まえがき

本書は，圏論・微分幾何の基本概念と，微分幾何の物理への応用についての解説書である．私の前書『トポロジー・圏論・微分幾何』では説明しきれなかった数学概念について詳しい説明を補い，前書ではもの足りなかった応用編の部分を拡充することが，本書の狙いである．読者としては，理工系の学生と研究者を想定している．ある程度数学に慣れ親しんでいるが，数学そのものを専門とはしない読者を思い浮かべている．

雑誌『数理科学』の 2016 年 8 月号から 2019 年 1 月号まで 3 ヶ月に 2 回のペースで掲載された全 20 回の記事『幾何学から物理学へ—物理を圏論・微分幾何の言葉で語ろう』が本書の下地である．この連載は基本的には前書の補足拡充編なのだが，それでも説明し足りないことがあり，紙数の都合と原稿執筆の遅れのため本書には収めきれなかった補足解説をネット上に公開したい．サイエンス社のウェブサイトのサポートページからたどって行けるところにウェブ付録（別録）を置かせていただく予定である．

物理学者の R. Omnès は The Interpretation of Quantum Mechanics（Princeton University Press, 1994）という本のまえがきに，「最近は本のまえがきに“この本の読み方”についてガイドを書く習慣があるが，そのようなガイドはその本の大部分を読み終わったあとで初めて理解できるものだ」という旨のことを書いている．たしかに，「この本の第 1 章は何々について書いてある，第 2 章は何々…，何々について知りたい読者は第何章を読むとよい」といったガイドは，読者に対する親切のために書かれているのだろうが，その程度のガイドが助けになる読者は，もうその本を読む必要はないか，用語などのチェックのために辞書的に本を利用する人だと思う．だいたい，目次を見ればおおよその話の流れは見当がつくものだ．同じようなことは旅行ガイドブックについても言えて，目的地に行く前よりも，帰って来たあとでガイドブックを読んだ方が，「ああ，あそこにこんなものがあったのか」という感覚がつかめるものだ．

だからここでは通常の「この本の読み方ガイド」は書かない．代わりに，何のために数学や物理学を学ぶのだろうということについて私が考えていることを書く．いまから数学や物理学を学ぼうとして本書を手に取っている読者に向けてこのような話をするのは大きなお世話かもしれないが，私はこういったことを考えてしまう性分だし，数学や物理学を学ぶことに関して迷いがある人がいれば，こういう観点から考えてみてはどうでしょうか，という話をしたいのである．

科学の学習と研究も，人の営みである．私はドーキンスの『利己的な遺伝子』の思想に強く影響されているせいか，人間の性質や行動は生物学的観点から解釈するのが一番よいと思っている．また，教育学を専門とする安藤寿康の『なぜヒトは学ぶのか—教育を生物学的に考える』という本は，副題どおり生物の営みとして教育を捉えており，氏の論に我が意を得たりと私は思った．

人間は，学習と教育を行う動物である．人間以外にも学習する動物はいるし，教育する動物もい

るのだろうが，とくに人間は学習と教育への依存が強い．学習とは，生まれつき持っていなかった知識を獲得して長期的に記憶して自分の行動様式を変えることである．つまり，それを知っているのと，知っていないのとでは，やることが違う，やれることが異なってくるような知識の獲得が学習である．例えば，英語を習って英語を話せるようになるのは学習である．教育とは，知識を持っている者が持たない者に対して，多少の面倒をかけて知識を授ける行為である．親が教えたつもりはないのに子がまねをするのは，学習ではあるが，教育ではない．「師匠の技を盗む」という言葉があるが，弟子がいてもいなくても師匠が同じことをするのであれば，それは教育ではない．教育する側が，それをしなくても当人は生きていけるのに，わざわざ時間と労力を割いて，教育される側が受け取りやすい形にして知識を伝授することが教育である．さらに，研究は，誰も知らなかった知識を発見・創出する営みである．

上の短い文章に何度も「知識」という言葉が出てきた．つまり人間は知識に依存している生き物なのである．人間はほとんど何も知らずに生まれてきて，知識によって創り出されたものに守られ，知識によって創られたものを利用し，学習と研究によって知識を獲得し，知識によって行動のレパートリーを増やし，よりよいと判断される行動をとる動物なのだ．

