第 10 章　章末問題の解答

問 10.1：基礎概念確認

次の経済学概念について説明しなさい。

完全競争企業	（同じ生産活動をする無数のライバル企業が存在するために）生産物の価格などを自分で設定することができず、市場で決まる価格（俗に相場とも言います）を受け入れざるをえない企業のこと
生産関数	生産に投入される労働や資本などの生産要素の量とそれから生み出される産出物（自動車やテレビなど）の量の間にある関係を示す関数
賃金率	労働に対して支払われる賃金を労働量（通常は時間）で割ったもので、労働一単位（通常は 1 時間）当たりの賃金のこと。労働の単価。
限界生産物	労働などの単一の生産要素の投入量を微小に増加したときの産出量の増加の比率。生産関数を特定の独立変数で微分した微分係数。生産要素が複数ある場合は偏微分係数になる。詳しくは第１１章以降で学ぶ。
限界生産物価値	限界生産物に生産物価格をかけたもの。単一の生産要素の投入量を微小に増加したときの産出量増加に伴う収入増加の比率を示す。
限界費用	産出物の量を微小に増加したときの費用の増加の比率。費用関数を産出物の量で微分した微分係数。
需要曲線	ある特定の財の価格とそれに対応する需要量の関係を、横軸に需要量、縦軸に価格をとった座標に描いたグラフ。通常、価格が下がると需要量は増えるので、グラフは右下がり。
供給曲線	ある特定の財の価格とそれに対応する供給量の関係を、横軸に供給量、縦軸に価格をとった座標に描いたグラフ。通常、価格が下がると供給量は減るので、グラフは右上がり。
独占企業	ある財を独占的に供給する企業。同一の財を供給する企業が他にないため、生産物の価格を自分で決めることができる。
需要関数	ある特定の財の価格とそれに対応する需要量の関係を示す関数。
逆需要関数	需要関数の逆関数。つまり、ある特定の財の需要量と、それを達成するために設定すべき価格との関係を示す関数。

問 10.2：計算練習応用問題

ある完全競争企業の生産関数が以下のように与えられている。

$$y = \ln(L+1)$$

ここで、y はこの企業が生産する財の生産量、L は労働量である。このとき、財の価格を p、賃金率を w とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$p=12, w=4$ のとき最適な労働需要量を求めよ。

解）企業の利潤をπとすると、利潤は売り上げ収入 py から労働費用 wL を差し引いたものなので、

$$\pi = py - wL$$

となる。この式に生産関数および $p=12, w=4$ を代入すると、

$$\pi = 12\ln(L+1) - 4L$$

となる。この式を労働量 L に関して最大化すればよい。

Step 1：微分して導関数を求める。

$$\frac{d\pi}{dL}=\frac{12}{L+1}-4$$

Step 2：導関数の値がゼロになるような L の値を探す。

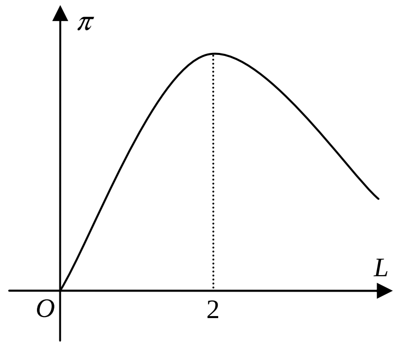
$$\frac{12}{L+1}-4=0$$

となる L の値は 2 のみ。

Step 3：Step 2 の L の値を頼りに増減表を書く。

注意深く増減表を書くと、下表のようになる。

L	0	・・・	2	・・・
$d\pi/dL$	＋	＋	0	－
π	0	↗	12 ln3 – 8	↘



Step 4：グラフの大まかな形を描いて解を求める。

増減表よりグラフは右図のようになるから、企業の利潤を最大化する最適な労働需要量は 2 である。ちなみにそのときの利潤は 12 ln3 – 8≒5.18.

