MATHEMATICAL SCIENCES
August 2007 Number 530

特集／数学における場の量子論

場の量子論と数学

深 谷 賢 治

1. はじめに

本特集のテーマは「場の量子論」である．場の量子論は物理の理論であるが，本特集の執筆者は筆者も含めて多くは数学者であり，数学の立場で場の量子論を考える，というのが趣旨である．

場の量子論が登場してから，50年以上が経過し，一応の完成を見てからも多くの年月がすぎた．しかし，その主要な部分を含んでいる，数学的に厳密な理論はいまだ存在しない．

これは物理学と数学関係の歴史の中でも，かなり例外的な事態ではないかと思われる．

アインシュタインが一般相対性理論を作ったときは，その基礎となる数学理論，すなわちリーマン幾何学は既に存在していた．量子力学が完成されていく仮定で，その基礎となるべき，ヒルベルト空間論は，同時に建設され，シュレーディンガー方程式や行列力学，ディラックの変換理論が生まれて間もなく，フォン・ノイマンの書物『量子力学の数学的基礎』が現れている．ディラックのデルタ関数のような，現れた当時は怪しげに見えた概念もまた，ほどなく超関数論の発見によって正当化された．ブラウン運動の研究から，ウィーナー測度や確率微分方程式が登場するまでには，時間がかかったが，50年ということはなかった．

物理学の基礎理論の一つである場の量子論は，数学としても豊かな構造を持っているにもかかわらず，主要部分が数学的な理解の外にある．ファインマン経路積分，繰り込み（群），漸近的自由，クォークの閉じ込めなど，数学的にも理解されるべきであると思われる多くの魅力的な概念・方法が場の量子論には多くある．

数学者が場の量子論に関心を持っていなかったわけでもなく，その数学的理解は多くの数学者の夢でもあった．さらには，例えば乱流現象のように，同じようにその理解が夢ではあっても，「現在の数学の枠内での精緻な構造」がむしろ期待されず，当分数学的な理解は難しいのではないか，と思わせる現象とは違って，場の量子論は，現代数学による記述に一見向いた構造を持っている．確率論，作用素環，群の表現論や可積分系，微分幾何学や位相幾何学，代数幾何学，さらには整数論まで，非常に多くの数学が，場の量子論の数学的理解の試みに動員されてきた．

にもかかわらず，そのような試みがことごとく失敗しているのは，現代数学に何か欠けているものがあるのではないかとさえ思わせるのである．

以下，場の量子論に関して，数学の立場から，勝手な感想を述べたい．筆者は数学者で，場の量子論の専門的な教育を受けたことはなく，果たしてどのくらい理解しているのか怪しく，ましてや専門家ではない．数学者の受ける訓練では，理解するということには，一定の明確な意味があり，それは，物理の専門家が場の量子論を理解する，というのとは，相容れない．厳密に証明できないこ