

# はじめに

相互作用する量子多体系の問題は、1次元系の厳密解などを除いて一般には解くことができない。そのため、適当な小さなパラメータを考えて、それによる摂動計算によって調べるか、または平均場近似などの近似的手法によってハミルトニアンを単純化して調べることになる。本書では、多粒子の問題を取り扱うのに不可欠な第二量子化を基礎とした場の理論をもとに、グリーン関数を用いた解析的な手法を展開する。この手法によって、現在の物理学は量子多体系を系統的に研究する手段を手に入れたのである。物性物理学の取り扱う物質は多岐にわたるが、それぞれの分野においてグリーン関数の手法を用いた理論的発展は続いている。

本書の中心であるグリーン関数の方法は、摂動論を系統的に行うための手法であるが、それにとどまらず、視覚的に明解なファインマンダイアグラムを用いることによって、物理的意味が明らかになるという利点がある。摂動論においては、重要な項、または寄与の大きい項（主要項）を選び出し、それらについての無限級数和を求めることが必要になることが多いが、ファインマンダイアグラムの方法によれば、どのような寄与が取り入れられているか、またはどのような項が残されているか等が明らかになる。グリーン関数によって、帯磁率や電気伝導、遮蔽効果、超伝導等が徹視的に明確になっていく様子は爽快である。

本書ではグリーン関数の手法の物性物理学への応用を考えるので、線形応答理論における応答関数を求めるところに1つの力点が置かれている。応答とは系に外場をかけると、それによってある物理量に変化が見られることである。たとえば、電場をかければ電流、磁場をかければ磁気モーメントが影響を受ける。外場がかかると系の中の電子が運動を始めるが、グリーン関数は電子の運動（ダイナミクス）の情報をほぼすべて持っているので、グリーン関数を用いて系の応答を理解することができる。また、系の有限温度における相転移現象も物性物理学の重要な分野であるが、その典型的な例として超伝導状態への相転移も取り扱う。超伝導におけるマイスナー効果、フォノンの衣を着て運動する準粒子という描像、スピン揺らぎを用いた超伝導などについても、基礎からわかるようにした。物性物理学の分野は広範囲にわたるので、第2章の早い段階で各種ハミルトニアンを総合的に記述し、いつでも同じ出発点に戻れるように工夫した。

グリーン関数の教科書としては、Abrikosov-Gor'kov-Dzyaloshinskii や Fetter-Walecka による古典的名著がある。また阿部龍蔵「統計力学」(東京大学出版会)やSchriefferの超伝導の教科書も参考になる。しかし、これらの本では、その後の各分野における大きな発展について書かれていないことに注意が必要である。本書では、基礎的な部分から始めて、最近の進展まで含めて紙面と能力の許す限り加えることとした。論理の記述や説明の仕方に、新機軸を出したところもいくつかある。さらに後半部分では、個人的な趣味で今後の発展が期待できる、異常ホール効果、ゲージ不変性、固体中の電磁気学、熱電応答なども加えてみた。

ホームページ <https://sites.google.com/hosi.phys.s.u-tokyo.ac.jp/homepage> に、訂正箇所や詳しい計算部分等を載せる予定である。質問などもあれば HP へどうぞ。

日ごろからかなり刺激的な議論をしていただいている、福山秀敏・前橋英明・松浦弘泰・伏屋雄紀・荻宿俊風・溝口知成（敬称略）諸氏に大変感謝いたします。歴史パートについても、様々な示唆をいただきました。また、遅遅として進まない原稿を辛抱強く待っていただいた数理学編集部の皆様、最後の執筆の追い込みをかなりサポートしてくれた妻、2人の子供たち、および両親に大変感謝しております。

2018年2月

小形 正男

# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>第二量子化</b>	<b>1</b>
1.1	多体問題のシュレーディンガー方程式	1
1.2	完全対称関数と完全反対称関数	2
1.3	第二量子化への準備	4
1.4	第二量子化の定式化	6
1.5	物理量の期待値	10
1.6	固有関数による展開	11
1.7	ハイゼンベルグ描像	14
1.8	電流演算子	15
<b>第 2 章</b>	<b>モデルと物理量</b>	<b>17</b>
2.1	電子ガスモデル	17
2.2	クーロン相互作用	19
2.3	不純物との相互作用	21
2.4	フォノン	22
2.5	電子格子相互作用	24
2.6	一般のプロッホ電子, 多バンドのモデル	25
2.7	ハバードモデル	27
2.8	超伝導の BCS モデル	29
2.9	電流演算子, スピン流演算子 (ベリー位相)	30
<b>第 3 章</b>	<b>グリーン関数</b>	<b>35</b>
3.1	1 粒子グリーン関数	35
3.2	グリーン関数の意味といくつかの性質	36
3.3	相互作用がない場合のグリーン関数	39
3.4	温度グリーン関数	42
3.5	グリーン関数のレーマン表示	45
3.6	遅延グリーン関数と解析接続	46
3.7	並進対称性がある場合	48
<b>第 4 章</b>	<b>摂動論とファインマンダイアグラム</b>	<b>54</b>
4.1	相互作用描像と虚時間発展演算子	54

