線形代数問題集
第５章 C 発展問題 解答

$\boxed{\mathbf{39}}$ **証明** 交代行列 A の固有値を λ とし，$\boldsymbol{p}$ を λ に属する A の固有ベクトルとする．このとき，

$$\lambda{}^t\boldsymbol{p}\boldsymbol{p} = {}^t(A\boldsymbol{p})\boldsymbol{p} = {}^t\boldsymbol{p}{}^tA\boldsymbol{p} = {}^t\boldsymbol{p}(-A)\boldsymbol{p} = -\lambda{}^t\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}$$

よって，

$$2\lambda{}^t\boldsymbol{p}\boldsymbol{p} = 0$$

$\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$ より，${}^t\boldsymbol{p}\boldsymbol{p} = |\boldsymbol{p}|^2 \neq 0$ であるから，$\lambda = 0$. □

$\boxed{\mathbf{40}}$ ２次正方行列 A の固有値が 3 と -1 であるから，A の固有多項式は $(x-3)(x+1) = x^2-2x-3$ であり，ハミルトン・ケーリーの定理より，$A^2-2A-3E = O$ が成り立つ．このとき，多項式 x^3-4x^2+2x+2 を x^2-2x-3 で割ると商が $x-2$，余りが $x-4$ となり，x の恒等式

$$x^3-4x^2+2x+2 = (x^2-2x-3)(x-2)+x-4 \cdots ①$$

が成り立つ．$AE = EA = A$ であるから，① の x を A に置き換えた式も成立する．よって，ハミルトン・ケーリーの定理も考慮すると，

$$A^3-4A^2+2A+2E = (A^2-2A-3E)(A-2E)+(A-4E) = A-4E$$

となる．さらに $A^2-2A+kE$ (k は実数) の形になるように $A-4E$ に $A+2E$ をかけると

$$(A+2E)(A-4E) = A^2-2A-8E = (A^2-2A-3E)+(-5E) = -5E$$

となるから，この両辺を -5 で割ると

$$-\frac{1}{5}(A+2E)(A-4E)=E$$

となる．よって $B=(A^3-4A^2+2A+2E)^{-1}=(A-4E)^{-1}=-\dfrac{1}{5}(A+2E)$ となる．また，$A+2E$ の固有値は 5 と 1 であるから，B の固有値は -1 と $-\dfrac{1}{5}$.

$\boxed{\mathbf{41}}$ (1) **証明**　$|A|\neq 0$ と仮定すると，A^{-1} が存在し，$AB=O$ の左から A^{-1} をかけると，$B=O$ となる．これは仮定（$B\neq O$）に矛盾．よって，$|A|=0$. 同様に $|B|=0$. □

(2) **証明**　まず，A の固有値は 5 と -2 以外にありえないことを示す．λ を A の固有値とし，$\boldsymbol{p}$ を λ に属する A の固有ベクトルとすると $A^2-3A-10E=O$ なので $\mathbf{0}=O\boldsymbol{p}=(A^2-3A-10E)\boldsymbol{p}=(\lambda^2-3\lambda-10)\boldsymbol{p}$ が成り立つ．$\boldsymbol{p}\neq\mathbf{0}$ であるから，$\lambda^2-3\lambda-10=(\lambda-5)(\lambda+2)=0$．よって，$\lambda=5$ または -2.

次に，A が 5 と -2 のどちらの固有値もとることを示す．$A^2-3A-10E=(A-5E)(A+2E)=O$．$A$ はスカラー行列ではないので，$A-5E$ と $A+2E$ は零行列でない．(1) の証明より，$|A-5E|=|A+2E|=0$．よって，5 と -2 はともに A の固有値になる． □

$\boxed{\mathbf{42}}$　**証明**　3 次の正方行列 A は相異なる 3 個の固有値 ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とおく) を持つので対角化できる．すなわち，正則行列 P が存在して，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$$

となる．$AB=BA$ の両辺に左から P^{-1}，右から P をかけると，

$$P^{-1}APP^{-1}BP=P^{-1}BPP^{-1}AP\cdots①$$

となるから $P^{-1}BP=(c_{ij})$ とおくと，①より，

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$$

この両辺の (1,2) 成分を比較すると,

$$\lambda_1 c_{12} = \lambda_2 c_{12} \Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) c_{12} = 0$$

となる．$\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ より $c_{12} = 0$ を得る．同様にして，$i \neq j$ のとき，$c_{ij} = 0$.
すなわち，$P^{-1}BP$ は対角行列である． □

