

サイエンス社 ライブラリ「新数学基礎テキスト（河東泰之 編集）」
ガイダンス 線形代数（増岡彰 著） 問と演習問題 解答

第1章 プロローグ—2次ベクトルと3次ベクトル

問 1.9 $a > 0$ の場合：各点を原点から見て、 a 倍の位置に拡大 ($a \geq 1$ の場合) または縮小 ($a < 1$ の場合).

$a < 0$ の場合：各点を原点から見て $|a| (= -a)$ 倍の位置に拡大または縮小したのち、原点を中心に反転 (= 180° 回転).

問 1.11

$$\begin{aligned} L_A \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \right) &= A \begin{bmatrix} x + x' \\ y + y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(x + x') + b(y + y') \\ c(x + x') + d(y + y') \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ax' + by' \\ cx' + dy' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = L_A \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) + L_A \left(\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \right), \\ L_A \left(t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) &= A \begin{bmatrix} tx \\ ty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} atx + bty \\ ctx + dty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t(ax + by) \\ t(cx + dy) \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} \\ &= t \left(A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = t L_A \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

ここに t はスカラーとする.

問 1.13 x -軸の正の部分から、直線 ℓ の上半平面 $y \geq 0$ にある部分までの角度を θ とすれば $a = \tan \theta$. このとき $s_\ell(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) \\ \sin(2\theta) \end{bmatrix}$. 三角関数の倍角公式と $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta$ を用いて

$$\begin{aligned} \cos(2\theta) &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1 - a^2}{1 + a^2}; \\ \sin(2\theta) &= 2 \cos \theta \sin \theta = 2 \frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{2a}{1 + a^2}. \end{aligned}$$

これらから

$$s_\ell(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} \frac{1-a^2}{1+a^2} \\ \frac{2a}{1+a^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a^2-1}{a^2+1} \\ \frac{2a}{a^2+1} \end{bmatrix}.$$

$s_\ell(\mathbf{e}_2)$ を得るには、(yx -座標系で見た、直線 $x = \frac{1}{a}y$ を軸とする線対称の結果として) い

まの結果において x -座標と y -座標を入れ替え、 a を $\frac{1}{a}$ に置き換えればよいから

$$s_{\ell}(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} \frac{2\frac{1}{a}}{1+(\frac{1}{a})^2} \\ \frac{1-(\frac{1}{a})^2}{1+(\frac{1}{a})^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2a}{a^2+1} \\ \frac{a^2-1}{a^2+1} \end{bmatrix}.$$

問 1.14 $R_{\alpha}R_{\beta} = R_{\alpha+\beta}$ を書き下して

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix}.$$

左辺の積の第 1 列 (左側のベクトル) のみ計算して

$$\text{左辺} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & * \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & * \end{bmatrix}$$

この第 1 列と右辺の行列の第 1 列が等しいことを示す 2 つの等式が加法公式である.

問 1.15

$$\begin{aligned} \text{第 1 の積} &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \text{第 2 の積} &= \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

確かに、2 つの結果は異なる.

問 1.17 (1), (2), (3) に与えられた行列をそれぞれ A, B, C とする.

$$(1) |A| = (-1) \cdot (-4) - 3 \cdot 2 = -2; \tilde{A} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}; A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

$$(2) B = \frac{1}{2}A \text{ ゆえ } |B| = \left(\frac{1}{2}\right)^2 |A| = -\frac{1}{2}; \tilde{B} = \frac{1}{2}\tilde{A} = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}; B^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(3) |C| = (-1) \cdot (-6) - 3 \cdot 2 = 0. \text{ よって } C \text{ は逆行列を持たない. } \tilde{C} = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

問 1.19

$$\overline{\text{OH}} = \begin{cases} \overline{\text{OQ}} \cos \theta = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} (\mathbf{a}, \mathbf{b}), & 0 < \theta \leq \pi/2 \text{ の場合;} \\ -\overline{\text{OQ}} \cos \theta = -\frac{1}{\|\mathbf{a}\|} (\mathbf{a}, \mathbf{b}), & \pi/2 < \theta < \pi \text{ の場合.} \end{cases}$$

第 1 章 演習問題

演習 1 (i) \Rightarrow (ii): f が全単射とし, Y の元 y を勝手に選ぶ. f の全射性から $f(x) = y$ を満たす X の元 x が存在する. このような x はただ 1 つである. 実際, x' もまた $f(x') = y$ を満たすとすれば $f(x) = f(x') (= y)$. f の単射性から $x = x'$.

(ii) \Rightarrow (iii): 各 $y (\in Y)$ に対して $f(x) = y$ を満たすただ 1 つの $x (\in X)$ を対応させる写像を $g : Y \rightarrow X$ とする. この g が f の逆写像である. 実際, X の元 x を勝手に選んで $y = f(x)$ とおくと, g の定義から $(g(f(x)) =) g(y) = x$. よって $g \circ f = \text{Id}_X$. また Y の元 y を勝手に選んで $x = g(y)$ とおくと, g の定義から $(f(g(y)) =) f(x) = y$. よって $f \circ g = \text{Id}_Y$.

(iii) \Rightarrow (i): f が逆写像 f^{-1} をもつとする. Y の勝手な元 y に対して $x = f^{-1}(y)$ とおけば $f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$. よって f は全射である. また $f(x) = f(x')$ が成り立てば, $x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(x')) = x'$. よって f は単射である.

f の逆写像がする場合, それは上の g に一致する. 実際, Y の勝手な元 y に対し $f^{-1}(f(y)) = y$ が成り立つが, g の定義から $g(y) = f^{-1}(y)$ が従うからである.

演習 2 (1) (i) \Rightarrow (ii): (i), すなわち $ad - bc = 0$ を仮定すると, 次のいずれかが成り立つ.

$$(a) \mathbf{b} = \mathbf{0}; \quad (b) b \neq 0 \text{ かつ } \mathbf{a} = \frac{a}{b}\mathbf{b}; \quad (c) d \neq 0 \text{ かつ } \mathbf{a} = \frac{c}{d}\mathbf{b}.$$

このとき \mathbf{a}, \mathbf{b} は線形従属, すなわち (ii) が成り立つ. 逆に (ii) を仮定すると $\mathbf{a} = t\mathbf{b}$ または $\mathbf{b} = t\mathbf{a}$ (t はあるスカラー). 前者の場合,

$$|A| = ad - bc = (tb)d - b(td) = 0.$$

後者の場合も同様に $|A| = 0$.

