February 2004 MATHEMATICAL SCIENCES Number 488

特集／幾何学的物理観

幾何学を通して見る物理の世界

中原　幹夫

本特集では「幾何学を通して物理を見ると何が見えてくるか」を研究の最前線で活躍している30代の若手を中心に解説していただいた．

幾何学は大きく，曲率のような局所的な量を研究する微分幾何学と，空間全体の大域的な性質を研究する位相幾何学（トポロジー）に分けられる．一昔前までは，「幾何学の物理学への応用」と言えば，一般相対論に代表されるように微分幾何学の応用を意味していた．しかし1970年代以降，主に素粒子論の分野でトポロジーの見方が物理学の理解，発展に大きな役割を果たすようになる．しかしその萌芽ははるか20世紀初頭にまで遡る．1931年にDiracは電場・磁場の双対性という極めて審美眼的な見地から磁気単極子を提唱した[1)]．奇しくも1931年はHopfが3次元球面 S^3 が2次元球面 S^2 上の $U(1)$ 束である（いわゆるHopfファイバー束）という事実を発見した年でもある[2)]．Hopf束が磁気単極子を記述する数学的枠組みであることが認識されたのはずっと後の1970年代になってからである．

さて，量子力学に必要な数学と言えば，私が学生の頃は解析系か群論系の数学が大勢を占めていた．しかし，最近になって，量子力学の波動「関数」が実は関数ではなく，位相変換の自由度をもつ，ファイバー束の「切断」であることが認識されて以来，量子力学において幾何学的視点が重要な役割を果たす．磁気単極子の磁場の中を運動する電子の波動関数は，1つの波動関数では記述されず，例えば磁気単極子を中心とする球面上で，北半球での切断と南半球での切断の2種類の局所切断のペアで記述される[3)]．これらが赤道上で位相のゲージ変換で結ばれるという条件からDiracの量子化条件 $eg = n\hbar c/2$ が得られる．ただし e, g は電子の電荷と磁気単極子の磁荷，n は整数である．谷村氏は一般の多様体上の量子力学におけるデリケートな問題を解説された．

現代の理論物理学において，幾何学と最も活発な相互作用を行っているのは素粒子論であろう．本特集でも場の理論，大統一理論，超弦理論と幾何学の関係を解説していただいた．

最初に述べたモノポールの研究は，やがてYang-Mills理論におけるインスタントンのモジュライ空間の理論などへと目覚しい発展を遂げた．安井氏は n 次元多様体の特殊ホロノミー群の中で特別な次元においてのみ実現する G_2（7次元）と $Spin(7)$（8次元）をホロノミー群として持つ多様体をEinstein計量の視点から解説された．

自然界における力は電磁相互作用，弱い相互作用，強い相互作用および重力相互作用の4種類がある．重力を除く残りの力を統一する理論が大統一理論である．そこでは低エネルギー領域におけるゲージ対称性 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ を，それ