MATHEMATICAL SCIENCES
March 2011 Number 573

特集／方程式と現代代数学

方程式をめぐる代数の世界

桂　利行

未知の数や未知の関数などの間に成り立つ関係を数学的な記号を用いて表した等式を方程式と言う．方程式が多項式でできていれば代数方程式，未知の関数に関する方程式であれば関数方程式，未知の関数の微分を含む等式であれば微分方程式，等式が未知の関数の積分を含めば積分方程式などと言う．一般には，微分と積分が等式の中に両方入っているというような複合的なケースもある．その歴史は古く，紀元前22世紀にはバビロニアにおいて2次方程式が扱われていたという記録があり，紀元前17世紀にはエジプトで世界最古の数学書と言われるアーメスのパピルスに未知数を含む1次方程式の記録が残されている．また，17世紀にニュートンとライプニッツにより微分法が発見されて以来，古典力学におけるニュートンの運動方程式，電磁気学におけるマックスウェルの電磁方程式，量子力学におけるシュレーディンガー方程式などは，基本的な微分方程式として応用上も重要な役割を果たしていることは周知の事実である．この特集号では，このような方程式の代数的側面の入門的な世界を総括的にご紹介する．

まず取り上げるのは連立1次方程式である．これは，線形代数の中心的は対象であり，行列を用いてすでに完成された理論がある（本特集号の木村俊一氏の論説参照）．多項式の次数をあげると代数方程式の理論になる．n を自然数，n を変数とするとき，複素数を係数とする n 次代数方程式

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

が複素数の範囲に必ず解をもつことは1799年にガウスの学位論文によって示された．言い換えると，複素数を係数とする n 次多項式は，必ず1次式の積に因数分解されるということである．その後，この定理にはいくつもの証明が考案されており，ガウス自身も4つの異なる証明を与えている（本特集号の清水勇二氏の論説参照）．係数に有限回の四則演算と根号を施して代数方程式の解を表すことを，その方程式の代数的解法と言う．n 次代数方程式に代数的解法が存在するかという問題は解の存在とは独立した問題である．2次方程式に解の公式があることは古くから知られていたが，3次以上の方程式に解の公式がつくれるかという問題は中世には大きな問題であった．16世紀になって，3次方程式についてはカルダノによって，4次方程式についてはフェラーリによって，解の公式が発表された．3次方程式については，カルダノはタルタリアから公表しない約束で公式を教えてもらったが，約束を破って彼の著書『アルス・マグナ』に公式を発表してしまったという逸話も残されている（本特集号の小林正典氏の論説参照）．5次以上の方程式に代数的解法が存在しないことを初めて示したのはノールウエイの数学者アーベル