(2) $\mathbf{a} = t\mathbf{b}$ または $\mathbf{b} = t\mathbf{a}$ が成り立てば $B\mathbf{a} = t(B\mathbf{b})$ または $B\mathbf{b} = t(B\mathbf{a})$ が成り立つから.

(3) $BA = E$ を満たす行列 B が存在すれば $|A| = 0$ ではあり得ない. 実際, もしこの結論に反して $|A| = 0$ とすれば, (1) より \mathbf{a}, \mathbf{b} が線形従属. $BA = E$ より $B\mathbf{a} = \mathbf{e}_1, B\mathbf{b} = \mathbf{e}_2$ に注意すれば, (2) より $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ が線形従属と, 矛盾が生じるからである.

演習 3 複素数 α の偏角 (複素数平面において, 実軸の正の部分から原点と α を結ぶ線分までの角度) を $\arg \alpha$ で表すと $\alpha = |\alpha|e^{i \arg \alpha}$. 積 αz を考えると

$$\alpha z = |\alpha|e^{i \arg \alpha} \cdot |z|e^{i \arg z} = |\alpha||z|e^{i(\arg \alpha + \arg z)}$$

ゆえ

$$|\alpha z| = |\alpha||z|, \quad \arg(\alpha z) = \arg \alpha + \arg z.$$

これより, $l_\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $l_\alpha(z) = \alpha z$ は原点からの距離を $|\alpha|$ 倍し, 偏角を $\arg \alpha$ 加える. これを \mathbb{R}^2 の変換と見ると, $c = |\alpha|$, $\theta = \arg \alpha$ として

$$L_{cR_\theta} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{x} \mapsto cR_\theta \mathbf{x}$$

に一致する.

演習 4 性質 (i)–(iii) を確かめる.

(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ と \mathbf{a} が直交するのを見るには $(\mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ を示せばよい.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}) = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) - a_2(a_1b_3 - a_3b_1) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1)$$

簡単な計算により, これは 0 に等しい. 同様に $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b}) = 0$ が示せて, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ と \mathbf{b} は直交する.

(ii) 平行四辺形 OPQR の面積を S とする. 問 1.19 の下の図の記号で $\overline{QH} = \overline{OQ} \sin \theta$

ゆえ

$$\begin{aligned} S^2 &= \overline{OP}^2 \overline{QH}^2 = \overline{OP}^2 \overline{OQ}^2 \sin^2 \theta = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= (a_1b_2)^2 + (a_1b_3)^2 + (a_2b_1)^2 + (a_2b_3)^2 + (a_3b_1)^2 + (a_3b_2)^2 \\ &\quad - 2(a_1a_2b_1b_2 + a_1a_3b_1b_3 + a_2a_3b_2b_3). \end{aligned}$$

計算により, この結果が

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

に一致することが確かめられるから $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = S^2$. よって $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = S$.

(iii) ヒントにあるように. xyz -座標空間において, 原点 O を固定し続け, P, Q を次の 2 性質 (1), (2) を保ったまま連続的に動かすことができる. (1) \mathbf{a}, \mathbf{b} が線形独立; (2) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ が (出発点の状態に応じ) 右手系または左手系のいずれか一方. これにより, P, Q を xy -平面上の $E_1(1, 0, 0), E_2(0, 1, 0)$ にまでそれぞれ動かすことができ, その状態で右手系か左手系かを見れば, 出発点の状態がわかる. $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}, \mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ であり, 到達点での状態, すなわち $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 (= \mathbf{e}_3)$ が右手系であるから, 出発点の $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ も右手系である.

演習 5 (1°) により $(\mathbf{b} + \mathbf{b}') \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{b}' \times \mathbf{a}$. (3°) により

$$-\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{b}') = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}'). \quad \text{よって } \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{b}') = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}'.$$

同様に (2°) と (3°) から

$$\mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

また (3°) において $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ とすれば

$$(4^\circ) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (\text{零ベクトル})$$

が従う。要するに、ベクトルを多項式の変数、外積を変数の積のように思って自由に計算してよい。ただし積の交換法則は成り立たず、替りに (3°), (4°) が成り立つのである。

その計算法則を用いると、 $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ ($= a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$), $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ ($= b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3$) に対し

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 + (a_1 b_3 - a_3 b_1) \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3.$$

$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2$ を用い、和の順序を変え

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} \left| \begin{array}{cc} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{array} \right| \\ - \left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \right| \end{bmatrix}.$$

第2章 斉次連立1次方程式の解法

問 2.8 これはほぼ自明. 実際, 主列の個数は行列の列数以下ゆえ $\text{rank } A \leq n$. また主列には m 次基本ベクトル e_1, e_2, \dots が順に並ぶから $\text{rank } A \leq m$.

問 2.13 (1)

$$\begin{array}{l}
 A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 5 & 3 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times(-1)} \\ \xrightarrow{\times(-2)} \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times(-3)} \\ \xrightarrow{\times(-1)} \end{array} \\
 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times(-1)} \\ \xrightarrow{\times(-1)} \end{array} \\
 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times(-1)} \\ \xrightarrow{\times(-2)} \\ \xrightarrow{\times(-3)} \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B.
 \end{array}$$

主 助 主 助 主 主

この最後の B の A の階段化である. B の主列が 4 つであることから $\text{rank } A = 4$. また $Ax = \mathbf{0}$ の基本解は

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(2)

$$\begin{array}{l}
 A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times 1} \\ \xrightarrow{\times(-2)} \\ \xrightarrow{\times(-3)} \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times(-2)} \\ \xrightarrow{\times(-3)} \end{array} \\
 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times 1} \\ \xrightarrow{\times(-4)} \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times(-1)}
 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \times (-1) \\ \downarrow \times 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B.$$

助 主 助 主 助 主

この最後の B の A の階段化である. B の主列が 3 つであることから $\text{rank } A = 3$. また $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の基本解は

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

問 2.20 $W = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$ とおく. W に属すベクトルは

$$\mathbf{a} = c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \dots + c_n \mathbf{a}_n \quad (c_1, c_2, \dots, c_n \text{ はスカラー})$$

