^2)}{a^2+b^2}y'$$

従って

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2}x' + \dfrac{-2ab}{a^2+b^2}y' \\ \dfrac{-2ab}{a^2+b^2}x' + \dfrac{-(b^2-a^2)}{a^2+b^2}y' \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} b^2-a^2 & -2ab \\ -2ab & -(b^2-a^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

より, 求める行列 N は $N = \dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} b^2-a^2 & -2ab \\ -2ab & -(b^2-a^2) \end{pmatrix}$.

(2) 問題の条件より $\boldsymbol{p}'' = N\boldsymbol{p}' = NM\boldsymbol{p}$ だから $\boldsymbol{p}'' = \boldsymbol{p}_\theta \Longleftrightarrow NM\boldsymbol{p} = R\boldsymbol{p}$. これが $\boldsymbol{p}$ のとり方によらないので $NM = R$ となり,

$$\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} b^2-a^2 & 2ab \\ -2ab & b^2-a^2 \end{pmatrix} = NM = R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

よって $\cos\theta = \dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$, $\sin\theta = -\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$. 半角の公式より

$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1, \quad \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

だから

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(\cos\theta + 1) = \frac{b^2}{a^2+b^2}, \quad \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\sin\theta = \frac{-ab}{a^2+b^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\frac{-ab}{a^2+b^2}}{\frac{b^2}{a^2+b^2}} = -\frac{a}{b}$$

よって, 与えられた角度θに対して, 直線$ax+by=0$を$\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)x-\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)y=0$と定めればよい (これは$\theta=\frac{\pi}{2}$のときも成り立つ).

60. (1) 任意の$f,g\in\mathcal{P}$と実数$\alpha\in\mathbb{R}$について

$$\begin{aligned}
(A(f+g))(x) &= \int_0^x (f+g)(y)dy - \frac{(f+g)'''(0)}{24}x^4 \\
&= \int_0^x f(y)dy + \int_0^x g(y)dy - \frac{f'''(0)+g'''(0)}{24}x^4 \\
&= \int_0^x f(y)dy - \frac{f'''(0)}{24}x^4 + \int_0^x g(y)dy - \frac{g'''(0)}{24}x^4 \\
&= (Af)(x)+(Ag)(x) \\
(A(\alpha f))(x) &= \int_0^x (\alpha f)(y)dy - \frac{(\alpha f)'''(0)}{24}x^4 = \alpha\int_0^x f(y)dy - \alpha\frac{f'''(0)}{24}x^4 \\
&= \alpha\left(\int_0^x f(y)dy - \frac{f'''(0)}{24}x^4\right) = \alpha(Af)(x)
\end{aligned}$$

だから$A(f+g)=Af+Ag$, $A(\alpha f)=\alpha Af$. これよりAは線形写像.

$$\begin{aligned}
(Af_0)(x) &= \int_0^x 1dy - \frac{0}{24}x^4 = x \\
(Af_1)(x) &= \int_0^x ydy - \frac{0}{24}x^4 = \frac{1}{2}x^2 \\
(Af_2)(x) &= \int_0^x y^2dy - \frac{0}{24}x^4 = \frac{1}{3}x^3 \\
(Af_3)(x) &= \int_0^x y^3dy - \frac{6}{24}x^4 = 0
\end{aligned}$$

(2) (解く前に)

ベクトル空間Vの基底を$\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$, ベクトル空間$W$の基底を$\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_m$とし、線形写像$f:V\to W$が

$$\begin{cases}
f(\boldsymbol{v}_1) & = a_{11}\boldsymbol{w}_1 + a_{21}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{w}_m \\
f(\boldsymbol{v}_2) & = a_{12}\boldsymbol{w}_1 + a_{22}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{m2}\boldsymbol{w}_m \\
 & \cdots \\
f(\boldsymbol{v}_n) & = a_{1n}\boldsymbol{w}_1 + a_{2n}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{w}_m
\end{cases}$$

と書くとき,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \cdots(\star)$$

を f の基底 $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_m$ に関する f の表現行列という．以下 $(\star)$ を

$$\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{v}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{v}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \cdots & \boldsymbol{w}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

と表す (ただし, 左辺および右辺の第 1 因子は行列ではない).
(解く前に終わり)
(1) より

$$\begin{pmatrix} Af_0 & Af_1 & Af_2 & Af_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

より A の行列表示は $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

(3) 直接計算より $A^4 = O$.