(2)　企業の最適な労働需要量を p, w の関数として表せ。

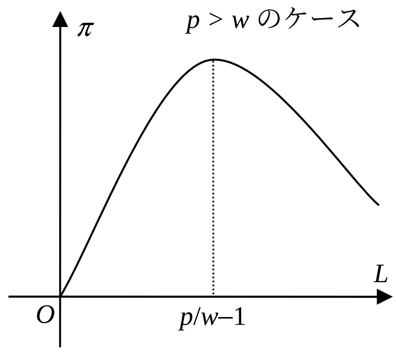
解）p, w の値を未知数として(1)の利潤最大化問題を解けば良い。生産関数を代入した利潤は

$$\pi=p\ln(L+1)-wL$$

となる。この式を労働量 L に関して最大化すればよい。

Step 1：微分して導関数を求める。

$$\frac{d\pi}{dL}=\frac{p}{L+1}-w$$



Step 2：導関数の値がゼロになるような L の値を探す。

$$\frac{p}{L+1}-w=0$$

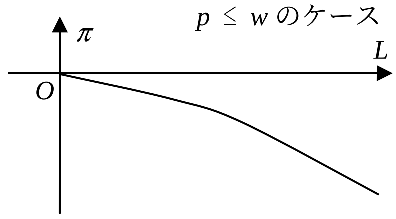
を L について解くと、

$$L=\frac{p}{w}-1$$

となる。$p>w$ のとき、利潤関数は右図のようになり、$p/w–1$ が最適労働需要量となる。

一方、$p \leq w$ のとき、すべての正の L に対して

$$\frac{d\pi}{dL}=\frac{p}{L+1}-w\leq 0$$



となり、利潤関数が常に右下がりなので最適な労働需要量は 0 となる。

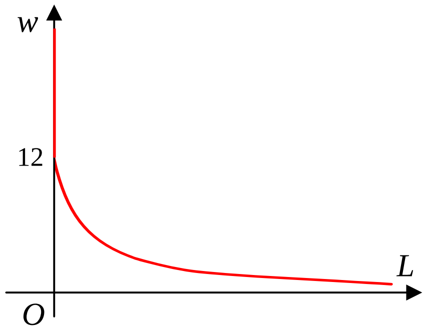
略解では場合分けがされていませんでした。訂正します。

(3)　p=12 のとき労働の需要曲線を図示しなさい。

解）(2) より p=12 のときの労働の需要関数は

$$L = \begin{cases} \dfrac{12}{w} - 1 & if \quad w < 12 \\ 0 & if \quad w \geq 12 \end{cases}$$

となる。この関係を（L, w）座標平面に描いたものが労働の需要曲線であり、それは右図のようになる。



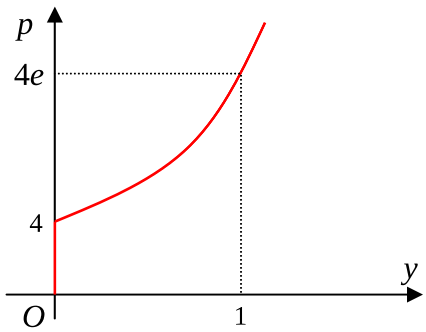
(4)　w=4 のときこの企業の財の供給曲線を図示しなさい。

解）(2) より w=4 のときの労働の需要関数は

$$L = \begin{cases} \dfrac{p}{4} - 1 & if \quad p > 4 \\ 0 & if \quad p \leq 4 \end{cases}$$

となる。この労働需要関数を生産関数に代入することにより、供給関数が得られる。

$$y = \ln(L+1) = \begin{cases} \ln \dfrac{p}{4} & if \quad p > 4 \\ 0 & if \quad p \leq 4 \end{cases}$$



この関係を（y, p）座標平面に描いたものが供給曲線であり、それは右図のようになる。

問 10.3：計算練習応用問題

ある完全競争企業の費用関数が $C(y) = y^3 - 6y^2 + 15y$ で与えられている。ただし y はこの企業の生産量である。以下の問いに答えなさい。