43 **証明** $(E-T)(E+T) = (E+T)(E-T)$ の両辺に左右両側から $(E+T)^{-1}$ を掛けると $(E+T)^{-1}(E-T) = (E-T)(E+T)^{-1}$ が成り立つ．
また，$AA^{-1} = E$ の両辺の転置をとると ${}^t(A^{-1}){}^tA = E$ となるから，正則行列 A について ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$ が成り立つ．さらに T は直交行列より ${}^tT = T^{-1}$ となるから，${}^t(E-T) = {}^tE - {}^tT = E - T^{-1}$，${}^t(E+T) = {}^tE + {}^tT = E + T^{-1}$ が成り立つ．これらより

$$\begin{aligned}
{}^tS =& {}^t\{(E+T)^{-1}\}\,{}^t(E-T) = \{{}^t\,(E+T)\}^{-1}\,{}^t(E-T) \\
=& (E+T^{-1})^{-1}\,(E-T^{-1}) = (E+T^{-1})^{-1}\,T^{-1}\,T\,(E-T^{-1}) \\
=& \{T(E+T^{-1})\}^{-1}\,\{T(E-T^{-1})\} = (T+E)^{-1}\,(T-E) \\
=& -(E+T)^{-1}\,(E-T) = -(E-T)\,(E+T)^{-1} = -S
\end{aligned}$$

よって，S は交代行列. □

44 **証明** A は対称行列なので固有値はすべて実数であり，これを小さいほうから $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \quad (\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3)$ とおく．直交行列 P が存在して

$$ {}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

となる．$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{u} = {}^t(u_1\ u_2\ u_3)$ とおくと

$${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{u}{}^tPAP\boldsymbol{u} = {}^t\boldsymbol{u}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\boldsymbol{u} = \lambda_1 {u_1}^2 + \lambda_2 {u_2}^2 + \lambda_3 {u_3}^2 \quad \cdots ①$$

$1 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{u}{}^tPP\boldsymbol{u} = {}^t\boldsymbol{u}E\boldsymbol{u} = {}^t\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}$ より ${u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2 =$

$1 \cdots$ ② が成り立つ．${u_1}^2$ を消去すると $\lambda_2 - \lambda_1 \geqq 0,\ \lambda_3 - \lambda_1 \geqq 0$ だから

$$① = \lambda_1(1-{u_2}^2-{u_3}^2)+\lambda_2{u_2}^2+\lambda_3{u_3}^2 = \lambda_1+(\lambda_2-\lambda_1){u_2}^2+(\lambda_3-\lambda_1){u_3}^2 \geqq \lambda_1$$

が成り立つ．$u_2 = u_3 = 0$ のとき，等号が成立する．よって①の最小値は λ_1．

同様にして ${u_3}^2$ を消去すると $\lambda_1 - \lambda_3 \leqq 0,\ \lambda_2 - \lambda_3 \leqq 0$ だから

$$① = \lambda_1{u_1}^2+\lambda_2{u_2}^2+\lambda_3(1-{u_1}^2-{u_2}^2) = (\lambda_1-\lambda_3){u_1}^2+(\lambda_2-\lambda_3){u_2}^2+\lambda_3 \leqq \lambda_3$$

が成り立つ．$u_1 = u_2 = 0$ のとき，等号が成立する．よって①の最大値は λ_3．以上により，式 ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ の最大値と最小値は A の固有値の最大値と最小値に一致する． □

45 **証明** $a_0 = a,\ b_0 = b$ とおくと $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_n + b_n \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$ $(n \geqq 0)$．これと $a_0 > 0,\ b_0 > 0$ から帰納法により，0 以上の整数 n について $a_n > 0,\ b_n > 0$ が成り立つ．$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$ より $\lambda = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ となる．$\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} = \alpha,\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} = \beta$ とおくと $\lambda = \alpha, \beta$ に属する固有ベクトルとしてそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha - 2 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ \beta - 2 \end{pmatrix}$ がとれ，$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha - 2 & \beta - 2 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ となる．これより，$n \geqq 1$ のとき $A^n = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n P^{-1} = P\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} P^{-1}$ が成立する．よって

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha-2 & \beta-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} \left\{ \frac{1}{\beta-\alpha} \begin{pmatrix} \beta-2 & -1 \\ -(\alpha-2) & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\beta-\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha-2 & \beta-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\beta-2)a-b \\ -(\alpha-2)a+b \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\beta-\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha-2 & \beta-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{(\beta-2)a-b\}\alpha^n \\ \{-(\alpha-2)a+b\}\beta^n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\beta-\alpha} \begin{pmatrix} \{(\beta-2)a-b\}\alpha^n + \{-(\alpha-2)a+b\}\beta^n \\ (\alpha-2)\{(\beta-2)a-b\}\alpha^n + (\beta-2)\{-(\alpha-2)a+b\}\beta^n \end{pmatrix}$$

よって

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\{(\beta-2)a-b\}\alpha^n + \{-(\alpha-2)a+b\}\beta^n}{(\alpha-2)\{(\beta-2)a-b\}\alpha^n + (\beta-2)\{-(\alpha-2)a+b\}\beta^n}$$

$$= \frac{\{(\beta-2)a-b\} + \{-(\alpha-2)a+b\}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n}{(\alpha-2)\{(\beta-2)a-b\} + (\beta-2)\{-(\alpha-2)a+b\}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n}$$

