MATHEMATICAL SCIENCES
April 2004 Number 490

特集／演算子・作用素の魅力

演算子・作用素というパラダイム

河東 泰之

1. 演算子・作用素とは何か

演算子・作用素はいずれも英語の operator の訳である．伝統的に物理学では演算子と訳され，数学では作用素と訳されているので，本特集でも著者によってそれぞれの用語が使われているが同じものを指している（ついでに中国語では算子と訳している）．以下本文でいちいち両方並べるのもわずらわしいし，私は数学者なので，ここでは作用素と言うことにしよう．作用素とは，ある集合からある集合への写像のことであり，この「集合」や「写像」にどのくらいの条件を課すかは場合によるが，普通は集合としてはベクトル空間くらいを要求してその上での線形写像を考えることが多い（非線形の微分作用素もたくさんあるが）．ベクトル空間の係数は任意の体でもよいが，解析的なことを考えるときはたいていは複素数か実数である．さらにベクトル空間も無限次元を考えることが普通である．有限次元で考えてももちろんよいが，その場合は線形写像は行列で表されるのでわざわざ作用素などと言わなくても通常の線形代数学でカバーされる．無限次元ベクトル空間での線形代数学にあたるものが関数解析学であり，そこでは通常無限次元空間の位相を考えている．そのような無限次元ベクトル空間は典型的には，バナッハ空間，ヒルベルト空間などと呼ばれるものである．以下主にヒルベルト空間の場合について説明するが，位相を考えない無限次元ベクトル空間上の作用素も，数学，物理学の様々な局面で現れることにも注意しておく．

さてもう少し詳しい話に入る前に，全体的な枠組みについて説明しておこう．私の専門である作用素環論は作用素のなす代数系を研究するものであるが，竹崎によるその専門書[3]の序文では，作用素環論は現代の数論であるという考えが述べられている．それはつまり，数の概念をどんどん拡張していくことによって作用素に到達するということである．自然数から始まって，整数，有理数，実数，複素数と数の概念は順を追って拡大されてきた．人類の歴史においても，我々が数学を学ぶ順序においてもそうである（このほかに 4 元数もあるが）．作用素はこのような数の体系を拡張したものと思えるわけである．もちろん複素数 α に対し，ベクトルを α 倍するという作用素を対応させれば，これは加減乗除の演算を保っているので，このような意味で作用素が数概念の拡張になっていることは明らかである．また，実数から複素数に広がるときに，大小比較の可能性が失われたように，複素数から作用素に広がるときには積の可換性が失われ，またゼロでない元は逆元を持つという性質も失われる．しかしこれだけでは，作用素