第 13 章　章末問題の解答

問 13. 1：計算練習問題

関数　$y = x_1{}^2 x_2{}^3$ のグラフに点(4,1,16)で接する接平面の方程式を求めよ。

解）$f(x_1, x_2) = x_1{}^2 x_2{}^3$ とおくと、$f(4,1) = 4^2\ 1^3 = 16$ となるので、関数グラフが点(4,1,16)を通ることが確かめられる。さて、接平面の方程式は公式（p.260 の☆の式）より、

$$y - 16 = \frac{\partial f(4,1)}{\partial x_1}(x_1 - 4) + \frac{\partial f(4,1)}{\partial x_2}(x_2 - 1)$$

であるから、関数を偏微分して偏微分係数を求めればよい。x_1 に関する偏導関数は

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 2x_1^{2-1} \cdot x_2^3 = 2x_1 \cdot x_2^3$$

となるから、x_1 に関する偏微分係数は

$$\frac{\partial f(4,1)}{\partial x_1} = 2 \times 4 \times 1^3 = 8$$

同様に x_2 に関する偏導関数と偏微分係数はそれぞれ

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 3x_1^2 \cdot x_2^{3-1} = 3x_1^2 \cdot x_2^2$$

$$\frac{\partial f(4,1)}{\partial x_2} = 3 \times 4^2 \times 1^2 = 48$$

となる。よって求める接平面の方程式は

$$y - 16 = 8(x_1 - 4) + 48(x_2 - 1)$$

式を整理すると

$$y = 8x_1 + 48x_2 - 64$$

となる。

問 13. 2：計算練習問題

関数 $y = (x_1{}^{1/2} + x_2{}^{1/2})^2$ のグラフに点(4,1,9)で接する接平面の方程式を求めよ。

解）解法は問 13.1 と同じである。関数の名前を f として、

x_1 に関する偏導関数と偏微分係数はそれぞれ

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 2(x_1^{1/2} + x_2^{1/2})^{2-1} \cdot \frac{1}{2} x_1^{\frac{1}{2}-1} = (x_1^{1/2} + x_2^{1/2}) x_1^{-1/2} = \frac{x_1^{1/2} + x_2^{1/2}}{x_1^{1/2}} \quad \text{あるいは} \quad \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}$$

これは CES 型効用関数と同じ関数形です。偏微分の仕方がわからない人は 12 章の章末問題/問 12. 4 を参照してください。

$$\frac{\partial f(4,1)}{\partial x_1} = \frac{\sqrt{4} + \sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

同様に x_2 に関する偏導関数と偏微分係数はそれぞれ

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{x_1^{1/2} + x_2^{1/2}}{x_2^{1/2}} \quad \text{あるいは} \quad \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_2}}$$

$$\frac{\partial f(4,1)}{\partial x_2} = \frac{\sqrt{4} + \sqrt{1}}{\sqrt{1}} = \frac{2+1}{1} = 3$$

となる。よって求める接平面の方程式は

$$\begin{aligned} y - 9 &= \frac{\partial f(4,1)}{\partial x_1}(x_1 - 4) + \frac{\partial f(4,1)}{\partial x_2}(x_2 - 1) \\ &= \frac{3}{2}(x_1 - 4) + 3(x_2 - 1) \end{aligned}$$

式を整理すると

$$y = \frac{3}{2}x_1 + 3x_2$$

となる。

問 13. 3：応用問題

横の長さ 3m、縦の長さ 4m の長方形の区画がある。横の長さを 1mm 伸ばす代わりに、縦の長さを 1mm 短くすると、対角線の長さはどのように変化するか。

(1) 計算する前に結果を予想してみよう。

「後知恵（あとぢえ）」と言って人間というのは結果を知ってしまうと、それがどんなに意外なものであっても当前のことのように思えてしまう不思議な気質を持っています。事前に予想をしてから計算結果を見ることで、後知恵から解放されて色々な発見や驚きに気付くことができます。そういう気付きを大いに楽しんでほしいーそれが、この小問の意図です。対角線の長さは長くなるでしょうか、それとも短くなるでしょうか。正しくない予想をしても恥ずかしいことではありません。直感力のゲームと思って予想を楽しみましょう。

