

特集/ヤング図形で遊ぶ物理と数学

ヤング図形百態

氷上 忍

1. はじめに

ヤング図形が物理で使われ出したのは量子力学が始まりだと思えます。そう思って、H. Weyl (ワイル) の『群論と量子力学』(1927年)¹⁾を見ると確かに第五章の置換群の表現の所でヤング図形が載っています。この置換群表現は A. Young (ヤング) と G. Frobenius (フロベニウス) によるとあります。さらに Hund (フント) により量子力学で再発見されたとも脚注にあります。Alfred Young の論文²⁾は1900年で、Frobenius の学生であった Isaiah Schur (シュアー) の学位論文は1901年です。

この特集では Weyl の本の1927年からちょうど80年経った今、ヤング図形がどのように発展しているのか、どのように最近は使われているのか見てみたいと思えます。

2. 目を皿にする

ヤング図形そのものは単に箱を並べたものです。銭湯の下駄箱を思い浮かべていただけたらよいかと思えます。通常、下駄や靴を左上の箱から詰めていきます。ヤング図形も左上から箱が始まり、

最上段の箱の数が最も多く、下に行くほど箱の数は減っていきます。

ヤング図形を表すのに箱の数を上の段から並べるのが使われていますが、ここでは漢字をヤング図形と見立ててみましょう。口、日、目、皿、田、囧、などはヤング図形の格好をしています。これらは数字で表せば、それぞれ $[1]$, $[1^2]$, $[1^3]$, $[3]$, $[2^2]$, $[3^3]$ と表せますが漢字のほうが一目瞭然です。「目を皿にする」と言うことがあります。これは目を大きくするの意味です。ここではヤング図形の「目」を90度回転して「皿」にすることとしましょう。つまり、列を行にすることです。後で詳しく述べますが、直交群 $O(N)$ とシンプレクティック群 $Sp(N)$ の間の双対性関係を理解する際にも、この「目を皿にする」方法は役に立ちます。またユニタリ群 $U(N)$ の自己双対性でも「目」が「皿」になります。双対性とは片方が分かれば、もう片方が求まることを言います。あとで詳しく説明しましょう。

「福笑い」という遊びがありますが、これは目隠しして目や口などを置いていく遊びですが、面白い配置ができるので楽しいものです。容易に「目が皿」になったりします。

漢字遊びの次に、15パズルのことを思い出しましょう。 $4 \times 4 - 1 = 15$ の番号が書かれた正方形の駒を四角い枠内で1つだけあいた穴を利用して、