特集／数論と解析学

巻頭言

松本 耕二

整数論というのは整数の性質を研究する分野ですから，種々の巧妙な式変形，煎じ詰めれば加減乗除の有限回の組合せ，によって結果を導き出そう，というのが，まず考えられる自然な発想でしょう．事実，古代の諸文明以来近世に至るまで，整数の性質はそのようにして研究されてきました．ですから18世紀にEulerが，微積分学の手法を整数論に応用し始めたのは，真に革命的な新機軸だったわけです．

19世紀になると，複素関数論の爆発的な進展など，解析学そのものが大きく成長してきました．そしてそれと共に，ゼータ関数を用いた素数分布の研究や，eやπの超越性の証明など，数論においても解析的な手法による豊かな実りが次々ともたらされるようになり，「解析的整数論」という言葉も定着してきました．そして今日ではもはや，解析的手法を全く使わない整数論の分野を見つけることが難しいくらい，解析学は整数論に浸透しています．

我が国では，代数的整数論における高木貞治氏の偉大な業績以来の伝統もあり，整数論は代数学の一部分とみなされており，日本数学会の学会発表でも整数論関係の講演はそのほとんどが代数学分科会で行われます．しかし，高木貞治氏自身がその類体論の研究においてHeckeのL関数の性質を用いたように，代数的な研究対象であってもその研究のための道具として解析学を使うことは整数論では日常茶飯事です．

本特集では，解析学がどのように整数論のいろいろな場面に応用されているのか，その一端を，それぞれの分野で世界的なレベルで活躍されておられる専門家の方々にご執筆いただきました．

解析学を用いるもっとも典型的な場面の一つが，ゼータ関数，L関数の理論でしょう．もともとは素数分布の研究手段として導入されたものですが，現在では極めて多様な諸領域に応用されています．鈴木正俊氏はこの深く膨大な理論について，Eulerの昔から説き起こし，普遍性や多重ゼータ関数，Riemann予想への挑戦といった最近の流行の話題に至るまで，簡潔にまとめてくださっています．

ゼータ関数に関しては谷口隆氏の記事もありますが，こちらは日本人数学者たちが切り拓いた，概均質ベクトル空間の理論と呼ばれるものに付随するゼータ関数です．格子点の個数を数える，という素朴な整数論の問題が，高度な解析学を駆使する精緻な理論へと昇華していく様子を鑑賞することができます．

超越数というのは代数的数でない複素数のことです．上述したeやπなどは超越数の典型例です．代数的でないのだから解析学などの他の手段が必要なのだ，とただ言っただけでは詭弁に近いですが，実際に超越数研究には種々の解析的手法が不