February 2016 MATHEMATICAL SCIENCES Number 632

特集／幾何学における圏論的思考

幾何学と圏論的思考

梶浦 宏成

幾何学における圏論の応用について，取りまとめの依頼が来た．実は圏論にかかわらず，幾何学に関する話題について広く網羅しているわけではないのであるが，執筆者として強力な方々がたくさん思い浮かんだので楽観的に引き受けることにした．圏は考えたい数学的対象を整頓して入れる箱のようなものである．箱の構造自体は自然で単純なものなので，箱の構造だけをみていても何もはじまらないが，それゆえいろんなものを入れることができ，全く異なる種類の数学をそれぞれ箱に入れてまとめてみると意外な関係がみえてくることもある．このようなわけで，圏の様々な幾何学における応用をまとめた特集というものはなかなかよいのではと思った．ベストの布陣で楽しい特集ができあがった．

さて最も親しみやすい（？）幾何学的対象としてベクトル空間を考えよう．ベクトル空間とは，(ベクトルの) 集合に (ベクトルの) 足し算とスカラー倍の構造を入れたものであった．2 つのベクトル空間を比べるときはそれらの間の線形写像，つまりベクトル空間の構造を保つ写像を考える．2 つのベクトル空間 V, W の間に全単射な線形写像が存在するとき，V と W は**同型**であるといい，ベクトル空間として V と W は同一視されるのだった．つまり，「行って戻ると恒等写像となる」($g \circ f = id_V, f \circ g = id_W$) 線形写像 f, g が存在するときである．

$$V \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} W .$$

位相空間の場合も同じである．位相空間とは集合の上に（つながり方を定める）位相とよばれる構造を入れたものであり，位相を保つ写像として連続写像（つながったものをちぎらないで写す写像）がある．2 つの位相空間は，それらの間に行って戻ると恒等写像となるような連続写像の組が存在するとき**位相同型**（＝**同相**）であるといわれる．群や環，多様体などももちろん，数学的な対象，つまり集合の上に数学的構造を入れたものはすべてこのような枠組みで整頓されるのである．

この枠組みをもう少しだけより整頓すると圏という概念に行き着く．ベクトル空間の圏ならば，(数学的) 対象をベクトル空間とし，2 つの対象の間の線形写像を射と呼ぶ．このときベクトル空間の同型はベクトル空間の圏における 2 つの**対象の同型**，つまり「行って戻ると恒等射となる射の組が存在すること」としていいかえたい．対象の同型を定めるために射の合成と，各対象の上の恒等射を必要とする．さらに射の合成が結合的 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ であるとするのは自然であろう．このように，圏 $\mathcal{C}$ とは，

- 対象の集まり $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$,
- 射の集合 $\mathrm{Hom}(X, Y) \quad (X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}))$

があって，射の合成

$$\circ : \mathrm{Hom}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X, Z)$$

で結合的なものが定まっていて，特に各対象 X に対し必ず恒等射 $id_X \in \mathrm{Hom}(X, X)$ が存在するもののことである．ここで id_Y が**恒等射**であるとは