の形のものすべてである. まず, とくに零ベクトル

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + \dots + 0\mathbf{a}_n$$

はこのような形をしているから W に属す. すなわち $\mathbf{0} \in W$. 次に, 上の \mathbf{a} とは別に (\mathbf{a} と同一でもよい) W に属す

$$\mathbf{b} = c'_1 \mathbf{a}_1 + c'_2 \mathbf{a}_2 + \dots + c'_n \mathbf{a}_n$$

を勝手に選ぶとき, 和 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ は分配法則 (S4) を用いて

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (c_1 + c'_1) \mathbf{a}_1 + (c_2 + c'_2) \mathbf{a}_2 + \dots + (c_n + c'_n) \mathbf{a}_n$$

となるから $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in W$. 最後に, 勝手なスカラー c に対し $c\mathbf{a}$ は, もう一方の分配法則 (S3) と結合法則 (S2) を用いて

$$c\mathbf{a} = (cc_1) \mathbf{a}_1 + (cc_2) \mathbf{a}_2 + \dots + (cc_n) \mathbf{a}_n$$

となるから $c\mathbf{a} \in W$. これら 3 つの結果から W は \mathbb{K}^m の部分空間である.

問 2.37 定理 2.35 が言うように, それぞれの行列 $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_6]$ に対し, その階段化の主列と同じ位置にある A の列ベクトルたちが, \mathbb{K}^4 の部分空間 $W = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_6 \rangle$ の 1 組の基底を成し, 従って $\dim W = \text{rank } A$ である. 問 2.13 の結果からこれらを求め

(1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6$ が W の 1 組の基底であり, $\dim W = 4$.

(2) $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_6$ が W の 1 組の基底であり, $\dim W = 3$.

問 2.38 (1) まず, $\mathbf{0} \in W$ かつ $\mathbf{0} \in U$ ゆえ, $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \in W + U$. 次に, $W + U$ に属す 2 つのベクトル

$$\mathbf{a} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{b} = \mathbf{w}_2 + \mathbf{u}_2$$

を勝手に選ぶ (ここに $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$) とき, 和

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) + (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)$$

は ($\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in U$ ゆえ), $W + U$ に属す. すなわち $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in W + U$. 最後に上の \mathbf{a} の勝手なスカラー (c とする) 倍

$$c\mathbf{a} = c\mathbf{w}_1 + c\mathbf{u}_1$$

もまた ($c\mathbf{w}_1 \in W, c\mathbf{u}_1 \in U$ ゆえ), $W + U$ に属す: $c\mathbf{a} \in W + U$. これら 3 つの結果から $W + U$ は \mathbb{R}^m の部分空間である.

(2) $W \subset U$ の仮定なしに $W + U \subset U$ が成り立つ. 実際, U に属すベクトル \mathbf{u} を勝手に選ぶとき, $\mathbf{0} \in W$ ゆえ $\mathbf{u} = \mathbf{0} + \mathbf{u} \in W + U$. $W \subset U$ を仮定する. $W + U$ に属すベクトル \mathbf{a} を勝手に選ぶ. それは $\mathbf{a} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$ ($\mathbf{w} \in W, \mathbf{u} \in U$) の形. 仮定から $\mathbf{w} \in U$ ゆえ U に属す 2 つのベクトルの和として $\mathbf{a} \in U$. よって $W + U \subset U$.

(3) すでに (2) の前半で見た通り $W + U \subset U$. 同様に $W + U \subset W$.

(4) 仮定は W, U がそれぞれ

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n, \quad d_1\mathbf{b}_1 + d_2\mathbf{b}_2 + \cdots + d_\ell\mathbf{b}_\ell$$

の形のベクトル全体から成ることを意味している. ここに $c_1, c_2, \dots, c_n, d_1, d_2, \dots, d_\ell$ はあらゆるスカラーである. これより $W + U$ は

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n + d_1\mathbf{b}_1 + d_2\mathbf{b}_2 + \cdots + d_\ell\mathbf{b}_\ell$$

の形のベクトル全体から成る. すなわち $W + U = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_\ell \rangle$.

問 2.42 例 2.36 にある事実とそこの記号を用いる. W は 3 次元で $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5$ を基底にもつから, $U = \langle \mathbf{b} \rangle$ がその補空間であるためには, $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5, \mathbf{b}$ が \mathbb{R}^4 の基底を成すことが必要十分である (例題 2.39 の条件 (d) を見よ). この条件は, これらのベクトルを並べた行列

$$[\mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_5 \ \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & c \\ -1 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

の階数が 4 であるのと同値である。これに何回か行基本変形を施して

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & c+1 \end{bmatrix}$$

を得るから、最後の条件は $c+1 \neq 0$ と同値。従って求めるべき条件は $c \neq -1$ である。

第 2 章 演習問題

演習 1 まず「存在」を証明する。一般に、 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r, \mathbf{y}$ を m 次ベクトルとし、 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$ は線形独立であるとするとき、次の 2 条件が同値になる。

- (i) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r, \mathbf{y}$ が線形従属；
- (ii) $\mathbf{y} \in \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r \rangle$. すなわち \mathbf{y} が $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$ の線形結合として表せる。

実際 (i) を仮定し、すなわち

$$c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_r \mathbf{x}_r + d \mathbf{y} = \mathbf{0}$$

であって、スカラー c_1, c_2, \dots, c_r, d のうちの少なくとも 1 つは非零と仮定する。 $d = 0$ とすると、 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$ の線形独立性から $c_1 = c_2 = \dots = c_r = 0$ となり最後の仮定に反する。よって $d \neq 0$ 。上の等式から

$$\mathbf{y} = \left(-\frac{c_1}{d}\right) \mathbf{x}_1 + \left(-\frac{c_2}{d}\right) \mathbf{x}_2 + \dots + \left(-\frac{c_r}{d}\right) \mathbf{x}_r$$

と、(ii) が成り立つ。逆に (ii) を仮定し、

$$\mathbf{y} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_r \mathbf{x}_r$$

とすれば

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_r \mathbf{x}_r + (-1) \mathbf{y} = \mathbf{0}$$

