

まえがき

本書では、日本が生んだ比類なき数学者岩澤健吉が創始し、今日では岩澤理論と呼ばれている整数論の理論を、一般読者向けに、細部には立ち入らず、理論の全体を俯瞰することを念頭に、解説することを試みました。

岩澤の類数公式と呼ばれる、代数体の無限次拡大における中間体の類数の挙動を記述する定理は、それ以前には類似物がまったく存在せず、岩澤健吉の深い洞察により得られた独創的なものです。このぞくぞくする公式の証明を、一般読者が「手に入った」と感じることを願いながら、丁寧に説明しました。代数体の最大不分岐アーベル拡大のガロア群がイデアル類群と同型になるという類体論の結果を認めて頂ければ、残りは自己完結になっているはずです。

岩澤は Γ 加群の構造を詳しく調べることでこの定理を証明しましたが、セールが Γ 加群はより一般的な Λ 加群であることに気づき、今日では見通しのよい議論が可能である Λ 加群と考える方法が主流になっています。本書でも Λ 加群を採用しました。要となるのは構造定理で、単項イデアル整域上の有限生成加群の構造定理（単因子論）と類似の方法で証明されますが、 Λ は単項イデアル整域ではないため、やや複雑になります。今のところこの証明を書いた和書が見当たらないので、初学者の理解を助けるため、冗長になることを厭わず、できる限り丁寧に解説しました。ただし丁寧すぎると思われる部分は、この章に限らず、問題にまわすことで議論の流れが止まらないようにしました。問題には完全な解答をつけたので、必要に応じて本文を補うことができます。

岩澤理論の本質は、何と言っても岩澤主予想でしょう。全く関係のないように見える二つの対象が深いところで結びついていることを主張するこの予想は 20 世紀数学における白眉といえます。1973 年におけるコーツとリヒテンバウムによる部分的な解決を経て、1984 年にメイザーとワイルズによって有理数体上のアーベル拡大の場合に完全な形で証明されました。さまざまな分野でよく見られるように、岩澤主予想もメイザーとワイルズによる証明をきっかけとして、より一般的な形で定式化され証明されています。メイザーとワイルズによる証明は保型形式を本質的に用いる難解なものでしたが、ここでも多くの事例と同様に、現在ではオイラー系を用いる簡明な証明が開発されています。本書では、コーツとリヒテンバウムによる、初めての部分的証明を紹介します。限られた状況でしか適用できないものですが、イデアル類群の構造を明示的に記述する方法を与えており、そのような状況は実はかなり頻繁に現れるからです。直観に訴える証明も非専門家には馴染みやすいと思われます。

岩澤先生の講演や論文は（私は拝聴する機会に恵まれませんでしたでしたが、講義も）簡潔で明晰な叙述で知られています。岩澤先生の明晰さには遠くおよびませんが、本書では、私なりに、議論の流れを見通せるような記述を心がけました。30 年以上にわたり岩澤理論とくにグリーンバグ予想の周辺で共同研究を行ってきた、早稲田大学・小松啓一氏に強く推められたおかげで、本書を執筆する機会を得ることができました。この場を借りて、お礼申し上げます。

また、名古屋工業大学・水澤靖さんと工学院大学・森澤貴之さんには、原稿を読んで頂き、多く

の有益な助言を頂戴しました。水澤さんは岩澤理論の専門家の立場から、森澤さんは非専門家の立場から、それぞれの意見を述べて下さいました。本書が初学者にとって近づきやすいものになったとすれば—私はそう信じます—それはまったくお二人のおかげです。

本書は 1996 年に筆者が上智大学で行った代数学特別講義 II (岩澤理論) の内容が基になっています。単位互換制度を利用してこの講義を受講した学習院大学大学院の篠田良子さんは、原稿なしで進められた授業の内容を克明にノートに書き写して下さいました。そのコピーが本書を執筆する上で非常に役立ちました。22 年前の素晴らしい学生篠田さんに感謝いたします。

2018 年 1 月から 2018 年 3 月まで、平成 29 年度日本大学海外派遣研究員として筆者がボルドー大学に滞在した期間に、本書の執筆は完了する予定でしたが、アーベル体のイデアル類群計算アルゴリズムを PARI/GP に実装するという当初の目的が難航したため、執筆完了が大幅に遅れました。原稿の遅れを許し辛抱強く待ってくださった編集の大溝良平さんと、限られた時間の中でプロの校正の技を発揮してくださった平勢耕介さんには、心より感謝いたします。

ボルドー大学では、筆者が書いたコードを PARI/GP に実装できる形に手直しする作業が、ボルドー大学教授カリム・ベラバス (Karim Belabas) 氏と共に進められました。2 時から 8 時まで、文字通り休みなしに、コードを分析し無駄を省く共同作業が連日のように続いた日々は筆者にとって忘れえない思い出です。幸せだった日々を想いながら、共同作業の機会を作ってくれたベラバス氏に本書を捧げます。