(2) 全微分を使って、対角線の長さの変化を調べよ。

解）横の長さが $x_1$mm、縦の長さが $x_2$mm の長方形の対角線の長さを y mm とすると、y は x_1 と x_2 の関数になり、この関数を f とすると、三平方の定理より

$$y = f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2} = \left(x_1{}^2 + x_2{}^2\right)^{1/2}$$

となる（わからない人はテキスト p.233 を見てください）。

全微分（テキスト p.266 参照）より、(x_1, x_2) が (a_1, a_2) からそれぞれ微小に $\Delta x_1, \Delta x_2$ だけ変化するとき、関数の値 y は関数のグラフに沿って、およそ

$$\Delta y = \frac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x_2}\Delta x_2$$

だけ変化する。

　この問題では、

$$a_1 = 3000,\quad a_2 = 4000,\quad \Delta x_1 = +1,\quad \Delta x_2 = -1$$

であり、x_1 に関する偏導関数と偏微分係数はそれぞれ

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot 2x_1^{2-1} = (x_1^2 + x_2^2)^{-1/2} x_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

関数の形は CES 型効用関数と同じです。偏微分の仕方がわからない人は 12 章の章末問題/問 12.4 を参照してください。

$$\frac{\partial f(3000,4000)}{\partial x_1} = \frac{3000}{\sqrt{3000^2 + 4000^2}} = \frac{3000}{\sqrt{(3^2 + 4^2) \times 1000^2}} = \frac{3000}{\sqrt{25 \times 1000^2}} = \frac{3000}{5 \times 1000} = \frac{3}{5}$$

同様に x_2 に関する偏導関数と偏微分係数はそれぞれ

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \qquad \frac{\partial f(3000,4000)}{\partial x_2} = \frac{4000}{\sqrt{3000^2 + 4000^2}} = \frac{4}{5}$$

となる。よって求める関数の値 y の変化 Δy はおよそ

$$\Delta y = \frac{3}{5} \times (+1) + \frac{4}{5} \times (-1) = \frac{3-4}{5} = -\frac{1}{5} = -0.2$$

となる。すなわち、約 0.2mm だけ短くなると予想される。

解説：対角線に与える影響は長い辺の方が短い辺よりも大きい。同じ 1mm だけ変化するならば、長い辺（4m）が短くなるマイナス効果の方が短い辺（3m）が長くなるプラスの効果よりも大きいために対角線は短くなる。

(3) 全微分を使わずに、対角線の長さの変化を調べよ。

解）変化前の対角線の長さは三平方の定理より、5m すなわち 5000mm であることが分かる。計算機（電卓や Excel などの表計算ソフト）を使って、変化後の対角線の長さを計算すると、

$$f(3001,3999) = \left(3001^2 + 3999^2\right)^{1/2} = \left(9006001 + 15992001\right)^{1/2} = \sqrt{24998002}$$

これは無理数なので Excel でも近似値しか求められない。その値はおよそ 4999.800196 。よって、求める対角線の長さの変化はおよそ

$$4999.800196 - 5000 = -0.199804$$

である。

解説：(2)の答えとの誤差はわずか 0.000196mm で、正解に対する誤差の割合は 0.1%未満である。状況にもよるが実用的なレベルでは(2)の答えでも十分通用することがわかるだろう。

問 13.4：応用問題

底円の半径 5m、高さ 10m の円柱形のタンクがある。半径の長さを 1mm 大きくする代わりに、高さを 1mm 短くすると、タンクの容積はどのように変化するか。

(1) 計算する前に結果を予想してみよう。

タンクの容積は増えるでしょうか、それとも減るでしょうか。正しくない予想をしても恥ずかしいことではありません。直感力のゲームと思って予想を楽しみましょう。

(2) 全微分を使って、容積の変化を調べよ。

解) 底円の半径が r m、高さが h m の円柱形のタンクの容積を V m^3 とすると、V は r と h の関数になり、この関数を g とすると、

$$V = g(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

となる(わからない人はテキスト 12 章の章末問題/問 12.2 を見てください)。

全微分より、(r, h) が $(5, 10)$ からそれぞれ微小に $\Delta r, \Delta h$ だけ変化するとき、関数の値 V はおよそ

$$\Delta V = \frac{\partial g(5,10)}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial g(5,10)}{\partial h}\Delta h$$