が成り立ち、この \mathbf{y} の係数 -1 は非零であるから (i) が成り立つ。

本問の状況で、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ の中からできるだけ多くの線形独立なベクトルたち $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}$ を 1 組選ぶ。選ばれた \mathbf{a}_{i_k} は、明らかにこれらの線形結合 (\mathbf{a}_{i_k} の係数が 1, 他の係数が 0) で表せる。選ばれなかった \mathbf{a}_j に対し $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}, \mathbf{a}_j$ は線形従属となるから、上の (i) \Rightarrow (ii) により \mathbf{a}_j は $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}$ の線形結合となる。これらにより $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}$ は極大線形独立であることが従い、「存在」が証明された。

次に「個数の一意性」を示すため、 $m \times n$ 行列 $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n]$ に行基本変形を施して $B = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \cdots \ \mathbf{b}_n]$ が得られたとする。 m 次ベクトル \mathbf{x} に対し

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow B\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

が成り立つから、スカラー c_1, c_2, \dots, c_n に対し

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \Leftrightarrow c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n = \mathbf{0}$$

が成り立つ。これより、 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq m$ に対し

$$\begin{aligned} & \mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_r} \text{ が } \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \text{ の中で極大線形独立} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{b}_{i_1}, \mathbf{b}_{i_2}, \dots, \mathbf{b}_{i_r} \text{ が } \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n \text{ の中で極大線形独立} \end{aligned} \quad (*)$$

が成り立つ。すなわち、特定の列にあるベクトルたちの極大線形独立性は、行基本変形により不変である。実際、極大線形独立性の条件 (a), (b) が行基本変形で不変である。(a) に関して

$$\begin{aligned} & c_1\mathbf{a}_{i_1} + c_2\mathbf{a}_{i_2} + \cdots + c_r\mathbf{a}_{i_r} = \mathbf{0} \text{ を満たすスカラーが } c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0 \text{ のみ} \\ \Leftrightarrow & c_1\mathbf{b}_{i_1} + c_2\mathbf{b}_{i_2} + \cdots + c_r\mathbf{b}_{i_r} = \mathbf{0} \text{ を満たすスカラーが } c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0 \text{ のみ.} \end{aligned}$$

(b) に関しては、例えば

$$\begin{aligned} & \mathbf{a}_n = c_1\mathbf{a}_{i_1} + c_2\mathbf{a}_{i_2} + \cdots + c_r\mathbf{a}_{i_r}, \text{ すなわち } c_1\mathbf{a}_{i_1} + c_2\mathbf{a}_{i_2} + \cdots + c_r\mathbf{a}_{i_r} - \mathbf{a}_n = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{b}_n = c_1\mathbf{b}_{i_1} + c_2\mathbf{b}_{i_2} + \cdots + c_r\mathbf{b}_{i_r}, \text{ すなわち } c_1\mathbf{b}_{i_1} + c_2\mathbf{b}_{i_2} + \cdots + c_r\mathbf{b}_{i_r} - \mathbf{b}_n = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

1) まず A からの変形をうまく選んで、 $\mathbf{b}_{i_1}, \mathbf{b}_{i_2}, \dots, \mathbf{b}_{i_r}$ が順に m 次基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_r$ となるようにできる。実際、 $[\mathbf{a}_{i_1} \ \mathbf{a}_{i_2} \ \cdots \ \mathbf{a}_{i_r}]$ を $[\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \cdots \ \mathbf{e}_r]$ に変形できるが、それと同じ変形を A に施せばよい。このとき B は、第 i_1, i_2, \dots, i_r 列に基本ベクトルが並び、(B に関する条件 (b) より) 第 r 行より下の成分がすべて 0 である。このような B の (従って A の) 階段化においても、第 r 行より下の成分がすべて 0 であるから $\text{rank } A \leq r$ が成り立つ。

2) 次に B を A の階段化とする。 $B' = [\mathbf{b}_{i_1} \ \mathbf{b}_{i_2} \ \cdots \ \mathbf{b}_{i_r}]$ は線形独立なベクトルたちから成るから、(*) よりその階段化も同じ性質をもち、従ってそれは $[\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \cdots \ \mathbf{e}_r]$ の形でなければならない。 $s = \text{rank } A$ とおくと、 B が A の階段化であることから B' の第 s 行より下の成分はすべて 0 である。従って $r \leq s$ 。1) の結果と合わせて $r = s = \text{rank } A$ が従う。

演習 2 (1) これは記述を理解・納得すればよい。1 点だけ注意するため、前問の解答の冒頭の状況で次の 2 条件 (先の (i), (ii) の否定)

(i') $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r, \mathbf{y}$ が線形独立；

(ii') $\mathbf{y} \notin \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r \rangle$

は同値になる．注意として，本問の (ii) における $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ の線形独立性，また (iii) における，例えば最初の $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ の線形独立性は (ii') \Rightarrow (i') を用いて示される．

(2) 例えば， $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ が $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_s$ の中で線形独立なことは，次のように確かめられる．まず $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ は線形独立である．加えて W の生成系であるから，各 \mathbf{b}_i は（もちろん各 \mathbf{a}_i も）それらの線形結合で表される．

(3) $W (\neq \{\mathbf{0}\})$ の基底はとくに線形独立な m 次ベクトルからなるから，例題 2.26 の最後の結果より， $1 \leq$ それらの個数 $\leq m$ ．

演習 3 (1) これは自明である．

(2) $W \subsetneq V$ と仮定し， $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ を W の基底とする．第 1 段として，仮定より W に属さないような V のベクトル \mathbf{a}_{n+1} が選べる．前問 (1)(iii) で見たのと同様に (ii') \Rightarrow (i') を用い， $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}$ が線形独立であることがわかる． $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1} \rangle = V$ であれば $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}$ が V の基底である．

$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1} \rangle \subsetneq V$ ならば第 2 弾として， $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1} \rangle$ に属さないような V のベクトル \mathbf{a}_{n+2} が選べ，前と同様に $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}, \mathbf{a}_{n+2}$ は線形独立になる．というように続け，せいぜい第 $(\dim V - \dim W)$ 段で V の基底に至る．

演習 4 (1) 問題にいう n 個の線形独立なベクトルたちが生成する \mathbb{K}^m の部分空間を U とすると，それらは U の基底ゆえ $\dim U = n$ ．結論に反して，それらのベクトルたちが W の基底でないとすれば，それらは W の生成系でないから $U \subsetneq W$ ．前問 (2) の結果から $n = \dim U < \dim W$ となり矛盾を生ずる．

