September 2004 MATHEMATICAL SCIENCES Number 495

特集／可換から非可換へ

可換から非可換へ

荒木 不二洋

1. 古典力学から量子力学へ

可換から非可換への移行は，物理学では量子力学の本質的な特性として現れた．1920 年代後半のことである．座標 x と運動量 p が可換，すなわち $xp = px$ であることは，古典力学では当たり前であり，特にとりたてて述べるまでもないことであったものが，量子力学では，その基本公式として，正準交換関係

$$xp - px = i\hbar \quad (i = \sqrt{-1}) \tag{1}$$

が設定され，ハイゼンベルグ (W.K. Heisenberg) は，この (1) 式から，x および p の測定値の分散

$$\Delta x = \left(\left\langle (x - \langle x\rangle)^2 \right\rangle\right)^{1/2},$$
$$\Delta p = \left(\left\langle (p - \langle p\rangle)^2 \right\rangle\right)^{1/2}$$

の間の不確定性関係

$$\Delta x \cdot \Delta p \geqq \frac{1}{2}\hbar$$

を得ている．ただし $\langle Q\rangle$ は物理量 Q の期待値を表す．また $\hbar$ はプランク定数の $\frac{1}{2\pi}$ である．

後の話のために，(1) 式の数学的背景を少し説明しておく．簡単のため 1 次元の空間を考えると，空間の点は実数座標 x で表示される．量子力学では，粒子の状態を，その空間分布を表す波動関数 $\Psi(x)$ で表し，粒子が点 x にいる確率密度は $|\Psi(x)|^2$，すなわち粒子が空間領域 V の中にいる確率は

$$\int_V |\Psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x \tag{2}$$

であると解釈する．この解釈に従うと，粒子の座標の平均値（すなわち期待値）は

$$\langle x\rangle_\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} x|\Psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x \tag{3}$$

で与えられ，それは状態によって異なる値をとる．また期待値からのずれ $x - \langle x\rangle_\Psi$ の自乗平均の平方根が分散

$$\Delta x = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x\rangle_\Psi)^2 |\Psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

である．

2 つの状態 $\Psi_1(x), \Psi_2(x)$ の線形結合

$$\Psi(x) = c_1\Psi_1(x) + c_2\Psi_2(x) \tag{4}$$

で表される状態は Ψ_1 と Ψ_2 の重ね合わせと呼ばれる．水面の波動や光などと同じように，粒子も干渉縞を作ることの説明に考えられたのであるが，水面の波の場合は係数 c_1, c_2 として実数を使えば十分であったが，量子力学では複素数を使うことが必要になり，(1) 式の右辺の $i = \sqrt{-1}$ とともに，量子力学で複素数が本質的な役割を果たすこ