

# まえがき

1989年の秋頃、当時修士2年生であった筆者に柏原正樹先生が「この前のあれ“crystal base”という名前にしました。」と仰った。あれとは、その少し前に柏原先生から伺っていた話に登場する新しく定義された“あれ”のことであった。crystal base — “結晶基底”という名前に接した瞬間であった。それから、ほぼ30年（現在2018年夏、出版はおそらく2019年）、結晶基底30歳。30年のうちに結晶基底の理論は大きく発展し、その全体像はもはや掴みようのないところまで行ってしまった感がある。本書は30歳になる/なった結晶基底にまつわる話を私が絡んだものを中心にまとめたものである。あくまでも私家版という趣でお読み頂ければ幸いである。

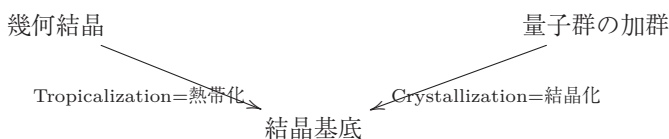
結晶基底の理論を簡単に説明してみる。まず、量子群とその表現論が結晶基底の話の根っこになる。量子群とは有理関数体 $\mathbb{Q}(q)$ 上定義された代数であり、リー代数の包絡環の所謂 $q$ -類似として捉えられ、その表現、加群はやはり $\mathbb{Q}(q)$ 上定義される。大雑把にいうと結晶基底はここで、 $q$ を0とした加群や（部分）代数の $\mathbb{Q}$ -基底として得られるものである。もちろん、これでは説明として乱暴すぎるし、そもそも数学的に正しいとは言えない。しかし、話としてはわかり易い。では、なぜ $q$ を0にするのか？これも一言でいうと、色んな計算が簡単になるからである。表現論などで加群への代数の元の作用は通常、複雑な線型形で表され、計算が大変なことは珍しくない。しかし、結晶基底の理論においてこうした計算は大幅に単純化される。しかも、 $q$ を0にしても元の情報はほとんど失われないのである。これは一見、夢物語のようにも思えるが現実である。こうした優れた性質のおかげで結晶基底は様々な分野に応用されることになった。リー代数や量子群の表現論のみならず数理論や代数群のmodular表現論、組合せ論などである。特に、組合せ論への応用については本書においても多くのページを割いた部分である。ヤング図形、ヤング盤に関する組合せ論には大きな威力を発揮した。その組合せ論への応用について重要な役割を果たすのがテンソル積についての性質である。量子群の2つの加群が結晶基底を持つとする。量子群はホップ代数の構造を持つので加群のテンソル積も量子群の加群となる。このテンソル積で得られる加群も結晶基底を持つということが結晶基底の大きな特徴となっている。詳しくは第4章に紹介してあるので、そちらをご覧ください。特に、テンソル積の既約分解は表現論における基本的な問題の1つであり、古典的にはリトルウッド・リチャードソン規則として知られた分解則が有名である。第5章で紹介されるようにそうした古典的な規則が結晶基底の言葉によって翻訳されることは結晶基底の理論が古典的な理論の中に息付いていたことの証であると考えられることのできるであろう。こうした非常に強力な結晶基底であるが、その存在が保証されなければ意味はない。存在を保証してくれるものが“grand loop”と呼ばれる14個の命題からなる帰納法による証明で第8章に紹介した。しかし、長く複雑な証明であるので、取り敢えず飛ばしてから必要があれば改めて読んでもよいかもしれない。

結晶基底の理論の重要な結果の1つが大域/標準基底の存在である。最近、話題の cluster 代数導入のきっかけになったりと重要な対象であるが、本書では割愛してしまったのは、少し悔やまれる。こちらに関しては、参考文献の [21], [22], [32], [33] などを参照してほしい。

結晶基底とともに、もう一つの主題である幾何結晶は現代数学で流行っている "tropical" な考え方を背景にした新しい理論と言える。大雑把に言うと、幾何結晶の理論は結晶基底の定義を "de-tropicalize" したものである。ここで、tropicalization (熱帯化) とは

$$x + y \longrightarrow \max / \min(x, y) \quad x \cdot y \longrightarrow x + y \quad \frac{x}{y} \longrightarrow x - y$$

によって positive= subtraction free="-" のない世界を区分線型的な世界に変換することである。この区分線型的な世界の代表が結晶基底でありその逆方向に幾何結晶の世界があると考える。この Berenstein-Kazhdan によって与えられた幾何結晶の理論の 'すごい' ところは、単に結晶基底の理論のアナロジーになっているだけでなく、tropicalization によって、函手的な対応が付いていることであろう。このことから、結晶基底には