(2) $W = V$ の場合， $\{\mathbf{0}\}$ が W の V における補空間である．

$W \subsetneq V$ とする．前問 (2) の結果により， W の基底 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ を勝手に選ぶとき，これを延長して V の基底 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}, \dots, \mathbf{a}_\ell$ が選べる．このとき $U = \langle \mathbf{a}_{n+1}, \dots, \mathbf{a}_\ell \rangle$ は $(\mathbf{a}_{n+1}, \dots, \mathbf{a}_\ell$ を基底にもつ) W の V における補空間である．実際， $V = W + U$ であり，また $(\dim(W + U) =) \dim V = \dim W + \dim U$ と，例題 2.39 の条件 (d) が満たされているから $W + U$ は直和である．

(3) $V \supset W$ ， $\dim V = \dim W + 1$ とすると，前問 (2) の解答の第 1 段において， $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}$ が V の基底でなければならない．この \mathbf{a}_{n+1} を本問の \mathbf{v} と思うことができる．上の (2) の議論から $\langle \mathbf{v} \rangle$ が W の V における補空間である．

演習 5 (1) (2.10) を見て例 2.36 の記号 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots$ を用いると, 記法 (2.21) により

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_4 & \mathbf{b}_5 & \mathbf{b}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

例 2.36 で見たように, この \mathbf{b} をすべて \mathbf{a} に置き換えた等式が成り立つから

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(2) 上の議論を一般化して, $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_n]$ の階段化を $H = [\mathbf{h}_1 \ \mathbf{h}_2 \ \dots \ \mathbf{h}_n]$ とし, その主列を左から順に $\mathbf{h}_{i_1}, \mathbf{h}_{i_2}, \dots, \mathbf{h}_{i_r}$ とすれば, H からその第 1 行から第 r 行まで抜き出して得られる $r \times n$ 行列 C を以て

$$H = [\mathbf{h}_{i_1} \ \mathbf{h}_{i_2} \ \dots \ \mathbf{h}_{i_r}] C$$

が成り立つ. この \mathbf{h} をすべて \mathbf{a} に置き換えた等式が成り立つから, $B = [\mathbf{a}_{i_1} \ \mathbf{a}_{i_2} \ \dots \ \mathbf{a}_{i_r}]$ を以て

$$A = BC$$

が成り立つ.

(3) A からその階段化の主列と同列にあるベクトルをすべて抜き出して B とし, 階段化の上 rank A 行を抜き出して C とすればよい.

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 5 & 3 & 21 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

演習 6 (1) 本問にある記述のとおり, (2.27) はベクトル \mathbf{c} の第 $r (= \text{rank } A)$ 成分より下の成分がすべて 0 であるのと同値である. \mathbf{c} から, いまその第 r 成分より下の成分をすべて取り去って得られる r 次ベクトルを \mathbf{c}' とする. A の階段化 B から, その第 r 行より下のすべての行 (それらの成分をすべて 0 である) を取り去って得られる $r \times n$ 行列を B'

とする。最後の条件 ((2.27) と同値な条件) が成り立たてば、 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解は、 $B'\mathbf{x} = \mathbf{c}'$ の解と一致する。次に具体的に見るように、この解は確かに存在する。「最後の条件」が成り立たなければ、 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解は、 $B'\mathbf{x} = \mathbf{c}'$ に “ $0 = \text{非零スカラー}$ ” の形の方程式をいくつか加えた連立 1 次方程式の解と一致するが、明らかにそのような解は存在しない。従って、 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解をもつためには (2.27) が必要十分である。

以下、(2.27)、すなわち「最後の条件」を仮定し、 $B'\mathbf{x} = \mathbf{c}'$ の解を具体的に記述する。

(i) $r = n$ の場合。 $B' = E_n$, $\mathbf{c} = \mathbf{c}'$ ゆえ $\mathbf{x} = \mathbf{c}$ が唯一の「解」である。

(ii) $r < n$ の場合、助成分がすべて 0 であるような「解」 \mathbf{x} を考えると、その主成分たちからなる \mathbf{x}' は (B' の主列たちを抜き出した $r \times r$ 行列が単位行列 E_r であるから) $E_r \mathbf{x}' = \mathbf{c}'$ の解であり、それは唯一 $\mathbf{x}' = \mathbf{c}'$ である。従って、(a) 主成分に \mathbf{c}' の成分が順に並び、(b) 助成分がすべて 0 であるような n 次ベクトルは ((b) を満たす唯一の) 「解」である。これに限らず、1 つ「解」 \mathbf{u} を選ぶ。 $B'\mathbf{x} = \mathbf{c}'$ が成り立つためには (左・右辺から $B'\mathbf{u} = \mathbf{c}'$ の左・右辺を引いて) $B'(\mathbf{x} - \mathbf{u}) = \mathbf{0}$ が成り立つこと、すなわち $\mathbf{x} - \mathbf{u}$ が斉次連立 1 次方程式 $B'\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解 (等しく $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解) であることが必要十分。従って

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + (A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ の一般解, すなわち基本解たちの線形結合})$$

が $B'\mathbf{x} = \mathbf{c}'$ の (等しく $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の) のすべての解を与える。

(2) 問 2.13(1) に与えられた A を階段化するのに施した変形を $[A | \mathbf{b}]$ に施し

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t+1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & t+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

を得る。上の (1) の結果から、どんな t に対しても $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は解をもち、

$$\begin{bmatrix} -t+1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ t+1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{ はスカラー})$$

がすべての解を与える。

問 2.13(2) に与えられた A を階段化するのに施した変形を $[A | \mathbf{b}]$ に施し

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & t-7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -t+8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t-3 \end{array} \right]$$

を得る. 本問(1)の結果から, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解をもつためには, $-t-3=0$, すなわち $t = -3$ が必要十分で, その場合

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2, c_3 \text{ はスカラー})$$

がすべての解を与える.

第3章 行列と線形写像

問 3.6 (a) \Rightarrow (b). (a) を仮定する. まず (L1), ついで (L2) を用いて

$$\begin{aligned} f(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) &= f((a\mathbf{x}) + (b\mathbf{y})) = f(a\mathbf{x}) + f(b\mathbf{y}) \\ &= (af(\mathbf{x})) + (bf(\mathbf{y})) = af(\mathbf{x}) + bf(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

こうして (b) が従う.

