July 2010 MATHEMATICAL SCIENCES Number 565

特集／物理学と行列

行列の面白さと奥深さ

坂井 典佑

今回の特集では物理学における行列の使われ方を様々な側面から探っていく．本稿では3つの例をとって，身近な使い方から出発して，行列の奥深い意味へと進化していく一端に触れてみたい．

1. 回転を行列で表す

2次元面内の回転では，角度 θ_1, θ_2 と2回続けて回転を施した場合に，どちらの回転を先に行っても，$\theta_1+\theta_2$ という角度だけ回転するので，同じ結果になる．しかし，3次元空間での回転の場合には，こうはいかない．簡単な例を示すために，図1のように，半径1の球面を考え，z 軸上の北極点 $(0,0,1)$ に，x 軸周りの $90°$ 回転 R_x と y 軸周りの $90°$ 回転 R_y とを次々に施すことを考えてみよう．R_x を先に施すと北極点は y 軸上の点 $(0,-1,0)$ に移る．R_y を次に施しても点 $(0,-1,0)$ は y 軸上だから動かない．一方，R_y を先に施すと北極点は x 軸上の点 $(1,0,0)$ に移る．R_x を次に施しても点 $(1,0,0)$ は x 軸上だから動かない．したがって，2つの回転のどちらを先に施すかで，北極点の行き先は y 軸上の点 $(0,-1,0)$ になるか，x 軸上の点 $(1,0,0)$ になるか，結果が異なる．3次元回転は3行3列の行列で表現できるが，2つの結果が異なるというのは，行列の積が順序を入れ替えると異なる結果になるということに他ならない．

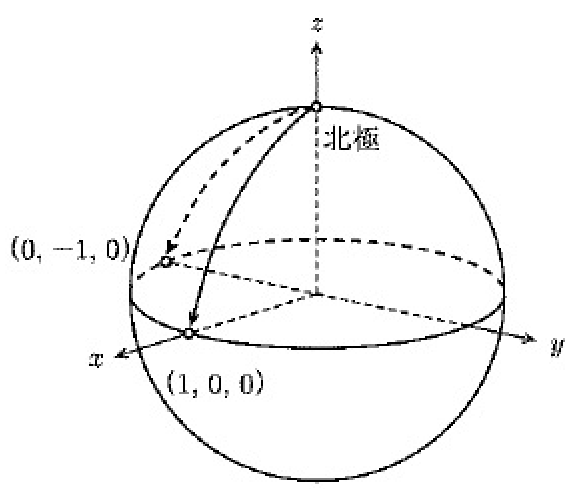

図1 球面上の点を x 軸周りの回転 R_x，y 軸周りの回転 R_y で動かした結果はどちらの回転を先にするかで結果が異なる．

$$R_yR_x \neq R_xR_y. \tag{1}$$

このように，行列という量の一つの重要な性質は，それらの積が交換しないということである．一般に非交換な量の代表格が行列である．

2. 量子力学と行列

行列が単に線型方程式の解を求めたり，直線や平面の幾何学，さらには回転などの具体的な記述