

「工学のための数値計算」 10章 章末問題 解答例

- 1 (1) 連立方程式は以下のとおり . (2) $F_{11} = F_{31} = F_{13} = F_{33} = 0.203125$, $F_{21} = F_{12} = F_{32} = F_{23} = 0.218750$, $F_{22} = 0.218750$.

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \\ F_{31} \\ F_{12} \\ F_{22} \\ F_{32} \\ F_{13} \\ F_{23} \\ F_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0.250 \\ 0.375 \\ 0.250 \\ 0.000 \\ 0.250 \\ 0.375 \\ 0.250 \\ 0.375 \end{bmatrix}$$

- 2 (1) F_{22} , F_{32} , F_{33} の 3 つ . (2) 連立方程式は以下のとおり . 解は 1 の (2) に同じ .

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{22} \\ F_{32} \\ F_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.250 \\ 0.375 \end{bmatrix}$$

- 3 (1) は , テーラー展開

$$\begin{aligned} y(x + \Delta x') &= f(x) + \Delta x' f'(x) + \frac{(\Delta x')^2}{2!} y''(x) + \frac{(\Delta x')^3}{3!} y'''(x) + \cdots \\ y(x - \Delta x) &= f(x) - \Delta x f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} y''(x) - \frac{(\Delta x)^3}{3!} y'''(x) + \cdots \end{aligned}$$

を用いる . このように非対称の場合における 1 階中心差分は , 両式の差

$$y(x + \Delta x') - y(x - \Delta x) = (\Delta x' + \Delta x) y'(x) + \frac{(\Delta x')^2 - (\Delta x)^2}{2!} y''(x) + \cdots$$

を作り , $y''(x)$ 以降の項を無視して両辺を $(\Delta x' + \Delta x)$ で割ることにより ,

$$y'(x) \simeq \delta y(x) = \frac{y(x + \Delta x') - y(x - \Delta x)}{\Delta x' + \Delta x}$$

となる . 2 階の中心差分も同様であるがちょっと工夫が必要で , $y'''(x)$ 以降の項を無視することにより ,

$$y''(x) \simeq \delta^2 y(x) = \frac{\Delta x y(x + \Delta x') - (\Delta x' + \Delta x) y(x) + \Delta x' y(x - \Delta x)}{\Delta x \Delta x' (\Delta x + \Delta x') / 2}$$

となる . ただし , 1 階の場合は $y''(x)$ の項 , 2 階の場合は $y'''(x)$ の項以降を無視しており , 一般に近似誤差は式 (??) , (??) よりも大きい .

(2) (1) で得られた非対称の 2 階中心差分を x , y 方向に適用すればよく ,

$$\frac{f_{i+1j} - 2f_{ij} + f_{i-1j}}{\Delta^2} + \frac{\Delta f_{ij+1} - (\Delta + \Delta') f_{ij} + \Delta' f_{ij-1}}{\Delta \Delta' (\Delta + \Delta') / 2}$$

- 4 (1) 対称性を利用すると、図??(b)における独立な変数は F_{00} , F_{10} , F_{11} の3つで、次の連立方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -(\sqrt{3}-1) & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{00} \\ F_{10} \\ F_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 1.0 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

(2) $F_{00} = 0.196152$, $F_{10} = 0.1961524$, $F_{11} = -0.205771$.

- 5 (1) ガウス-ザイデル法は、 n 回目の反復解 $F_{ij}^{(n)}$ を用いて次の反復解 $F_{ij}^{(n+1)}$ を求める手法で、 $F_{ij}^{(n+1)}$ を計算する際に、それまでに得られている最新の解を用いる。この計算過程を表すように式(??)を変形すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} F_{11}^{(n+1)} &= \frac{1}{4}(f_{10}^c + f_{01}^c + F_{21}^{(n)} + F_{12}^{(n)}) \\ F_{21}^{(n+1)} &= \frac{1}{4}(f_{20}^c + F_{11}^{(n+1)} + F_{31}^{(n)} + F_{22}^{(n)}) \\ F_{31}^{(n+1)} &= \frac{1}{4}(f_{30}^c + F_{21}^{(n+1)} + f_{41}^c + F_{32}^{(n)}) \\ F_{12}^{(n+1)} &= \frac{1}{4}(F_{11}^{(n+1)} + f_{02}^c + F_{22}^{(n)} + F_{13}^{(n)}) \\ &\vdots \\ F_{33}^{(n+1)} &= \frac{1}{4}(F_{32}^{(n+1)} + F_{23}^{(n+1)} + f_{43}^c + f_{34}^c) \end{aligned}$$

- (2) この式から、 $(n+1)$ 反復解を表す左辺は、それを囲う上下左右4点の平均になっている。すなわち、ガウス-ザイデル法は、このような平均値で置き換える操作を、適当な順序に従って繰り返す処理に相当する。

- 7 ドームを1辺長さ1の正方形とし、圧力 $P = 1$ とする。図??に示すように、領域 D を x, y 各方向に4等分し合計9点の分点を取った場合の解は、 $F_{11} = F_{31} = F_{13} = F_{33} = 0.6875$, $F_{21} = F_{12} = F_{32} = F_{23} = 0.8750$, $F_{22} = 1.1250$ が得られる。さらに、 x, y 各方向を15等分して求めた数値解を右図に示す。

