

まえがき

最近の物理学の研究においては、分野横断的な交流によって大きく発展することが多い。物理現象の中でも特に、量子現象は、素粒子や原子分子の領域においては言うに及ばず、広く物質科学から宇宙物理（ブラックホールのエントロピーなど）まで、様々な分野で重要な役割を果たしている。これらの幅広い分野の理論的研究において基本的な概念の一つは、量子古典対応（変換）である。その具体的な数学的処法を与えるのが、本書で取り扱う経路積分と量子解析である。

量子古典対応にも2つの立場がある。一つは、古典系を量子化するディラック-ファインマンの立場である。すなわち、古典的なラグランジアンを用いて経路積分を導入することにより、量子力学的定式化を行うものである。後に詳しく解説するように、ファインマンは古典的な調和振動子のラグランジアンを経路積分表示することにより、ハイゼンベルグの行列力学やシュレーディンガーの波動力学による量子力学と同等な「経路積分による量子力学の定式化」を発見した。

もう一つは、もともと量子的な物理対象系（例えば、スピン系など）を古典変数によって表現される系（いわゆる古典系）に変換するものである。どちらの立場も量子系を経路積分や経路和で表すという点では類似しているが、目的が逆になっている点が大きな違いである。この量子古典対応（ST変換とも呼ばれている変換）を用いると、量子系の計算機実験が可能となる。この典型的な方法が量子モンテカルロ法である。この方法は、現在多くの物性物理学の分野で用いられている。

本書では、この量子古典対応という概念を主軸にして経路積分と量子解析（非可換演算子の関数の微分やテイラー展開を扱う数学的方法）を解説する。まず第1章では、本書全体の概要を述べる。第2章では、ファインマンの経路積分法を導入し、量子ゆらぎを表す経路積分と変分原理を議論する。最近まで未解決だった散逸ダイナミクスの変分原理を詳しく解説する。第3章では、非可換系を可換系で表現する量子古典変換（ST変換）をトロッター公式とその一般化された公式を用いて説明する。これは量子モンテカルロ法の数理的役割を果たす。第4章では、手順の分離の数理的手法を与える高次指数分解の一般論を解説する。指数積公式は多くの分野で独立に研究されてきたが、筆者の漸化式による方法は任意の次数まで容易に求まり大変便利であり、ユニークである。第5章では、量子古典対応の数理的基礎となる非可換微分法としての量子解析を詳しく解説する。これはテイラー展開の量子版などを与える。第6章以降では、第5章までの数学的手法の物理への応用を論じる。

本書の基になった連載記事の執筆中、多くの人々との議論を通して啓発された。特に、松枝宏明氏、橋爪洋一郎氏に深く感謝致します。また、編集部の大溝良平氏・平勢耕介氏には多大のご支援を頂きました。

2017年8月

鈴木 増雄

目次

第 1 章	量子古典対応を基に量子系を視る	1
1.1	各テーマの概要	1
第 2 章	古典力学から量子力学へ	8
2.1	変分原理, ラグランジアンおよび経路積分量子化	8
2.2	散逸系の変分原理と経路積分量子化	16
2.3	非線形散逸系の変分原理と経路積分量子化	24
第 3 章	量子古典対応	32
3.1	非可換系を可換系で表現する	32
3.2	量子転送行列法	38
第 4 章	手順の分離と指数積公式	48
4.1	手順の分離と漸化式の方法による高次分解	48
4.2	指数積分解の一般的考察	55
4.3	指数演算子の一般分解理論	63
第 5 章	量子解析	73
5.1	非可換微分法と交換関係の計算公式	73
5.2	高階の量子微分と量子テイラー展開	81
5.3	量子微分方程式による BCH 公式の再考	88
5.4	多変数演算子関数の量子偏微分とその応用	96
5.5	量子汎関数微分と順序づき指数演算子	104
第 6 章	熱場ダイナミクスの定式化と非平衡統計物理への応用	112
6.1	熱場ダイナミクスの一般的定式化とその物理的意義	112
6.2	TFD による応答理論の一般化	119
第 7 章	非平衡統計力学のカノニカル理論	127
7.1	不可逆な輸送現象とエントロピー生成	127
7.2	散逸ダイナミクスのカノニカル理論	134

第 8 章 緩和現象のカノニカル理論	142
8.1 緩和の現象論	142
8.2 散逸ダイナミクスのカノニカル理論と示量性の仮定	144
8.3 緩和とエントロピー生成	145
8.4 「定常状態」でもエントロピーは増大する!?	146
8.5 緩和と秩序生成との関係	148
第 9 章 秩序生成のカノニカル理論	149
9.1 アインシュタインのブラウン運動の理論と秩序生成のスケーリング理論	149
9.2 秩序生成の数理的取り扱い	156
第 10 章 指数的時間のスケーリング理論	165
10.1 スケーリング理論の数理	165
10.2 スケーリング理論に関わる話題としての宇宙のインフレーションなど	172
第 11 章 物理系の変換・対応・等価性の効用	180
11.1 ニュートンの引力に関する定理, リー・ヤンの円定理および初等幾何の例	180
11.2 ゴーストスピン相互作用, 相関等式およびくり込み	189
第 12 章 トポロジー変化法と臨界現象の物理トモグラフィ	197
12.1 トポロジー変化法	197
12.2 エネルギーから自発境界磁化への転化	199
12.3 ゴーストスピン法による境界磁化の相転移・臨界現象の研究	202
12.4 臨界現象の物理トモグラフィ	203
12.5 単一系, 同一温度領域における 2 種類の普遍性クラスの臨界現象の出現	206
第 13 章 さらなる研究に向けて—まとめと展望	209
13.1 動的古典系と量子系との対応・等価性	209
13.2 グラウバーの動的イジング模型の可解性	213
13.3 一般化された XY 模型 (クラスター模型) の可解性	213
13.4 n -クラスターフリップの 1 次元動的イジング模型の可解性	214
13.5 3 次元クラスターイジング (吹き抜け) 模型の厳密解とその物理的特徴	215
13.6 古典 (可換) 性と量子 (非可換) 性の狭間で揺れる現象の取り扱い	216
13.7 おわりに	219
索引	221