

特集／解析力学とは何か

## 解析力学概観

伊藤 克司

### 1. はじめに

本特集のタイトルは“解析力学とは何か”というものである。この間について考える前に、解析力学をまず概観してみよう。

解析力学は 1788 年に Lagrange によって創始された物理学の一分野であり、Newton の運動方程式を Euler の変分原理によって定式化したことから始まる。その方程式は Euler-Lagrange 方程式と呼ばれ、幅広い範囲の力学の問題に適用される。特に拘束条件のある多体系の力学の問題を解く際に大きな威力を発揮する。Newton の運動方程式はもっぱら質点の位置ベクトルに対する微分方程式を扱うのに対し、Euler-Lagrange 方程式では、直交座標にとらわれない一般の座標をとることができ、拘束条件を取り入れやすいからである。運動方程式は、一般化座標とその時間微分の関数であるラグランジアンにより決定される。この関数は、ラグランジアンとしか呼びようのない天下りのものである。初学者は、まずラグランジアンに慣れることから解析力学を学んでいくことになる。

Hamilton は 1834 年、一般化座標とその共役運動量の 1 階の偏微分方程式である Hamilton 方程式を変分原理から導出した。この方程式は、一般化座標の 2 階微分方程式である Euler-Lagrange

の運動方程式と単に同等であるだけでなく、量子力学、統計力学等の現代物理学の定式化と深く関係している。その後解析力学の主要な道具である Poisson 括弧、正準変換等が導入され、対称性と保存則の関係である Noether の定理や、Hamilton 方程式による相流が相空間の体積を保存するという Liouville の定理が導かれる。さらに正準変換の母関数を駆使して、運動方程式は作用関数の 1 階偏微分方程式である Hamilton-Jacobi 方程式の形に定式化される。これはもとの Newton の運動方程式とは全く似ても似つかない方程式であるが、天体の運動の摂動論や前期量子論で重要な役割を果たしている方程式である。初学者は、こういう関係性を知らないまま抽象的な論理構成の中に入っていくことになる。大学の授業では時間の制約上余分な話は省かれ、力学のシンプルな枠組みが伝授される。

### 2. 解析力学の発展

前節における解析力学は、日本の大学の学部レベルでカバーされており、ほぼ 19 世紀までの内容である。解析力学はその後どう発展してきたのであろうか。Goldstein の“Classical Mechanics”は 1950 年刊行の第 1 版<sup>1)</sup>より現在まで 60 年以上にわたり読まれてきたすぐれた教科書である。こ