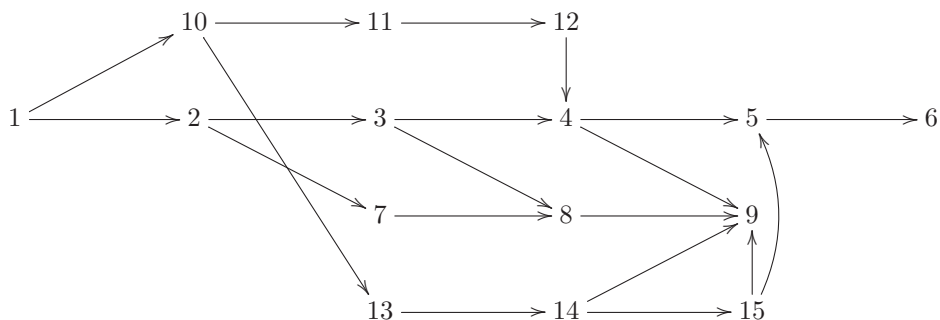


と2方向からの函手による対応があると考えられる。実際に結晶基底の理論で得られた公式が、幾何結晶での公式の tropicalization によって得られることがある。また、結晶化では得られない結晶(基底)が熱帯化によって得られることもある。

第12章で取り上げた幾何 R 写像については、量子群における R 行列、結晶基底における組み合わせ R と関係が深いですが、まだまだ不明な点が多く研究の進展が望まれる。

本書を読むにあたって、なるべく予備知識は仮定しないつもりであったが、筆者の能力からして、それも叶わなかった。なるべく、新しい事柄には定義や簡単でも説明を付けるよう配慮したが、足りない点多々あるので、そこは参考文献 [2], [9], [10], [13]~[15], [32] などを参考にしてもらいたい。

各章のつながりは大体次のようになるので参考にして頂きたい。



本書の内容は基本的には所謂 Kac-Moody setting で展開できるものである。特に、affine の場

合に結晶基底，幾何結晶ともに多くの興味深い例や対象があるのだが，本書では簡単のため半単純という設定に限定してある．Kac-Moody setting, 特に affine の場合を中心に興味をお持ちの場合は結晶基底ならば，文献 [17]～[19], [24], [26], [53], [54], 幾何結晶や (affine)Kac-Moody 群なら [28]～[30], [34], [35], [41], [42], [44], [56] などに当たられるようお願いしたい．

本書をパラパラとめくってみればわかるが，結構な分量の計算が載せてある．これは，結晶基底，幾何結晶の理論を理解するには避けて通れないことであってこの分野は，とにかく手を動かしてなんぼの部分が非常に大きいので本格的に取り組もうという方は是非，そうした計算は避けずにペンと計算用紙を傍らに演習問題にも触れつつ，お読み頂ければ幸いである．

2019 年 1 月

中島 俊樹

# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>簡単な例—<math>\mathfrak{sl}_2</math> の場合</b>	<b>1</b>
1.1	リー代数 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ . . . . .	1
1.2	$\mathfrak{sl}_2$ -結晶 . . . . .	1
1.3	$\mathfrak{sl}_2$ -幾何結晶 . . . . .	2
<b>第 2 章</b>	<b>量子群とその加群</b>	<b>3</b>
2.1	半単純リー代数とルート系 . . . . .	3
2.2	量子群の定義 . . . . .	7
2.3	量子群の有限次元加群 . . . . .	8
2.4	双対加群と内積 . . . . .	9
2.5	加群の例 . . . . .	11
<b>第 3 章</b>	<b>結晶基底の定義</b>	<b>14</b>
3.1	柏原作用素 . . . . .	14
3.2	結晶基底の定義 . . . . .	15
<b>第 4 章</b>	<b>結晶基底のテンソル積</b>	<b>19</b>
4.1	テンソル積定理 . . . . .	19
4.2	テンソル積定理の証明 . . . . .	21
4.3	テンソル積定理の応用 . . . . .	25
4.3.1	$\mathfrak{sl}_2$ の場合 . . . . .	25
4.3.2	一般の結晶のテンソル積について . . . . .	29
4.4	$A_n$ -結晶基底 . . . . .	29
<b>第 5 章</b>	<b><math>A</math> 型結晶基底</b>	<b>33</b>
5.1	$A_n$ 型の基本表現に対応する結晶 $B(\Lambda_k)$ . . . . .	33
5.2	$B(\Lambda_M + \Lambda_N)$ ( $1 \leq M \leq N \leq n$ ) . . . . .	35
5.3	ヤング図形とヤング盤 . . . . .	37
5.4	$A$ 型結晶 . . . . .	38
<b>第 6 章</b>	<b><math>A</math> 型結晶基底のテンソル積の分解</b>	<b>41</b>
6.1	古典的リトルウッド・リチャードソン規則 . . . . .	41

