

# プロローグ

数理科学 2012 年 5 月号 (NO.587) に「解析学で人工原子と光の物理に挑む！」という記事を書かせてもらい、「今後のこの分野の発展に、数理科学として喰らい付いていくことも面白いのでは」と締めくくった。また、数理科学 2015 年 11 月号 (No.629) の「フーリエ解析と物理学」という記事では、量子論への興味を誘う内容にしておきながら肝心な所で「それはまた遊びに来たときに」と、何ともすっきりしない終わり方で締めくくった。そこで本書では、量子論の観点からフーリエ解析とヒルベルト空間論を眺め、2016 年に新展開を見せた人工原子と光の実験物理の結果を数理解析する一つの試みで悪戦苦闘している様子を紹介してみたい。

人工原子と光の物理は量子電磁力学 (Quantum Electrodynamics, 略して QED) で記述されるべきものである。自然界における原子と光の相互作用は QED によって説明される。その相互作用の強さは、微細構造定数とよばれる無次元量  $\alpha \approx 7.297352 \times 10^{-3}$  で決まり、摂動論が有効となる世界に属する。この世界を弱結合領域とよぶことにしよう。一方、共振器量子電磁力学 (cavity QED) は、自然界の QED のものよりもっと強い相互作用の領域を、2 準位原子と 1 モード光子の相互作用系で実現する物理学である。この結合領域は強結合領域とよばれ、共振器の中に 2 準位系とみなせる状態を持つリユードベリ原子などを置き、共振器の中の 1 モード光子と相互作用させ実験的に実現する。共振器の中の 1 モード光子とは、共振器の中で光が作る定在波の量子化である。この cavity QED の数理科学的構造を超伝導回路で実現することが、2001 年に提案され、2004 年に実験的に実証された。この cavity QED は回路量子電磁力学 (circuit QED) とよばれるが、2 準位原子を 2 準位人工原子で、光をマイクロ波で置き換え、マイクロ波共振器<sup>\*1)</sup>を用い超伝導回路上で実現する。ここで、2 準位人工原子とは、次のように作る擬似原子である。超伝導 LC 回路の超伝導エネルギー・ギャップに現れる調和的に並ぶエネルギー準位に対し、ジョセフソン接合で非線形性を導入することで、他のエネルギー準位から孤立した 2 準位を作り出し、2 準位原子のエネルギー準位を擬似的に超伝導回路で作出す。この circuit QED の特徴は、量子論的ミクロなパラメータが、回路のマクロなパラメータで制御できることであり、このことが原子・光間相互作用の制御を容易にし、cavity QED の強結合領域を超える、超強結合領域、さらには深強結合領域とよばれる量子色力学並の強さを実現しているように思われる。このような超強結合領域もしくは深強結合領域では、もちろん摂動論は効かず、これらの結合領域を理論的に説明する QED は未だ無いと言って過言ではないだろう。しかしながら、現在の極限の実験技術がもたらす結果は興味深く、circuit QED を用いた素粒子物理学に見られる強結合系の量子シミュレーションも期待でき、この超強結合領域さらには深強結合領域での物理を解析する理論の構築は意義深いと思う。