(1)　限界費用 $C'(y)$ を最小にする y の値と限界費用の最小値を求めよ。

解）まず限界費用関数 $C'(y)$ を求める。費用関数を微分すればよい。

$C'(y) = 3y^2 - 12y + 15$

これは 2 次関数で y^2 の係数がプラスなので、そのグラフは下に凸の放物線を描く。

その頂点における y の値と限界費用の値を求めればよい。

　微分して最小化してもよいが、ここでは平方完成をして頂点を調べよう。

$$\begin{aligned} C'(y) &= 3(y^2 - 4y) + 15 \\ &= 3(y^2 - 4y + 4 - 4) + 15 \\ &= 3(y^2 - 4y + 4) - 12 + 15 \\ &= 3(y-2)^2 + 3 \end{aligned}$$

よって、限界費用は $y = 2$ のとき最小値 3 を持つ。

(2)　限界費用 $C'(y)$ のグラフを描きなさい。

解）(1)で限界費用関数が平方完成された 2 次関数で表わされているのでグラフは図の青線のようになる。

(3)　費用を生産量で割ったものは平均費用と呼ばれる。平均費用を最小にする y の値と平均費用の最小値を求めよ。

解）生産量が y のときの平均費用を $AC(y)$とすると、平均費用の定義より

$$AC(y)=\frac{C(y)}{y}=y^2-6y+15$$

となる。これも 2 次関数で y^2 の係数がプラスなので、そのグラフは下に凸の放物線を描く。

その頂点における y の値と限界費用の値を求めればよい。

　ここでは微分によって頂点を求めよう。

Step 1：微分して導関数を求める。

$$AC'(y)=2y-6$$

Step 2：導関数の値がゼロになるような y の値を探す。

$$2y-6=0$$

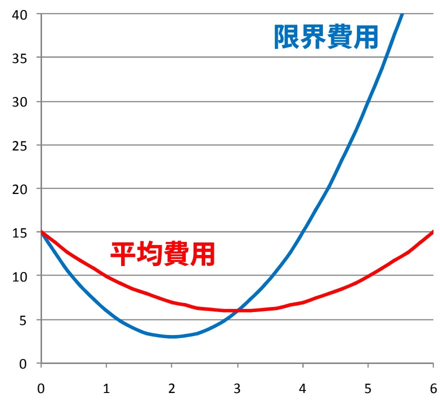
となる y の値は 3。

Step 3：Step 2 の y の値を頼りに増減表を書く。

注意深く増減表を書くと、下表のようになる。

y	・・・	3	・・・
$AC'(y)$	-	0	+
$AC(y)$	↘	6	↗

よって、平均費用は $y=3$ のとき最小値 6 を持つ。



(4)　平均費用のグラフを(2)の図に書き入れて比較しなさい。

解）(3)で調べた増減表よりグラフは図の赤線のようになる。

(5)　生産物の価格が 15 のとき、利潤を最大化する y とその利潤を求めよ。

解）生産物価格が 15 のとき、売り上げ収入は $15y$ となるので、企業の利潤 π は

$$\pi=15y-C(y)$$

これを y について最大化すればよい

Step 1：微分して導関数を求める。

$$d\pi/dy=15-C'(y)=15-3y^2+12y-15=-3y^2+12y$$

Step 2：導関数の値がゼロになるような y の値を探す。

$$-3y(y-4)=0$$

となる y の値は 0 と 4。

Step 3：Step 2 の y の値を頼りに増減表を書く。

注意深く増減表を書くと、下表のようになる。

y	0	・・・	4	・・・
$d\pi/dy$	0	＋	0	―
π	0	↗	32	↘

よって、利潤は y =4 のとき最大となり、その値は 32 である。

(6)　生産物価格が 6 のとき、利潤を最大化する y とその利潤を求めよ。

解）解法は(5)と同じなので、要点だけをまとめると、生産物価格が 6 のときの企業の利潤πは