2018 年 10 月

福田 隆

目次

第 1 章	イデアル類群と単数群	1
1.1	代数的整数	1
1.2	整数環	2
1.3	イデアル群	4
1.4	単数群	8
1.5	類数と単数の関係	10
第 2 章	無限次ガロア拡大	13
2.1	位相の導入	13
2.2	射影極限としてのガロア群	15
第 3 章	無限次拡大の分岐理論	18
3.1	有限次拡大の分岐理論	18
3.2	無限次拡大の分岐理論	20
3.3	フロベニウス写像と類体論	21
第 4 章	Λ 加群の構造定理	23
4.1	Λ の定義と性質	23
4.2	Λ 加群	26
4.3	擬同型による分類	28
4.4	構造定理からの帰結	35
第 5 章	岩澤の類数公式	39
5.1	\mathbb{Z}_p 拡大の基本性質	39
5.2	Γ 加群から Λ 加群へ	41
5.3	最大不分岐アーベル p 拡大	44
5.4	類数公式の証明と特性多項式	45
5.5	岩澤不変量	49
第 6 章	アーベル体の円分 \mathbb{Z}_p 拡大	51
6.1	CM 体からの準備	51
6.2	イデアル類群へのガロア作用	53
6.3	CM 体の円分 \mathbb{Z}_p 拡大	54
6.4	アーベル拡大におけるデルタ分解	56

第 7 章	ディリクレ指標	61
7.1	ディリクレ指標の定義	61
7.2	ディリクレ指標群	63
7.3	ガウス和	64
第 8 章	L 関数	67
8.1	ゼータ関数と L 関数	67
8.2	解析接続	68
8.3	ベルヌイ数	72
8.4	$L(1, \chi)$	74
第 9 章	p 進 L 関数	77
9.1	p 進巾級数	77
9.2	p 進対数関数と p 進指数関数	78
9.3	p 進 L 関数の特徴づけ	81
9.4	p 進 L 関数の構成	82
9.5	$g(T, \chi_0)$ について	90
9.6	p 進 L 関数の一意性	91
9.7	$L_p(1, \chi)$	91
第 10 章	岩澤主予想	93
10.1	主予想の定式化	93
10.2	証明のための準備	95
10.3	巡回拡大への還元	99
10.4	巡回拡大の場合	99
10.5	アーベル拡大への引き戻し	105
10.6	主予想の証明	106
第 11 章	グリーンバーグ予想	108
11.1	グリーンバーグ予想とは	108
11.2	基本的な判定法	110
11.3	実二次体で $p > 2$ の場合	115
11.4	実二次体で $p = 2$ の場合	119
11.5	市村・隅田の判定法	120
11.6	展望	123
第 12 章	岩澤マイナス不変量の計算	125
12.1	アーベル体の岩澤多項式	125
12.2	虚二次体の λ 不変量	128

第 13 章	アーベル体のイデアル類群	133
13.1	アーベル体の類数公式	133
13.2	巡回部分体への還元	135
13.3	巡回体の類数の p 部分	135
13.4	計算機への実装	137
13.5	群構造の決定	139
13.5.1	χ が奇指標の場合	140
13.5.2	χ が偶指標の場合	143
第 14 章	ウェーバーの問題	147
14.1	$h(\mathbb{B}_n)$ 計算の歴史	147
14.2	堀江の単数	149
14.3	小さい素数 ℓ に対する $h(\mathbb{B}_n)$ の非可除性	151
第 15 章	コーツ予想	157
15.1	ウェーバーの問題の拡張	157
15.2	ウェーバーの問題の発展	158
15.3	結び	159
第 16 章	数論ソフト PARI/GP の使い方	161
16.1	インストール	161
16.1.1	UNIX の場合	161
16.1.2	Windows の場合	162
16.2	gp の使い方	162
16.3	PARI のライブラリ関数を使う	165
16.4	ユーザーからデヴェロッパーへ	166
第 17 章	問題解答	168
17.1	イデアル類群	168
17.2	無限次ガロア拡大	172
17.3	無限次拡大の分岐理論	173
17.4	Λ 加群の構造定理	174
17.5	岩澤の類数公式	176
17.6	アーベル体の円分 \mathbb{Z}_p 拡大	177
17.7	ディリクレ指標	177
17.8	L 関数	180
17.9	p 進 L 関数	181
17.10	岩澤主予想	183
17.11	グリーンバーグ予想	184
17.12	岩澤マイナス不変量の計算	186

17.13	アーベル体のイデアル類群	187
17.14	ウェーバーの問題	188
17.15	コーツ予想	189
17.16	数論ソフト PARI/GP の使い方	189
参考文献		191
索引		196