(a) \Leftarrow (b). (b) の等式において, とくに $a = b = 1$, またとくに $b = 0$ とすれば (L1), (L2) が従う.

問 3.11 例 3.10 で見たように, 定理 3.9 により, それぞれの行列 A に対し L_A の像 $\text{Im}(L_A)$ とその次元は, 問 2.37 の解答にある W とその次元 $\dim W$ に等しく, W の 1 組の基底がその解答に与えられている. また L_A の核 $\text{Ker}(L_A)$ は, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間に等しく, その基本解 (問 2.13 の解答に与えられている) を 1 組の基底としてもち, 従って次元 $\dim(\text{Ker}(L_A))$ は (1) の A に対し 2, (2) の A に対し 3 である.

問 3.13 f が同型写像であるとする. f の全射性により, $\dim(\text{Im } f) = \dim \mathbb{K}^m = m$. 単射性により, 例題 3.12(3) から $\dim(\text{Ker } f) = 0$. 次元定理 (3.5) から

$$n = n - \dim(\text{Ker } f) = \dim(\text{Im } f) = m.$$

逆写像 f^{-1} に対する (L1) $f^{-1}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f^{-1}(\mathbf{x}) + f^{-1}(\mathbf{y})$ を見るには, f の単射性により, 両辺に f を施したあと等号が成り立つことを見ればよい.

$$f(\text{左辺}) = f(f^{-1}(\mathbf{x} + \mathbf{y})) = \mathbf{x} + \mathbf{y}.$$

$f(\text{右辺})$ を変形するのに, f に対する (L1) を用い

$$f(\text{右辺}) = f(f^{-1}(\mathbf{x})) + f(f^{-1}(\mathbf{y})) = \mathbf{x} + \mathbf{y}.$$

こうして f^{-1} に対する (L1) が確かめられた. 同様に f^{-1} に対する (L2) $f^{-1}(c\mathbf{x}) = cf^{-1}(\mathbf{x})$ が, 両辺に f を施して

$$f(\text{左辺}) = c\mathbf{x} = cf(f^{-1}(\mathbf{x})) = f(cf^{-1}(\mathbf{x})) = f(\text{右辺})$$

が成り立つことから確かめられる.

問 3.20 やや大仰になるが, 2 つの写像に名前を付けて

$$\begin{aligned} \phi : M_n(\mathbb{K}) &\rightarrow \text{End}(\mathbb{K}^n), & \phi(A) &= L_A, \\ \psi : \text{End}(\mathbb{K}^n) &\rightarrow M_n(\mathbb{K}), & \psi(f) &= f(E) \end{aligned}$$

としよう. 定理 3.15 のいうところは, これらが互いの逆写像である, すなわち合成 $\psi \circ \phi$, $\phi \circ \psi$ がともに恒等変換であるということ. まず

$$\psi \circ \phi(A) = \phi(L_A) = L_A(E) = [Ae_1 \ Ae_2 \ \cdots \ Ae_n] = A$$

より $\psi \circ \phi = \text{Id}_{M_n(\mathbb{K})}$ が簡単に確かめられる. 次に

$$\phi \circ \psi(f) = \phi(f(E)) = L_{f(E)}$$

となるが, 定理 3.8 によりこれは f に等しく, 言い換えて $\phi \circ \psi = \text{Id}_{\text{End}(\mathbb{K}^n)}$ が成り立つ.

補足 3.18 を確かめるため, $A \leftrightarrow f, B \leftrightarrow g$ と仮定する. これは $f = L_A, g = L_B$ を意味する. $A + B \leftrightarrow f + g$ を示すには $f + g = L_{A+B}$ を示せばよい. n 次ベクトル \mathbf{x} を勝手に選ぶとき

$$\begin{aligned} (f + g)(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \\ &= L_A(\mathbf{x}) + L_B(\mathbf{x}) \\ &= A\mathbf{x} + B\mathbf{x} = (A + B)\mathbf{x} \\ &= L_{A+B}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

が成り立つから, 確かに $f + g = L_{A+B}$. 同様に $cf = L_{cA}, f \circ g = L_{AB}$ が確かめられ, $cA \leftrightarrow cf, AB \leftrightarrow f \circ g$ を得る.

問 3.21 (1) $k = 2$ の場合

$$\begin{aligned} (a_1 a_2)(a_2^{-1} a_1^{-1}) &= a_1 (a_2 a_2^{-1}) a_1^{-1} \\ &= a_1 e a_1^{-1} = a_1 a_1^{-1} \\ &= e. \end{aligned}$$

同様にして $(a_2^{-1} a_1^{-1})(a_1 a_2) = e$, これらは $a_2^{-1} a_1^{-1}$ が $a_1 a_2$ の逆元であることを示している.

$k = 3$ の場合, 上の結果を用いて

$$\begin{aligned} (a_1 a_2 a_3)(a_3^{-1} a_2^{-1} a_1^{-1}) &= a_1 ((a_2 a_3)(a_3^{-1} a_2^{-1})) a_1^{-1} \\ &= a_1 e a_1^{-1} = a_1 a_1^{-1} \\ &= e. \end{aligned}$$

同様にして $(a_3^{-1} a_2^{-1} a_1^{-1})(a_1 a_2 a_3) = e$, これらは $a_3^{-1} a_2^{-1} a_1^{-1}$ が $a_1 a_2 a_3$ の逆元であることを示している.

一般の k に対しても (厳密には k に関する数学的帰納法により) 主張が示せる.

(2) $aa^{-1} = e = a^{-1}a$ を a^{-1} の立場から見れば, a^{-1} が a を逆元としてもつ.