4.2	相互作用のある場合の温度グリーン関数	57
4.3	ブロック・ドッドミニシスの定理	59
4.4	グリーン関数に対する摂動計算	63
4.5	ファインマン図形とファインマンルール	65
4.6	運動量空間でのファインマン図形とファインマンルール	67
4.7	ダイソン方程式とハートレー・フォック近似	71
4.8	準粒子の概念とグリーン関数	75
4.9	分極とクーロン遮蔽：リング近似	78
<b>第 5 章</b>	<b>線形応答理論</b>	<b>83</b>
5.1	応答関数	84
5.2	外場の存在下での時間発展	84
5.3	周波数分解	86
5.4	応答関数の例と空間依存性	87
5.5	グリーン関数との関係	89
5.6	応答関数のレーマン表示と解析接続	90
5.7	並進対称性がある場合の線形応答	91
5.8	応答関数の対称性，クラマース・クローニツヒ関係式，総和則	93
5.9	揺動散逸定理	95
<b>第 6 章</b>	<b>線形応答理論の応用：電荷応答</b>	<b>98</b>
6.1	電荷応答関数	98
6.2	松原振動数の和の実行	101
6.3	リンドハード関数	103
6.4	クーロン相互作用の遮蔽	105
6.5	プラズマ振動	109
6.6	RPA 近似による電子の自己エネルギー	111
<b>第 7 章</b>	<b>帯磁率とハバードモデル</b>	<b>118</b>
7.1	スピン応答関数	118
7.2	帯磁率の RPA 近似	119
7.3	相転移	122
7.4	RPA 近似と平均場近似	125
7.5	SU(2) 対称性	126
<b>第 8 章</b>	<b>電気伝導度</b>	<b>129</b>
8.1	電流-電流相関関数	129
8.2	自由電子ガスの場合	131

8.3	不純物散乱の場合のファインマンルール	133
8.4	不純物平均と電子の寿命	134
8.5	電気伝導度におけるヴァーテックス補正	138
8.6	有限の松原振動数 $\omega_\lambda$ を持つときの松原和	141
8.7	不純物による電気伝導度	143
8.8	アンダーソン局在	145
8.9	ホール伝導度	149
8.10	異常ホール効果	154
<b>第 9 章</b>	<b>電子格子系</b>	<b>162</b>
9.1	電子格子相互作用のファインマンルールとグリーン関数	162
9.2	電子格子相互作用による引力メカニズム	164
9.3	電子格子相互作用による電子の自己エネルギー	165
9.4	格子の衣を着た電子	167
9.5	電子の寿命と電子格子相互作用による電気伝導度	170
9.6	フォノンの自己エネルギー	171
9.7	電子格子相互作用のヴァーテックス補正とミグダル近似	173
<b>第 10 章</b>	<b>超伝導</b>	<b>176</b>
10.1	クーバー対と BCS 波動関数	176
10.2	南部表示とハートレー・フォック近似としての超伝導	177
10.3	超伝導転移温度	182
10.4	マイスナー効果	183
10.5	コヒーレンス因子による超伝導状態での種々の物理量	185
10.6	引力とクーロン斥力の関係：異方的超伝導	188
<b>第 11 章</b>	<b>熱電応答</b>	<b>194</b>
11.1	熱現象に対する線形応答	194
11.2	ラッティンジャーの対応原理	196
11.3	熱流演算子の定義	200
11.4	ゼーベック係数	203
<b>第 12 章</b>	<b>固体中の電磁気学</b>	<b>207</b>
12.1	ゲージ不変性	207
12.2	誘電率・透磁率と電気伝導度	208
12.3	軌道帯磁率	211
12.4	ワード恒等式	213
<b>索引</b>		<b>219</b>