November 2006 MATHEMATICAL SCIENCES Number 521

特集／固有値問題のひろがり

固有値問題の諸相

江沢 洋

1. 行列算

固有値問題は，まず行列の問題からはじまる．まずは行列の紹介からはじめるのが順序だろう．行列というのは

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

のように数（あるいは，数を表わす記号）をタテ，ヨコに並べたものである．ヨコの並び，たとえば $A_{21}\,A_{22}\,A_{23}$ を行という．この例なら第 2 行である．タテの並び，たとえば $A_{13}\,A_{23}\,A_{33}$ を列という．この例なら第 3 列である．行というのはヨコ書きの行である．読者は，これらの行，列にエンピツで影をつけてみよ．(1.1) の第 1 の行列は 2 次元，第 2 の行列は 3 次元であるという．もっと次元の高い行列も，無限次元の行列さえも考えられる．1 列だけの行列

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

を考えてタテ・ベクトルという．1 行だけの行列

$$(7, 4), \quad (y_1\ y_2\ y_3)$$

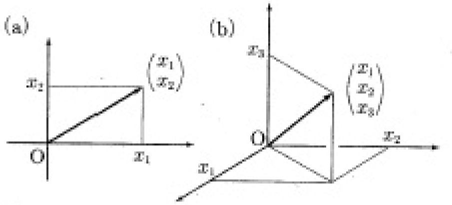

図 1 (a) 2 次元ベクトル，(b) 3 次元ベクトル．

はヨコ・ベクトルといわれる．ベクトルはおなじみの矢印で表わされる（第 1 図）．

1.1 行列の掛け算

ヨコ・ベクトルとタテ・ベクトルの掛け算を

$$(7\ 4)\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} = (7\times 9)+(4\times 3)=75,$$

$$(y_1\ y_2\ y_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (y_1x_1)+(y_2x_2)+(y_3x_3)$$

のように定義する．いわゆるベクトルのスカラー積である．

これを拡張して行列の積を考える．(1.1) の第 1 の行列は，ヨコ・ベクトル

$${}^t\boldsymbol{y}_1=(2\,3) \quad と \quad {}^t\boldsymbol{y}_2=(7\,1)$$

が積み重なった