問 3.30 (1)

$$\begin{aligned}
 [A | E] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \xrightarrow{\times(-2)} \\ \xrightarrow{\times(-1)} \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \xrightarrow{\times(-2)} \\ \xrightarrow{\times(-2)} \end{array} \\
 &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \xrightarrow{\times(-1)} \\ \xrightarrow{\times(-1)} \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \xrightarrow{\times(-2)} \\ \xrightarrow{\times(-2)} \end{array} \\
 &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \xrightarrow{\times(-3)} \\ \xrightarrow{\times 1} \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

こうして A の階段化が E であることがわかるから, 命題 3.26 により A は正則行列である. また, 最後の行列の右半分を取り出して

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2)

$$\begin{aligned}
 [A | E] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \xrightarrow{\times 1} \\ \xrightarrow{\times(-2)} \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \xrightarrow{\times 1} \\ \xrightarrow{\times(-2)} \end{array} \\
 &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \xrightarrow{\times(-1)} \\ \xrightarrow{\times(-5)} \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \xrightarrow{\times 1} \\ \xrightarrow{\times(-5)} \end{array} \\
 &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 5 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} \xrightarrow{\times(-\frac{1}{7})} \\ \xrightarrow{\times(-\frac{1}{7})} \end{array} \\
 &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/7 & -5/7 & -3/7 \end{array} \right] \begin{array}{l} \xrightarrow{\times(-2)} \\ \xrightarrow{\times(-1)} \end{array} \\
 &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/7 & 3/7 & 6/7 \\ 0 & 1 & 0 & 1/7 & -2/7 & -4/7 \\ 0 & 0 & 1 & -1/7 & -5/7 & -3/7 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

こうして A の階段化が E であることがわかるから, 命題 3.26 により A は正則行列であ

る。また、最後の行列の右半分を取り出して

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & -5 & -3 \end{bmatrix}.$$

問 3.33 (1) (i) の方法.

$$[A | E] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{行を並び換える}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \times d^{-1} \\ \times a^{-1} \\ \times b^{-1} \\ \times c^{-1} \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c^{-1} & 0 \end{array} \right].$$

この最後の行列の右半分を取り出して

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d^{-1} \\ a^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

(ii) の方法. L_A は第 1 成分, 第 2 成分, 第 3 成分, 第 4 成分をそれぞれ第 4 成分, 第 1 成分, 第 2 成分, 第 3 成分に移動させ, ついで各成分をそれぞれ a 倍, b 倍, c 倍, d 倍する変換である. 従って, $L_A^{-1} (= L_{A^{-1}})$ は第 1 成分を a^{-1} 倍, 第 2 成分を b^{-1} 倍, 第 3 成分を c^{-1} 倍, 第 4 成分を d^{-1} 倍をしたのち, それぞれを第 2 成分, 第 3 成分, 第 4 成分, 第 1 成分に移動させる変換である. これを E に施し

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d^{-1} \\ a^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^{-1} & 0 \end{bmatrix} = A^{-1}.$$

(2) (i) の方法.

$$\begin{aligned}
 [A \mid E] &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a & b & c & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & y & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \times(-c) \\ \leftarrow \times(-y) \\ \leftarrow \times(-z) \end{array} \\
 \rightarrow & \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a & b & 0 & 1 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 1 & x & 0 & 0 & 1 & 0 & -y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \times(-b) \\ \leftarrow \times(-x) \end{array} \\
 \rightarrow & \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & -b & bz - c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -x & xz - y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right) \times(-a) \\
 \rightarrow & \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & ax - b & -axz + ay + bz - c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -x & xz - y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

この最後の行列の右半分を取り出して

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a & ax - b & -axz + ay + bz - c \\ 1 & 1 & -x & xz - y \\ 0 & 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) の方法. L_A はまず第 2 成分の a 倍を第 1 成分に加え, ついで第 3 成分の b 倍, x 倍をそれぞれ第 1 成分, 第 2 成分に加え, 最後に第 4 成分の c 倍, y 倍, z 倍をそれぞれ第 1 成分, 第 2 成分, 第 3 成分に加える変換である. 従って, $L_A^{-1} (= L_{A^{-1}})$ はまず第 4 成分の $(-c)$ 倍, $(-y)$ 倍, $(-z)$ 倍をそれぞれ第 1 成分, 第 2 成分, 第 3 成分に加え, ついで第 3 成分の $(-b)$ 倍, $(-x)$ 倍をそれぞれ第 1 成分, 第 2 成分に加え, 最後に第 2 成分の $(-a)$ 倍を第 1 成分に加える変換である. これを E に施し

$$\begin{aligned}
 E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 1 & 0 & -y \\ 0 & 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b & bz - c \\ 0 & 1 & -x & xz - y \\ 0 & 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -a & ax - b & -axz + ay + bz - c \\ 0 & 1 & -x & xz - y \\ 0 & 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A^{-1}.
 \end{aligned}$$

問 3.35 2つの行列が相等しいことを見るのに、型と各成分が相等しいことを示す。 A, B の (i, j) -成分をそれぞれ a_{ij}, b_{ij} とする。

tA は $n \times m$ 行列で a_{ji} を (i, j) -成分にもつ。 ${}^t({}^tA)$ は $m \times n$ 行列で、 tA の (j, i) -成分、すなわち a_{ij} を (i, j) -成分にもつ。これは A に等しい。

${}^t(A+B), {}^tA + {}^tB$ はともに $n \times m$ 行列。 ${}^t(A+B)$ の (i, j) -成分は、 $A+B$ の (j, i) -成分、すなわち $a_{ji} + b_{ji}$ である。一方、 ${}^tA + {}^tB$ の (j, i) -成分は、 A の (j, i) -成分 a_{ji} と B の (j, i) -成分 b_{ji} との和 $a_{ji} + b_{ji}$ である。従って両者は相等しい。

${}^t(cA), c{}^tA$ はともに $n \times m$ 行列。 ${}^t(cA)$ の (i, j) -成分は、 cA の (j, i) -成分、すなわち ca_{ji} である。一方、 $c{}^tA$ の (j, i) -成分は、 A の (j, i) -成分 a_{ji} の c 倍 ca_{ji} である。従って両者は相等しい。

問 3.37 $AA^{-1} = E = A^{-1}A$ の各辺の行列を転置する。(3.15) と ${}^tE = E$ を用いて

$${}^t(A^{-1}){}^tA = E = {}^tA{}^t(A^{-1})$$

を得る。これは tA が正則で、 ${}^t(A^{-1})$ を逆行列にもつことを示している。

第3章 演習問題

演習 1 (1) f の全射性を示すには、 Y の元 y を勝手に選ぶとき、 $f(x) = y$ を満たす X の元 x が存在することを示せばよい。仮定より合成 $f \circ h$ が全射だから、

$$(f(h(u))) = f \circ h(u) = y$$

を満たす U の元 u が存在する。 x として $h(u)$ を選べば $f(x) = f(h(u)) = y$ が成り立つ。

(c) \Rightarrow (c') を示そう。(c) を仮定する。 $AC = E$ より、 $L_A \circ L_C = L_E = \text{Id}$ 。これは全射ゆえ、上の結果から $f(= L_A)$ は全射。すなわち (c') が成り立つ。

