October 2007 MATHEMATICAL SCIENCES Number 532

特集／フーリエ解析の力

フーリエ解析の広がり

新井 仁之

フーリエ解析は現在，科学・技術の様々な分野で必要不可欠な数学的道具として使われている．例えばディジタル信号処理がその典型的な例の一つであろう．この方面の本を紐解けば，かなりの部分がフーリエ解析に負っていることを見ることができる．しかしフーリエ解析は単なる道具というわけではない．実は現代数学の基礎を確立させるという歴史上重要な役割も果たしてきた．意外に思う方もおられるかもしれないが，関数の概念，リーマン積分，集合論などはフーリエ解析の研究が一つの発端となって造られたものである．さらにフーリエ解析自身もそれらの基礎理論を利用し，厳密かつ精緻なものとして整備されていった．フーリエ解析は数学の中でもとりわけ理論研究と実用研究が共に充実している分野であると言えるだろう．本特集では数学，物理学，工学などの諸分野でフーリエ解析がどのような役割を果たしているのか，その様子を各分野の専門家により解説してもらう．

本稿ではその導入としてフーリエ解析とはどのようなものか，そしてなぜ役に立つのかを概説する．

1. フーリエ解析とは何か

私たち人類は，自然界に存在する複雑なものがより単純な基本構成要素からなっていることを発見してきた．例えばすべての物質はより基本的ないくつかの原子から構成されているという原子論がそれにあたる．またアイザック・ニュートン（1642–1727）の色彩の研究もその一例であろう．彼はプリズムを用いて太陽光が7つの基本的な光（スペクトル）に分解でき，逆にそれらを合成して白色光が生成されることを報告している．

19世紀初め，数学の分野でも「複雑なものが単純で基本的なものからなる」という発見がなされた．それが本特集のテーマとなっているフーリエ解析の基本原理である．フランスの数学者ジョゼフ・フーリエ（1768–1830）は次のような原理を提唱した．

すべての関数はサインとコサインに分解される．

まずこのフーリエ解析の基本原理を詳しく述べることから始めたい．初めに $\boldsymbol{R}$ 上で定義された関数 $f(x)$ が周期 2ℓ をもつ場合を考え，次に周期をもたない場合を扱う．関数 $f(x)$ が周期 2ℓ をもつとは，$f(x+2\ell)=f(x)$ $(x\in\boldsymbol{R})$ が成り立つことである．いま $\omega=\pi/\ell$ とおく．このときフーリエはこの関数 $f(x)$ が三角関数から次のように構成されていると考えた．

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x), \tag{1}$$