---

\*1) マイクロ波領域の共振器で、金属で囲まれた空洞から成るので空洞共振器ともよばれる。

本書では、フーリエ解析とヒルベルト空間の理論の必要最低限を紹介し、それらを用いて必要となる量子論の概念を導入する。以上を基に、超強結合領域、深強結合領域の数理的解析の一端を紹介してみようと思う。従って、数学の定理を数学者と同様に証明するのではなく、それらを応用し数理物理学的考察を試みる内容となるので、通常の数学の教科書や物理学の教科書に比べると、内容を記述する体裁はかなり異端児的かもしれない。特に、数理科学 2015 年 11 月号 (No.629) の「フーリエ解析と物理学」の「1. 序」の最初の段落に書いた内容を詳しく説明することになるが、そこでも書いた、磯崎<sup>[8]</sup>(2015) に現れる Z 先生、A さん、B さん、C さんの議論の中に遊びに行き、数理物理で戯れる続編である。従って、関連した話題で少々道草をすることもあるかと思う。本書のテーマは、フーリエ解析、ヒルベルト空間論、量子論、circuit QED といったところだが、世の中にはこれらに関する名著が多く存在する。そのような中に筆者ごときが新たに教科書を出版するのはまさに愚の骨頂である。そこで、本書では視点を変え、それらの名著を財産としその財産をどう享受するか、と言うより、名著を楽しみ名著で遊ぶという路線に沿って内容をまとめる。特に、量子論は人の眼の前に現象としてその姿を現すものを限り、人の眼に直接見せない部分で大事な多くのことを決める世界である。もちろん量子論においてその世界の様子を白日の下にさらすのは、理論物理学であり、実験物理学であるが、数学という道具で量子論を想像し、解析してその美しさ<sup>[29]</sup>を楽しむこともできる。数学は量子論の世界を解析するための武器であると同時に、量子論の世界を我々に悟らせるための大事な概念も提供してくれる。量子論と結び付く数学として、関数解析、すなわちヒルベルト空間とその上の演算子の数学の重要性は誰もが認識するところであろう。しかしその前に、例えば、数学科の学生であればルベグ積分を習うが、積分の計算のみであればリーマン積分のほうが便利で、ルベグ積分を学ぶ意味を見失っている学生も少なくないのではないだろうか？ところが、ルベグ自身が量子論を意識したかは分からないが、ルベグ積分という概念が、量子論における状態空間が持つヒルベルト空間の構造、特に、完備性という重要な性質を保証するのである。このように純粋に数学の興味として生まれた概念が、量子論を展開する上で応用される。そのような数学の概念を応用側の視点から眺める説明をすることもある。この感覚で基礎概念を観ることができて初めて応用へと繋がる。

筆者は、大学、大学院の数学科で解析学、特に、数理物理学を学び、日立製作所の（当時、埼玉県比企郡鳩山町に存在した）基礎研究所に入社した。日立製作所では、プログラム意味論を基にした計算機科学、そして物理学を勉強しそれらの研究を行わせて頂いた。実験物理に関しては、外村彰さんをはじめ、優秀な実験物理の研究者から直接お話を聞いたり質問できたりもし、彼らの研究内容を「ある程度\*2)」理解できるようになるための良い環境があった。理論物理に関しては、当時毎週土曜日に学習院で開催されていた江沢洋先生のセミナーに参加し、理論物理学を門前の小僧状態で学ぶことができた。特に、江沢先生のセミナーには約 8 年間通い、朝から夜遅くまで議論することができたので、物理の人達の考え方や価値観を何となく自分自身の感覚で捉えられるようになった。東京を離れ岡山に移ってからも、FIRST でお忙しくなる前まで外村さんが毎年岡山を訪ねてくださり、色々と議論やアドバイスを頂いた。つまり、筆者は決してプロの物理屋ではなく、物理

---

\*2) とにかく実験装置に触りたく同僚から危険視されていて、よく「あっ、触らないで！これならいいよ！」とからかわれていたのが懐かしい。

に関しては、数学生まれ日立製作所&江沢セミナー育ちのアマチュアである。研究者としても、数学に関しては企業からの出戻りで、決して数学の研究者としての道を歩んで来た訳でもなく、好きな研究を細々と行っている。このような筆者が、名著をどう読みどう解釈し、それをどう自分自身のものにして来た‘つもり’なのかの戯言を綴ったので、本書は王道を進む研究者には百害あって一利無しかもしれない。この意味で、本書はかなり風変りな書籍に分類されるだろう。しかし、物理の概念を数学生まれ人間がどう捉えている気になっているのか?の一例でも提供できれば、今後の数学と物理学の交流に何かを残せるかもしれない。数学と物理学の交流が上手く行っている例に超弦理論などが挙げられるだろうが、本書を眺め、光と原子の相互作用の理論物理学と実験物理学に興味を持ち、彼らと一緒に議論することに興味を持つ数学の若い人が一人でも増えることに、本書が少しでも寄与できれば幸いである。