$$\pi = 6y - C(y)$$

その導関数は

$$d\pi / dy = 6 - C'(y) = 6 - 3y^2 + 12y - 15 = -3y^2 + 12y - 9$$

導関数の値がゼロになるような y の値は 1 と 3 なので、増減表は次のようになる。

y	0	・・・	1	・・・	3	・・・
$d\pi/dy$	0	－	0	＋	0	－
π	0	↘	-4	↗	0	↘

よって、利潤は y =0 および 3 のとき最大となり、その値は 0 である。

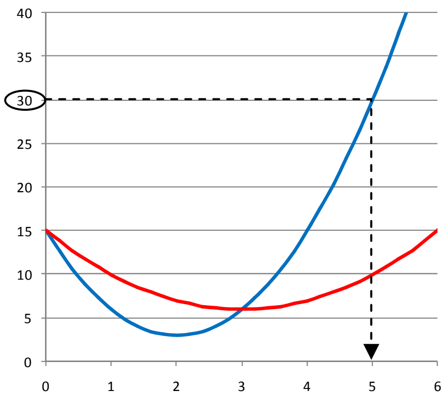
つまり、この場合には企業は 3 の生産をするか、全く生産をしないかのいずれかを選択することになる。

(7)　この企業の財の供給曲線を図示しなさい。

解）一般に生産物価格が p のとき、企業の利潤πは

$$\pi = py - C(y)$$

となる。これを y について最大化すればよいが、p が未知数なので(5)(6)のように増減表を書くことができない。しかし、最適解が内点解である（つまり、利潤がプラスとなる解がある）ならば一階の条件を満たすはずである。すなわち、最適内点解を y^*とすると、



$$\frac{d\pi}{dy} = p - C'(y^*) = 0$$

とならなければならない。この条件を書き換えると

$$p = C'(y^*)$$

となる。つまり、内点解があるとすれば、限界費用と生産物価格が一致するところで最適生産量は決定される。

たとえば生産物価格が 30 のときには、限界費用が 30 になる生産量が最適な内点解の候補になる。

(2)で描いたグラフより、限界費用が 30 になる生産量は 5 のみであることがわかる。

このときの利潤がプラスであれば、5 が最適内点解となるが、その条件は

$$py^* - C(y^*) > 0$$

これを書き換えると、

$$y^*\left(p - \frac{C(y^*)}{y^*}\right) = y^*\left(p - AC(y^*)\right) > 0$$

$$\therefore p > AC(y^*)$$

という条件が得られる。つまり、内点解の候補において利潤がプラスになる条件は生産物価格が平均費用を上回っていればよいことがわかる。

生産物価格が 30 のとき、内点解の候補は $y^*=5$であり、この生産量における平均費用は 10 で生産物価格が平均費用を上回っているので、$y^*=5$が最適内点解であることがわかる。

生産物価格が15より大きい場合は、生産物価格と限界費用が一致する内点解の候補は１つだけであり、かつその候補における平均費用は生産物価格よりも低いので、その候補が最適生産点となる。

生産物価格 p が15より小さくなると生産物価格と限界費用が一致する生産量が２つになるが、そのうちの小さい方は（値が２より小さく）、以下の最大化の２階の条件を満たさない。

$$\frac{d^2\pi}{dy^2} = -C''(y^*) = -6y^* + 12 = -6(y^* - 2) < 0 \qquad \text{利潤最大化の２階の条件}$$

つまり、大きい方だけが内点解の候補となる。

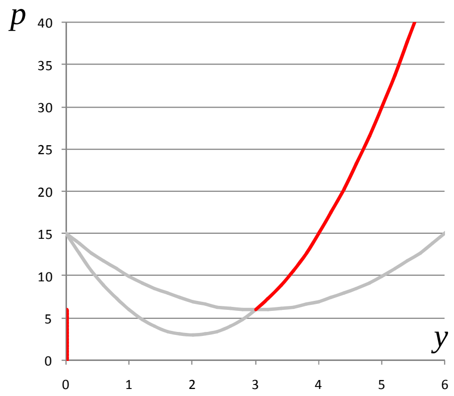
生産物価格が６より高ければ、最適内点解の候補における平均費用が生産物価格よりも高くなるので、その候補が最適生産量となる。