6.2	$B(Y) \otimes B_{\square}$ の既約分解	43
6.3	$B(Y) \otimes B(Z)$ の分解	44
6.4	古典的/結晶基底によるリトルウッド・リチャードソン規則の対応	46
<b>第 7 章</b>	<b><math>U_q^{-}(\mathfrak{g})</math> の結晶基底</b>	<b>48</b>
7.1	$q$ -ボゾン代数 $B_q(\mathfrak{g})$ とその加群	48
7.2	Extremal projector	51
7.3	$\mathcal{O}(B_q(\mathfrak{g}))$ の加群の結晶基底	55
7.4	$U_q^{-}(\mathfrak{g})$ の内積	56
<b>第 8 章</b>	<b>Grand loop—結晶基底の存在証明</b>	<b>58</b>
8.1	いくつかの準同型たち	58
8.2	Grand loop 14 個の命題	59
8.3	$\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1$ について	60
8.4	$(\mathbf{C}_{l.8})$ の証明	62
8.5	$(\mathbf{C}_{l.3}), (\mathbf{C}_{l.6})$ の証明	65
8.6	Small loop: $(\mathbf{C}_{l.1}), (\mathbf{C}_{l.2})$ の証明	69
8.7	$(\mathbf{C}_{l.7}), (\mathbf{C}_{l.12})$ の証明	72
8.8	$(\mathbf{C}_{l.9})$ の一部の証明	74
8.9	$(\mathbf{C}_{l.13}), (\mathbf{C}_{l.14})$ の証明	77
8.10	Grand loop 完結	78
<b>第 9 章</b>	<b>結晶基底の多面体表示</b>	<b>80</b>
9.1	結晶	80
9.2	*-作用素	83
9.3	柏原理め込み	87
9.4	結晶 $\mathbb{Z}_l^{\infty}$	89
9.5	$B(\infty)$ の多面体表示	91
9.6	$B(\lambda)$ の多面体表示	93
9.6.1	結晶 $\mathbb{Z}_l^{\infty}[\lambda]$	97
9.6.2	$\Psi_l^{(\lambda)}$ の像	98
9.7	Rank 2 の多面体表示	101
9.8	$A_n$ -case	106
<b>第 10 章</b>	<b>幾何結晶の定義</b>	<b>109</b>
10.1	代数群とワイル群	109
10.1.1	代数群	109

10.1.2	ルート系とワイル群	110
10.1.3	幾何結晶の定義	113
<b>第 11 章</b>	<b>冪単結晶</b>	<b>119</b>
11.1	$U$ -多様体	119
11.2	冪単結晶	121
11.3	冪単結晶から幾何結晶へ	124
<b>第 12 章</b>	<b>幾何結晶の積構造</b>	<b>132</b>
12.1	前幾何結晶の積構造	132
12.2	幾何結晶の積構造	134
12.3	幾何 $R$ 写像	135
<b>第 13 章</b>	<b>幾何結晶の熱帯化と結晶基底</b>	<b>141</b>
13.1	幾何結晶の正構造	141
13.2	幾何結晶の熱帯化	143
13.3	幾何結晶の積と結晶のテンソル積	146
<b>第 14 章</b>	<b>シューベルト多様体上の幾何結晶</b>	<b>150</b>
14.1	旗多様体, シューベルト多様体	150
14.2	シューベルトセル/多様体上の冪単結晶	151
14.3	シューベルトセル/多様体上の幾何結晶	155
14.4	幾何結晶 $B_1^-$ の熱帯化	156
14.5	Braid-type isomorphism	158
<b>第 15 章</b>	<b>飾り付き幾何結晶</b>	<b>162</b>
15.1	飾り付き幾何結晶	162
15.2	飾り付き幾何結晶の熱帯化	163
15.3	$\mathbb{B}_w$ 上の飾り付き幾何結晶	166
15.4	幾何結晶 $\mathbb{B}_w = TB_w^-$ の熱帯化	168
15.5	$A_n$ 型飾り関数 $f_B$ の具体形	169
15.6	$A_n$ -結晶基底の多面体表示と飾り付き幾何結晶の熱帯化	171
	あとがき	173
	参考文献	174
	索引	177