(4) A が正則行列 P によって

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

と対角化されたとする．ここで

$$\begin{aligned} (P^{-1}AP)^4 &= (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \\ &= P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})A(PP^{-1})AP \\ &= P^{-1}AEAEAEAP = P^{-1}A^4P \end{aligned}$$

より,

$$P^{-1}A^4P = (P^{-1}AP)^4 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} \lambda_1^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^4 \end{pmatrix}$$

一方, (3) より $A^4 = O$ だから

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^4 \end{pmatrix} = O \text{ より } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

従って $P^{-1}AP=O$ より $A=P(P^{-1}AP)P^{-1}=POP^{-1}=O$. これは $A\neq O$ に矛盾. よって A は対角化不可能.

★(4) の別解★
$|\lambda E-A|=0$ より $\lambda^4=0$ だから A の固有値は 0 のみ. よって A の固有ベクトルは $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ より $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ $(c\neq 0)$ となり, 1 次独立なベクトルは一つしかとれない. よって A は対角か不可能 (テキスト P. 163, 5.6).

61. (1) 3 平面が一点で交わる必要十分条件は連立方程式

$$\begin{cases}x+y+mz-1=0\\x+my+z-3=0\\mx+y+z-2m=0\end{cases}\qquad\left(\text{すなわち}\begin{pmatrix}1&1&m\\1&m&1\\m&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\2m\end{pmatrix}\right)$$

がただ一つの解をもつことである. よって一点で交わる必要十分条件は

$$\begin{vmatrix}1&1&m\\1&m&1\\m&1&1\end{vmatrix}\neq 0\Longleftrightarrow 3m-m^3-2\neq 0$$

である. ここで $m^3-3m+2=(m-1)^2(m+2)$ だから $m\neq 1,-2$.

(2) 掃き出し法を用いると $(x,y,z)=(2,-1,1)$.

(3) 平面 A と平面 B の交点は連立方程式 $\begin{cases}x+y-1=0\\x+z-3=0\end{cases}$ の解全体である. この連立方程式の解は

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\1-t\\3-t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\quad(t\text{ は任意の実数})$$

これは点 $\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ を通り $\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする直線. よって $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

(4) 平面 C の方程式は $m=0$ のとき $y+z=0$. この平面上の点は

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\\t\\-t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\quad(s,t\text{ は任意の実数})$$

だから $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ ととれる.

(5) ベクトル $\boldsymbol{x}$ を射影して得られるベクトルを $\boldsymbol{x}'$ とおくと, ある実数 λ が存在して

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ y' + z' = 0 \end{cases}$$

となる. よって $\lambda = \dfrac{y+z}{2}$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ y-z \\ -y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

これより求める行列 Q は $Q = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

62. (1) 行列 A の行基本変形より

$$\begin{aligned} A &\to \begin{pmatrix} a-b & a & b \\ 0 & c & c \\ 0 & -c & -c \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{第 2 行} + \text{第 1 行} \\ \text{第 3 行} - \text{第 1 行} \end{matrix} \\ &\to \begin{pmatrix} a-b & a & b \\ 0 & c & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{第 3 行} + \text{第 2 行} \end{aligned}$$

よって例えば $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と取ればよい.