生まれつき持っているプログラムだけで生きている動物もいる．魚や昆虫は親や先輩から教わることはほとんどなく，基本的には遺伝的に与えられたプログラムに従って生きており，行動の可塑性が乏しい．そういう生き方は生存に不利なのかと言えば，プログラム通りに生きるやり方は，記憶力は要らないし，予測能力も要らないし，教育の手間もかからないので，安上がりな生き方であり，子孫の数を増やすだけだったら有利であろう．ただ，そのような生き方では環境の変化に適応できないし，親が生まれ育ったのとは異なる環境に生活圏を拡大することは難しい．複雑な行動パターンをとる外敵に対処するのは難しいし，捕食できる相手も限られる．

人間は，知識を獲得し伝授できる．しかも人間は協力し合って組織的に行動できる．生き物として見れば，一人の人間は弱い生き物である．毛皮をまとっていないので，裸では寒い地域で生きていけない．強い牙も鋭い爪もないので，大型動物を倒して食べることはできない．木登りが上手なわけでもない．脚が速いわけでもないし，力持ちでもない．他の動物が恐れるほど体が大きいわけでもない．それでも人間がこんなにも地球上で支配的に生きていけるのは，人間が学習・研究・教育という能力に長けていて，互いに協力するからである．これらが可能になった背景には，人類の想像力と言語能力の発達がある．

我々は，見ず知らずの他人が作ったものを利用して生きている．何でもよいが，目の前にある物品，例えばお皿とスプーンとグラスとテーブルを全部自分で作らないといけないとしたら，どんなに大変か想像してみてほしい．チキンカレー，シザーサラダ，麦茶，これら全部をそもそもの原材料から自分で手に入れて調理器具も自分で作らないといけないとしたら，どんなに大変か．すべてを自給自足しようとしたら，とても毎日三回の食事を食べている暇はないだろう．しかし，野生の動物はそういうことをやっている．だから彼らは，エサを探したりエサを追いかけたりしているだけで一日が終わってしまい，それでも毎日同じようなものばかり食べている生活なのである．

人間の中には，米の作り方を知っている人がいる．チーズの作り方を知っている誰かがいる．陶器の作り方を知っている人，発電と送電のしくみを作れる人，炊飯器の作り方を知っている人がいる．あなたはとくに他人に協力してもらっているつもりはないかもしれないが，初めて会う人でも

代金とものを交換してくれるということが協力なのである．魚や昆虫は，そういう協力体制を作ることができない．だから彼らは数だけは多いが，何千万年経っても飛行機を作ったりテレビを作ったりすることはできない．

人間は，交換と協力の体制を作ることができたので，分業化・専門化ができる．米作りだけをやっていても，納豆や卵やハムを誰かから買って食べることができる．分業して効率を上げることができると，今度は，直接的には生活の役に立たないことを行う人をも養う余裕ができる．例えば数学や星の研究は，生活の役に立つ部分もあるが，役に立たない研究も許容される．研究というのは，知識の世界の探検のようなことだからだ．いろいろ研究していると，たまにみんなの役に立つことも見つかるのである．一人の発見だけでは大したことはなくても，別の人がその研究結果を知り，もっと研究を進めたり，使い道を考えたりする．例えば，ヘルツは 1887 年に，コイルで火花を飛ばすと数メートル離れたコイルでも火花が飛ぶという現象を観察したが，これが最初の電磁波の発見だった．1864 年にマクスウェルが電磁波の存在を理論的に予測していたのをヘルムホルツが知っていて，学生だったヘルツにその検証実験をやってみてはどうかと示唆したのだった．ヘルツは電磁波を作り出すことに成功し，その性質を調べたが，ヘルツ自身は，この研究は何の役にも立たないと思っていた．しかし，数十年後には電磁波を利用したラジオが実現し，百年後にはテレビが実現し，衛星通信も携帯電話も WiFi も実現している．言い方は悪いが，これらのわざは暇のある人ができることである．毎日食べ物を探してジャングルやサバンナを歩き回らなければならない動物には絶対にまねのできないことである．

そういう知識の拡大連鎖の中に数学も物理学もある．私は，科学の研究は高貴な行いだとは思わない．個々の研究者の動機は，ほとんど 100 パーセント，自分自身の好奇心だろう．私だって自分が知りたい・わかりたいと思うから数学や物理学を勉強しているし，研究もしている．ただ，個人の目的・動機と，社会・人類という観点から見たときの価値は違っていてもよいと思うし，違っていて当然だと思う．つまり，なぜ研究者という生業が成立しているのかというと，長い目で見れば研究は人々の役に立つものを生み出していると人々が認めてくれているからである．人類は，話したり書いたり読んだりすることができて，世代を超えて知識を蓄積し，学習・教育し，発明・発見し，いろいろなものを操り，組み立て，交換することができる．結果的に，地球上では他の生物ができなかったことを人類は成し遂げ，他の生物を圧倒している．このようなライフスタイルは，進化的に有利だったのである．