だけ変化する。

この問題では、$\Delta r = +0.001, \quad \Delta h = -0.001$

であり、r に関する偏導関数と偏微分係数はそれぞれ

$$\frac{\partial g(r,h)}{\partial r} = 2\pi\, r \cdot h \qquad \frac{\partial g(5,10)}{\partial r} = 2\pi \times 5 \times 10 = 100\pi$$

詳細は 12 章の章末問題/問 12.2 を参照してください。

同様に h に関する偏導関数と偏微分係数はそれぞれ

$$\frac{\partial g(r,h)}{\partial h} = \pi\, r^2 \qquad \frac{\partial g(5,10)}{\partial r} = 25\pi$$

となる。よって求める関数の値 V の変化ΔV はおよそ

$$\Delta V = 100\pi \times (+0.001) + 25\pi \times (-0.001) = 0.075\pi$$

となる。すなわち容積は 0.075π m^3(約 0.2356m^3)だけ**増える**と予想される。

(3) 全微分を使わずに、容積の変化を調べよ。

解) 変化前の円柱の体積は、250π m^3(約 785.398m^3)であることが分かる。計算機(電卓や Excel などの表計算ソフト)を使って、変化後の円柱の体積を計算すると、

$$g(5.001, 9.999) = \pi \times 5.001^2 \times 9.999 = 250.074999999\pi$$

よって、容積は 0.074999999π だけ増える。

解説:(2)の答えとの誤差はわずか 0.0000000314m^3 で、正解に対する誤差の割合は 0.00001%未満である。

問 13.5:応用問題

横幅 3m×高さ 2m×奥行き 1m の直方体の箱を設計している。横幅と高さと奥行きをすべて 1cm 小さくすると、箱の容積はどれだけ小さくなるか。

(1) 計算する前に結果を予想してみよう。

教室で学んでいる場合は予想を投票して一番近い人に賞品をあげるゲームなどをやっても面白いと思います。

(2) 全微分を使って、容積の変化を調べよ。

解）横幅が x_1m、高さが x_2m、奥行きが x_3m の直方体の箱の容積を V m^3 とすると、V は x_1, x_2, x_3 の３変数を独立変数とする関数になる。この関数を F とすると、

$$V = F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

となる。

　全微分の考え方を３変数関数に当てはめると（テキスト p.267 参照）、(x_1, x_2, x_3) が(3,2,1) からそれぞれ微小に $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ だけ変化するとき、関数の値 V は関数のグラフに沿って、およそ

$$\Delta V = \frac{\partial F(3,2,1)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial F(3,2,1)}{\partial x_2}\Delta x_2 + \frac{\partial F(3,2,1)}{\partial x_3}\Delta x_3$$

だけ変化する。

　この問題では $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = -0.01$ であり、x_1, x_2, x_3 に関する偏導関数はそれぞれ

$$\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1} = x_2 \cdot x_3, \quad \frac{\partial F(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2} = x_3 \cdot x_1, \quad \frac{\partial F(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3} = x_1 \cdot x_2$$

となるから、対応する偏微分係数は

$$\frac{\partial F(3,2,1)}{\partial x_1} = 2 \cdot 1 = 2, \quad \frac{\partial F(3,2,1)}{\partial x_2} = 1 \cdot 3 = 3, \quad \frac{\partial F(3,2,1)}{\partial x_3} = 3 \cdot 2 = 6$$

となる。

　よって求める関数の値 V の変化ΔV はおよそ

$$\Delta V = 2\times(-0.01) + 3\times(-0.01) + 6\times(-0.01) = 11\times(-0.01) = -0.11$$