生産物価格が６のとき（これは(6)のケース）は生産しても利潤がゼロになる。

生産物価格が６を下回ると最適内点解の候補においても平均費用が生産物価格を上回ってしまうので、最適生産量は 0（端点解）となる。

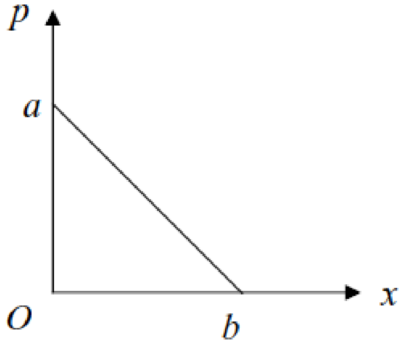
以上の生産物価格と最適生産量の関係を(y, p)座標平面に図示すると、右図の赤線のようになる。これが供給曲線である。

補足：よく知られた右上がりの供給曲線が実は限界費用曲線の一部（右上がりの部分のうち、平均費用曲線との交点よりも上の部分）であることがわかります。



問 10.4：計算練習応用問題

独占企業には２つのタイプがある。一方は、自らが独占的に供給する製品の価格を自ら決定し、その価格に対する需要量を予想して財を製造販売するタイプ（以下、タイプ１とする）、他方は、製品価格は市場で決まるが、市場への供給を独占しているので間接的に価格を操作できるタイプ（以下タイプ２とする）である。それぞれのタイプの独占企業が下図のような直線の需要曲線に直面しているとき、下記の問いに答えなさい。



(1)　タイプ１の独占企業の予想需要量および予想売上を製品価格 p の関数として示しなさい。また、売上を最大にする価格を求めなさい。

解）まず、製品価格 p と需要量 x の関係を式で表す。図の直線の需要曲線を需要量 x を独立変数とする一次関数と解釈すると、p 切片が a なので、

$$p = kx + a$$

と書ける。製品価格が 0 のときの需要量 x は b なので、

$$0 = k \times b + a \quad \Rightarrow \quad \therefore k = -\frac{a}{b}$$

すなわち、p と x の関係式は

$$p = -\frac{a}{b}x + a$$

である。この式を需要量 x について解くことで、製品価格が p のときの予想需要量が製品価格 p の関数として求められる。**この関数は需要関数と呼ばれます。**