そういう大きな流れの中で数学や物理学を見直せば，何のために学ぶのか，何を学べばよいのか，ということは自ずと定まってくるのではないだろうか．だからこの本で圏論・微分幾何・電磁気学・解析力学を勉強しなさいという結論に持って行くのは無理やりであるが，我々がこの世界を理解したいと思ったら，集合論・圏論・線形代数・微分積分・微分幾何・電磁気学・古典力学くらいは必須だと思う．これにあと相対性理論と量子論と熱力学と統計力学くらいは追加したい．この世界のしくみを理解していることは，生きて行く上で役に立つ．とくに現代の人間は，他人に従って生きるのではなく自分の頭で考え自分で行動を決めることに価値を置くので，そのための態勢作りはしておいた方がよい．

勉強することは他人の知識を頂戴（ちょうだい）することだが，何も知らない者は発見も創造も選択もできない．創造は真空から生まれるものではなく，知識と知識の隙間から生まれたり，既知と無知の境界から

生まれるものだと思う．すでに知っていることと比べて「これはまだ知らなかった，誰も思いついていなかった」という形で発見は生まれるものだ．

本書は基本的には「誰かがすでに思いついていたこと，本に書いてあったことや人から伝え聞いたこと」をなるべくわかりやすい形に整えて伝えようとするものである．ただ，こうやって原稿を書いていると，こういう視点から考えるとこの概念はもっとわかりやすくなるぞと思うことがあるし，ひょっとしてこの観点や定式化は新発見ではなかろうかと思うこともある．そういう実験的な講義だと思って本書を読んでほしい．

志村五郎という有名な数学者が何冊か本を書いており，その一つに『数学をいかに使うか』（筑摩書房，2010 年）という本がある．その本の中で志村氏は次のように述べている：

『この章の目的は，外積，微分形式，外微分などの概念があって，それらはたいして難しいことではないことを知ってもらいたいということである．…厳密な証明など忘れて，さしあたり微分形式 ω の外微分 $d\omega$ の計算法に必要な (3.21) をおぼえるだけでも十分役に立つであろう．これは三角関数のいろいろな公式よりははるかにおぼえ易いのではないか．』（同書 pp.48–49）
『例をあげた方がわかり易いと思うのでひとつ定理をあげる．「閉区間で連続な関数は Riemann 積分可能である」というよく知られた定理がある．私はこれはどの段階でも教室では，この言明を説明するだけでよく，証明して見せる必要はまったくないと思う．そんな証明はどんな教科書にもあって，それがわかる人はそれを読めばよい．…そんなことに時間を費やすよりは外積代数，微分形式，外微分などの易しい場合の使い方を教えた方がよい．「すべて厳密に」などと絶対考えてはいけない．限られた時間で有効に数学の使い方を教えるには実際的であることが必要である．』（同書 pp.78–79）

私はこのくだりを読んで，ずいぶん気が楽になった．私が書こうとしていた本書も，まさに，圏論や微分幾何の実際的な使い方を教えようとするものだからだ．本書を通じて読者にとって何か役に立つ知識を少しでもお伝えできたらと思う．

謝辞：数理科学誌上の本解説の連載におつきあいいただいた読者の皆様に感謝します．連載決定以前の草稿に目を通していただき有用なご助言をいただいた岩井敏洋氏，北野正雄氏，石橋明浩氏，小川駿氏，中田陽介氏，古賀実氏，渡辺圭亮氏に感謝します．連載中の草稿は，後藤振一郎氏，深川宏樹氏，中田陽介氏，古賀実氏，中嶋慧氏に，毎回の原稿しめきり間際に（あるいはしめきり過ぎに）閲読をお願いしてしまい，申し訳ありませんでした．閲読を急がせてしまったにもかかわらず，毎回，原稿の改善に役立つご助言をいただき，ありがとうございました．数理科学編集部の平勢耕介氏には辛抱強く原稿執筆を待っていただきました．同編集部の大溝良平氏には執筆を励ましていただきました．多忙な私をいつも元気づけてくれる家族，倖と花野に感謝しています．そして，自立するまで私を伸び伸びと育ててくれた父母，浩三（ひろみつ）と文子（ふみこ）に感謝しています．

2019 年 4 月　満開の桜のもと入学式で賑わう頃の名古屋にて

谷村 省吾

目　次