となる。すなわち、約 0.11m^3 だけ小さくなると予想される。

(3) 全微分を使わずに、容積の変化を調べよ。

解）変化前の箱の容積は 3×2×1=6m^3 である。計算機（電卓や Excel などの表計算ソフト）を使って、変化後の対角線の長さを計算すると、

$$F(2.99, 1.99, 0.99) = 2.99\times1.99\times0.99 = 5.890599$$

よって、容積の変化は

$$5.890599 - 6 = -0.109401$$

m^3 である。すなわち、およそ 0.1094m^3 小さくなる。テキストでは単位が cm^3 になっていました。m^3 に訂正します。

解説：(2)の答えとの誤差はわずか 0.000599m^3 で、正解に対する誤差の割合は 0.55%未満である。

問 13.3、問 13.4、問 13.5 を比較すると、元の長さに対する変化の割合が小さいほど誤差の割合も小さくなることがわかる。微分による近似計算は十分に小さい変化に対しては有効であることを理解しよう。

問 13.6：発展問題

偏微分係数$\partial f(a_1,a_2)/\partial x_1$と$\partial f(a_1,a_2)/\partial x_2$が存在するが、点$(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$における関数$f(x_1, x_2)$の立体グラフの接平面が存在しない例を作れ。ただし、「接平面が存在しない」とは、立体グラフをいくら拡大しても平面で近似できないことを指す。

解）たとえば$a_1 = a_2 = 1$として、x_1とx_2のいずれかの値が 1 ならば関数の値は 1、それ以外の場合は関数の値は 0 であるような関数を考えます。式で書くと

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}1 & \text{if } \ x_1=1 \text{ or } x_2=1\\ 0 & \text{if } \ x_1\neq 1 \text{ and } x_2\neq 1\end{cases}$$

となる関数です。議論を明確にするために関数の値に名前を付けてyとしましょう。

この関数のグラフはほとんどの部分が$y = 0$の水平な平面ですが、垂直に交わる 2 つの直線$x_1 = 1$と$x_2 = 1$の上では$y = 1$になるので、水平な平面から十字の直線が浮き出たような立体グラフになります（図参照）。

この関数は点 (1,1)で偏微分できます。このことを確認しましょう。x_1に関する偏微分係数は

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial x_1}=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{f(1+\Delta x_1,1)-f(1,1)}{\Delta x_1}$$

です。x_1とx_2のいずれかの値が 1 ならば関数の値は 1 なので、当然$f(1,1) = 1$であり、どんなΔx_1の値に対しても$f(1+\Delta x_1,1) = 1$になります。よって、

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial x_1}=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{1-1}{\Delta x_1}=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{0}{\Delta x_1}=\lim_{\Delta x_1\to 0}0=0$$

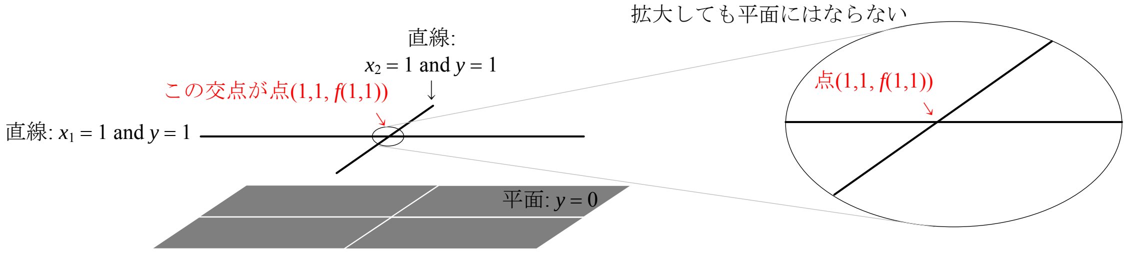
となります（どんなどんなΔx_1の値に対しても$0/\Delta x_1$は常に 0 なので、$\Delta x_1\to 0$のときの極限も 0 になります）。

同様にx_2に関する偏微分係数も

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial x_2}=0$$

となります。

このように偏微分係数は定義できますが、点$(1,1, f(1,1))$における関数$y = f(x_1, x_2)$の立体グラフの接平面が存在するかというと、存在はしません。関数の立体グラフは点$(1,1, f(1,1))$のところで、２つの水平な直線が直角に交わっています。グラフを点$(1,1, f(1,1))$のところで拡大しても平面に近づくことはありません。どこまで拡大しても 2 つの直線の交点であって、平面にはならないのです。



以上