予想需要量：　　$x = -\dfrac{b}{a}p + b$　書き換えると　$x = b(1 - p/a)$

この予想需要量に製品価格をかけたものが予想売上である。予想売上を R_1 とすると、

予想売上：　　$R_1 = px = -\dfrac{b}{a}p^2 + bp$　書き換えると　$R_1 = bp(1 - p/a)$

売上 R_1 を最大化する p を求めよう。

Step 1：微分して導関数を求める。

$$dR_1 / dp = -\frac{2b}{a}p + b$$

Step 2：導関数の値がゼロになるような p の値を探す。

$$-\frac{2b}{a}p + b = 0$$

となる p の値は $a/2$。

Step 3：Step 2 の p の値を頼りに増減表を書く。

注意深く増減表を書くと、下表のようになる。

p	0	・・・	$a/2$	・・・	a
dR_1/dp	＋	＋	0	−	−
R_1	0	↗	$ab/4$	↘	0

よって、予想売上は $p = a/2$ のとき最大となり、その値は $ab/4$ である。

略解では予想売上を最大にする価格が省略されています。

(2)　タイプ２の独占企業の予想価格および予想売上を供給量 x の関数として示しなさい。また、売上を最大にする供給量を求めなさい。

解）タイプ２の独占企業が供給量を x にすると、市場では需要と供給が一致するように価格が付くと考えられる。その価格は需要曲線上で決まるから

予想価格：　$p=-\frac{a}{b}x+a$　書き換えると　$p=a(1-x/b)$

となる。**この関数は逆需要関数と呼ばれます。**

この予想価格に供給量をかけたものが予想売上である。予想売上を R_2 とすると、

予想売上：　$R_2=px=-\frac{a}{b}x^2+ax$　書き換えると　$R_2=ax(1-x/b)$

売上 R_2 を最大化する x を求めよう。

Step 1：微分して導関数を求める。

$$dR_2/dx=-\frac{2a}{b}x+a$$

Step 2：導関数の値がゼロになるような x の値を探す。

$$-\frac{2a}{b}x+a=0$$

となる x の値は $b/2$。

Step 3：Step 2 の x の値を頼りに増減表を書く。

注意深く増減表を書くと、下表のようになる。

x	0	・・・	$b/2$	・・・	b
dR_2/dx	＋	＋	0	―	―
R_2	0	↗	$ab/4$	↘	0

よって、予想売上は $x=b/2$ のとき最大となり、その値は $ab/4$ である。

略解では予想売上を最大にする供給量が省略されています。売上の最大値はいずれのタイプでも変わりません。

(3)　各独占企業の費用関数が $C=cx$　(c は a より小さい正の定数）で与えられるとき、タイプ１の企業の利潤を製品価格 p の関数として示しなさい。また、利潤を最大にする価格、そのときの利潤および需要量を求めなさい。

解）タイプ１の企業の利潤を π_1 とすると、

$$\pi_1=R_1-C=px-cx=(p-c)x$$

製品価格を p とするとき、

予想需要量：　$x=-\frac{b}{a}p+b$

となるので、タイプ１の企業の利潤は

$\pi_1=(p-c)\left(-\frac{b}{a}p+b\right)$　書き換えると　$\pi_1=b(p-c)(1-p/a)$

となる。これを最大化する p を求めよう。

Step 1：微分して導関数を求める。

$$\frac{d\pi_1}{dp}=b\left(1-\frac{p}{a}\right)-\frac{1}{a}b(p-c)=\frac{b}{a}(a+c-2p)$$

Step 2：導関数の値がゼロになるような p の値を探す。

$$\frac{b}{a}(a+c-2p)=0$$

となる p の値は $(a+c)/2$ 。

Step 3：Step 2 の p の値を頼りに増減表を書く。

注意深く増減表を書くと、下表のようになる。

p	0	・・・	$(a+c)/2$	・・・	a
$d\pi_1/dp$	＋	＋	0	―	―
π_1	$-bc$	↗	$b(a-c)^2/4a$	↘	0

よって、企業の利潤は $p=(a+c)/2$ のとき最大となり、その値は $b(a-c)^2/4a$ である。

また、このときの予想需要量は

$$x=-\frac{b}{a}\frac{(a+c)}{2}+b=\frac{-ab-bc+2ab}{2a}=\frac{b(a-c)}{2a}$$

となる。

(4)　同じく、各独占企業の費用関数が $C=cx$ （c は a より小さい正の定数）で与えられるとき、タイプ 2 の企業の利潤を製品供給量 x の関数として示しなさい。また、利潤を最大にする製品供給量、そのときの利潤および市場価格を求めなさい。

解）タイプ 2 の企業の利潤を π_2 とすると、

$$\pi_2=R_2-C=px-cx=(p-c)x$$

供給量を x とするとき、

予想価格：　$p=-\dfrac{a}{b}x+a$

となるので、タイプ 2 の企業の利潤は

$\pi_2=\left(-\dfrac{a}{b}x+a-c\right)x$　書き換えると　$\pi_2=ax(1-x/b)-cx$

となる。これを最大化する x を求めよう。

Step 1：微分して導関数を求める。

$$\frac{d\pi_2}{dx}=-\frac{2a}{b}x+a-c$$

Step 2：導関数の値がゼロになるような x の値を探す。

$$-\frac{2a}{b}x+a-c=0$$

となる x の値は $b(a-c)/2a$ 。

Step 3：Step 2 の x の値を頼りに増減表を書く。

注意深く増減表を書くと、下表のようになる。

x	0	・・・	$b(a-c)/2a$	・・・	b
$d\pi_2/dx$	＋	＋	0	―	―
π_2	0	↗	$b(a-c)^2/4a$	↘	$-bc$

よって、企業の利潤は $x = b(a - c)/2a$ のとき最大となり、その値は $b(a - c)^2/4a$ である。

また、このときの予想価格は

$$p = -\frac{a}{b}\frac{b(a-c)}{2a} + a = \frac{2a-(a-c)}{2} = \frac{a+c}{2}$$

となる。

補足：いずれのタイプの独占企業であっても、需要曲線と費用関数が同じであれば最適な行動を取っているときの供給量、価格、利潤は全く同じになることがわかりますね。

以上