（注：分母・分子を α^n で割った）ここで $0 < \beta < \alpha$ より $0 < \dfrac{\beta}{\alpha} < 1$ だから $n \longrightarrow \infty$ のとき $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n \longrightarrow 0$ となる．これより，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\{(\beta-2)a-b\}}{(\alpha-2)\{(\beta-2)a-b\}} = \frac{1}{(\alpha-2)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

□

46 証明

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-a & -b & -c \\ -b & \lambda-1 & 0 \\ -c & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-a)(\lambda-1)^2 - (b^2+c^2)(\lambda-1)$$

$$= (\lambda-1)\left\{\lambda^2 - (a+1)\lambda + (a-b^2-c^2)\right\} = 0$$

よって

$$\lambda = 1 \quad \text{または} \quad \lambda^2 - (a+1)\lambda + (a - b^2 - c^2) = 0 \cdots ①$$

２次方程式①の判別式を D とすると

$$D = (a+1)^2 - 4(a - b^2 - c^2) = (a-1)^2 + 4(b^2 + c^2) \geqq 0$$

となるので①は２つの実数解（２重解の場合を含む）をもつ．この２つの実数解を α, β とおくと，解と係数の関係より $\alpha + \beta = a + 1,\ \alpha\beta = a - (b^2 + c^2)$ となる．問題の条件より $a + 1 > 0$ および $|A| = a - (b^2 + c^2) > 0$ が成り立つので $\alpha + \beta > 0,\ \alpha\beta > 0$ すなわち $\alpha > 0,\ \beta > 0$ が成り立つ．よって行列 A の固有値（1 と α と β）はすべて正である． □

$\boxed{\textbf{47}}$ (1)

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 13 & -12 & -6 \\ 12 & \lambda - 11 & -6 \\ 6 & -6 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -12 & -6 \\ \lambda + 1 & \lambda - 11 & -6 \\ 0 & -6 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -12 & -6 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & -6 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2) = 0$$

より $\lambda = -1$ (２重解), 2．これらに属する固有ベクトルはそれぞれ

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \big((\alpha, \beta) \neq (0,0)\big), \qquad \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\gamma \neq 0)$$

となる．よって $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ とすると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(2) ない．

証明　背理法で証明する．$P^{-1}AP = D$ (D は対角行列) となる実直交行列 P が存在したとする．これより $A = PDP^{-1}$ がでる．$P^{-1} = {}^tP$ であるから

$A = PD\,{}^tP$ となる．この両辺の転置をとると D は対角行列で ${}^tD = D$ が成り立つから ${}^tA = {}^t({}^tP)\,{}^tD\,{}^tP = PD\,{}^tP = A$ となり A は対称行列でなければならない．これは矛盾．よって A を対角化する直交行列は存在しない． □

$\boxed{\mathbf{48}}$ (1)

$$f(x) = |xE - A| = \begin{vmatrix} x-8 & -4 & 14 \\ 1 & x-1 & -2 \\ -3 & -2 & x+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-8 & -4 & 2x-2 \\ 1 & x-1 & 0 \\ -3 & -2 & x-1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 \\ -3 & -2 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x-2)$$

(2)

$$f(A) = (A-E)^2(A-2E)$$
$$= \begin{pmatrix} 7 & 4 & -14 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 4 & -14 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -14 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) 割り算の関係から，x の恒等式

$$x^n = (x-1)^2(x-2)Q(x) + ax^2 + bx + c \cdots ①$$

が成り立つ．この両辺を x で微分すると

$$nx^{n-1} = \left\{2(x-1)(x-2) + (x-1)^2\right\} Q(x) + (x-1)^2(x-2)Q'(x) + 2ax + b \cdots ②$$

となる．①に $x = 1, 2$ および②に $x = 1$ を代入すると

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 2^n \\ 2a + b = n \end{cases} \quad \text{を得る．これより} \quad \begin{cases} a = 2^n - n - 1 \\ b = -2^{n+1} + 3n + 2 \\ c = 2^n - 2n \end{cases}$$

(4) ①の x を A に変えた式

$$A^n = (A-E)^2(A-2E)Q(A) + aA^2 + bA + E$$

が成り立つ．(2) より $f(A) = (A-E)^2(A-2E) = O$ であるから

$$
\begin{aligned}
A^n &= aA^2 + bA + E \\
&= (2^n - n - 1)A^2 + (-2 \cdot 2^n + 3n + 2)A + (2^n - 2n)E \\
&= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n + 4n - 2 & 4n & -6 \cdot 2^n - 8n + 6 \\ -2^n + 1 & 1 & 2 \cdot 2^n - 2 \\ 2^n + 2n - 1 & 2n & -2 \cdot 2^n - 4n + 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

□