本書では、物理的な考察をしたり数学的な考察をしたりするが、数学、特に定理などの主張を述べるときは数学特有の言い回しをすることがある。例えば、「任意の」と記したときは、意味合い的には「勝手な」と読み替え、また、論理体系は古典論理に従うので、例えば、「任意の～に対して」と記述したときは「すべての～に対して」と読み替えても支障はない。こころ辺が気になる読者は、数学基礎論における意味論を勉強してみるとよい\*3)。なお、本書でのフーリエ解析に関する内容は、岡山大学理学部および広島大学工学部での講義ノート、また、ヒルベルト空間とその上の演算子の理論に関しては岡山大学理学部での講義ノート、さらに、岡山大学大学院自然科学研究科での数学と物理学の大学院生に対する講義と、4年生と大学院生のゼミでの雑談が基になっている。

筆者が物理学の世界に飛び込むうえで、異邦人を暖かく迎え入れ、見守りご指導頂いた江沢洋先生、故外村彰さんに感謝したい。さらに、エピローグに綴ったように、筆者を cavity QED、さらには circuit QED の世界に拒絶せず迎え入れてくれた物理の仲間達すべてに感謝したい。そして、このような風変りな原稿執筆でご迷惑をおかけし、お世話になった、(株)サイエンス社「数理科学」編集部の大溝良平さん、平勢耕介さんに、この場を借りお礼申し上げたい。

2017年春  
岡山の自宅にて  
廣川 真男

---

\*3) 数学基礎論は、数学という基礎学問の中のさらに基礎に当たる分野でもあるが、同時に、プログラミングの科学への応用から見ると、応用の最前線であるかも知れない。筆者も日立製作所で勉強する必要があった。

# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>線上で振動する粒子系</b>	<b>1</b>
1.1	振動粒子系の運動方程式	1
1.2	振動粒子系が生み出すエネルギー	2
1.3	振動粒子系の固有振動	4
1.4	振動粒子系が作る弦の波の運動	7
1.5	振動粒子系が作る弦の波のエネルギー	13
1.6	自己束縛された振動粒子系	15
<b>第 2 章</b>	<b>フーリエ級数</b>	<b>17</b>
2.1	余弦関数と正弦関数によるフーリエ級数	17
2.2	指数関数によるフーリエ級数	19
2.3	デルタ関数のフーリエ級数	24
2.4	波動方程式と平面波の重ね合わせ	25
2.5	初期・境界値問題の解	30
2.6	初期値問題の解	34
2.7	特性初期値問題とその解	35
<b>第 3 章</b>	<b>フーリエ変換</b>	<b>38</b>
3.1	フーリエ級数からフーリエ変換へ	38
3.2	フーリエ変換の性質	47
3.3	波動方程式の初期値問題への応用	49
<b>第 4 章</b>	<b>正準量子化</b>	<b>52</b>
4.1	正準量子化の発見	52
4.2	分散関係と波動方程式	61
4.3	量子論の物理的解釈とその数学	66
4.4	シュレディンガー方程式とシュレディンガー描像	73
4.5	ハイゼンベルグの運動方程式とハイゼンベルグ描像	74
4.6	正準交換関係とゆらぎ	78
<b>第 5 章</b>	<b>第 2 量子化</b>	<b>80</b>
5.1	光の放出と吸収	81

5.2	消滅・生成演算子と第2量子化 . . . . .	85
5.3	コヒーレント状態 . . . . .	102
5.4	仮想光子：固定湧源による相互作用から . . . . .	109
<b>第6章</b>	<b>ヒルベルト空間</b>	<b>114</b>
6.1	ヒルベルト空間 . . . . .	114
6.2	完全正規直交系 . . . . .	126
6.3	ヒルベルト空間のテンソル積 . . . . .	130
<b>第7章</b>	<b>ヒルベルト空間上の演算子</b>	<b>133</b>
7.1	演算子 . . . . .	133
7.2	有界演算子からの準備 . . . . .	146
7.3	非有界演算子からの準備 . . . . .	149
7.4	演算子のテンソル積 . . . . .	156
<b>第8章</b>	<b>人工原子と光の超強結合領域解析</b>	<b>158</b>
8.1	人工原子と光の超強結合領域における量子相転移 . . . . .	158
8.2	数理模型 . . . . .	159
8.3	シュレディンガー猫状態風コヒーレント基底状態 . . . . .	162
8.4	基底状態が纏う光子 . . . . .	169
	エピローグ	175
	参考文献	177
	索引	181