(2) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ より, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ は 1 次独立だから $\mathbb{R}^3$ の基底をなす. また

$$A\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a-b \\ -a+b \\ a-b \end{pmatrix} = (a-b)\boldsymbol{w}, \quad A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} b \\ -b+c \\ b-c \end{pmatrix} = b\boldsymbol{w} + c\boldsymbol{u}$$

(3) 行列 $\begin{pmatrix} A\boldsymbol{w} & A\boldsymbol{u} & A\boldsymbol{v} \end{pmatrix}$ は上で示したことより

$$\begin{pmatrix} A\boldsymbol{w} & A\boldsymbol{u} & A\boldsymbol{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w} & \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a-b & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdots ①$$

で, 行列 $\begin{pmatrix} 0 & a-b & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は上三角行列. ここで行列 P を

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w} & \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると P は正則行列であり, ①は $AP = P\begin{pmatrix} 0 & a-b & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と書けるので

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & a-b & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

63. 線形写像の定義より, 定数項や 2 次式は含まれないから $a = 0,\ c - 2 = 0,\ d + 1 = 0$.

ここで行列 A を $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & b \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とする.

問題の条件より $\dim \mathrm{Ker} f = 2$ だから, 次元定理より

$$4 = \dim \mathbb{R}^4 = \dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathrm{Im} f + 2$$

よって $\mathrm{rank} A = \dim \mathrm{Im} f = 4 - 2 = 2$.

行列 A を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & b \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & b \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{第 1 行と第 2 行を交換}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & b \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1-2b \end{pmatrix} \quad \text{第 3 行} + \text{第 1 行}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & b \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2-2b \end{pmatrix} \quad \text{第 3 行} + \text{第 2 行}$$

となる. よって

$$\mathrm{rank} A = 2 \iff -2 - 2b = 0 \iff b = -1$$

以上より $a = 0, b = -1, c = 2, d = -1$.

64. (問題訂正)　問題文の「半平面」は「半空間」に訂正します.

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の 1 次独立なベクトルだから $\mathbb{R}^3$ の基底をなす.

$\boldsymbol{a}_4 = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3$ $(c_i \in \mathbb{R})$ とおく. このとき, 条件より

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_1 = F(\boldsymbol{a}_4) &= F(c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3) \\
&= c_1F(\boldsymbol{a}_1) + c_2F(\boldsymbol{a}_2) + c_3F(\boldsymbol{a}_3) \\
&= c_1\boldsymbol{a}_2 + c_2\boldsymbol{a}_3 + c_3\boldsymbol{a}_4 \\
&= c_1\boldsymbol{a}_2 + c_2\boldsymbol{a}_3 + c_3(c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3) \\
&= c_1c_3\boldsymbol{a}_1 + (c_1 + c_2c_3)\boldsymbol{a}_2 + (c_2 + c_3^2)\boldsymbol{a}_3
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad (c_1c_3 - 1)\boldsymbol{a}_1 + (c_1 + c_2c_3)\boldsymbol{a}_2 + (c_2 + c_3^2)\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}.$$

ここで $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の 1 次独立性より $c_1c_3 - 1 = 0$, $c_1 + c_2c_3 = 0$, $c_2 + c_3^2 = 0$. これを解くと $c_1 = \pm 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = \pm 1$ (複号同順). ここで四つのベクトルが片方の半空間にあることは, そのうちある二つのベクトルを含む平面によって分割される片方の半空間に含まれることと同値であることに注意すると, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$ は半空間 $\{x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 \mid x_1 \geqq 0\}$ に含まれるが, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, -\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3$ は

$$\{x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 \mid x_1 = 0\}$$

$$\{x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 \mid x_2 = 0\}$$

$$\{x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 \mid x_3 = 0\}$$

$$\{x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 \mid x_1 - x_2 = 0\}$$

$$\{x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 \mid x_2 - x_3 = 0\}$$

$$\{x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 \mid x_3 - x_1 = 0\}$$

によって分割されるどの半空間にも入らない. よって $\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$ または $\boldsymbol{a}_4 = -\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3$ となるが $-\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3$ は $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ とは反対の半空間のベクトルなので, 問題の条件を満たさない. よって $\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$. これより

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} F(\boldsymbol{a}_1) & F(\boldsymbol{a}_2) & F(\boldsymbol{a}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

だから, 求める行列は $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.