(2) f の単射性を示すには、 $f(x) = f(x')$ が成り立つと仮定するとき、 $x = x'$ が成り立つことを示せばよい。この仮定から

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = g \circ f(x').$$

合成 $g \circ f$ が単射と仮定しているから $x = x'$ が成り立つ。

(d) \Rightarrow (d') を示そう。(d) を仮定する。 $DA = E$ より、 $L_D \circ L_A = L_E = \text{Id}$ 。これは単射ゆえ、上の結果から $f(= L_A)$ は単射。すなわち (d') が成り立つ。

演習 2 これは本質的に、集合 X の変換 $f: X \rightarrow X$ に関する問題である。 f の i 回合成を f^i で表す。すなわち $f^1 = f, f^2 = f \circ f, f^3 = f \circ f \circ f, \dots$ 。また $f^0 = \text{Id}$ (恒等変

換) とする. X の部分集合 Y に対し, Y に属すあらゆる元 y における f の値 $f(y)$ 全体から成る X の部分集合を

$$f(Y) = \{ f(y) \mid y \in Y \}$$

で表す. この記法で f の像 $\text{Im } f$ は $f(X)$ と表される. さらに $\text{Im}(f^i) = f(\text{Im}(f^{i-1}))$ ($i > 0$) が成り立つ. 一般に $Y \supset Z$ ならば $f(Y) \supset f(Z)$. いま $X \supset \text{Im } f$ ゆえ $(\text{Im } f) f(X) \supset f(\text{Im } f) (= \text{Im}(f^2))$. さらに $(\text{Im}(f^2)) (= f(\text{Im } f)) \supset f(\text{Im}(f^2)) (= \text{Im}(f^3))$. これを続けて

$$X \supset \text{Im } f \supset \text{Im}(f^2) \supset \text{Im}(f^3) \supset \cdots$$

を得る. この降下列が一旦停滞すれば, すなわち $\text{Im}(f^k) = \text{Im}(f^{k+1})$ となれば, その後ずっと停滞する. すなわち

$$\text{Im}(f^k) = \text{Im}(f^{k+1}) = \text{Im}(f^{k+2}) = \cdots$$

さて本問の状況で, n 次正方形行列 A による左乗法 $f = L_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ に上を適用する. $f^i = L_{A^i}$ (A^i による左乗法) に注意する. \mathbb{K}^n の部分空間から成る降下列が停滞することなく

$$\mathbb{K}^n \supsetneq \text{Im}(L_A) \supsetneq \text{Im}(L_{A^2}) \supsetneq \text{Im}(L_{A^3}) \supsetneq \cdots$$

とずっと続くことはない (続けば, 次元が真に減り続けることになるから. 2章演習問題 3(2) を見よ). よって上の降下列はある $\text{Im}(L_{A^k})$ ($0 \leq k \leq n$) で停滞し

$$\mathbb{K}^n \supsetneq \text{Im}(L_A) \supsetneq \text{Im}(L_{A^2}) \supsetneq \cdots \supsetneq \text{Im}(L_{A^k}) = \text{Im}(L_{A^{k+1}}) = \text{Im}(L_{A^{k+2}}) = \cdots$$

となる. これらの \mathbb{K}^n の部分空間の次元 $\dim(\text{Im}(L_{A^i}))$ が階数 $r_i = \text{rank}(A^i)$ に一致する (定理 3.9(1)) から

$$r_0 > r_1 > r_2 > \cdots > r_k = r_{k+1} = r_{k+2} = \cdots$$

を得る.

演習 3 (1) 命題 3.26 (a) \Leftrightarrow (d) (命題の A として (i) の P を考えよ) より, 行列 A の左から正則行列を乗じるのは, A に行基本変形を何回か施すことに等しい.

(i) を仮定する. これは, A に行基本変形を何回か施して B が得られることを意味する. B に行基本変形を何回か施してその階段化を得たとすると, それは A の階段化でもある. 従って両者の階数は一致. すなわち (ii) が成り立つ.

逆に (ii) を仮定する. ある m 次正則行列 P_1, P_2 に対して P_1A, P_2B が同一の階段行列になる. とくに $P_1A = P_2B$. $P = P_2^{-1}P_1$ とおけば, これは正則行列で $PA = B$. こうして (i) が成り立つ.

(2) (i) を仮定する. (1) の (i) \Rightarrow (ii) を用いると, $\text{rank}(AQ) = \text{rank } B$. 定理 3.9(1) より $\text{rank } A = \dim(\text{Im}(L_A))$. ところが L_Q が同型写像, 特に全射ゆえ

$$\text{Im}(L_A \circ L_Q) = L_A(\text{Im}(L_Q)) = \text{Im}(L_A).$$

$L_A \circ L_Q = L_{AQ}$ ゆえ左辺の次元は $\text{rank}(AQ) (= \text{rank } B)$. これが右辺の次元 $\text{rank } A$ と一致するから $\text{rank } A = \text{rank } B$. すなわち (ii) が成り立つ.

逆に (ii) を仮定し, 一致する階数を r とする. 命題 3.41 で見たように, ある m 次正則行列 P_1, P_2 と n 次正則行列 Q_1, Q_2 に対して

$$P_1AQ_1 = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix} = P_2BQ_2$$

が成り立つ. $P = P_2^{-1}P_1, Q = Q_1Q_2^{-1}$ とおけば, これらは正則行列で $PAQ = B$. すなわち (i) が成り立つ.

演習 4 (1) 演習題 3 (2) の結果からただち. 実際 $P'AQ' = \begin{bmatrix} E_s & O \\ O & O \end{bmatrix}$ とすると, その結果から

$$\text{rank } A = \text{rank} \begin{bmatrix} E_s & O \\ O & O \end{bmatrix} = s.$$

(2) $r = \text{rank } A$ とする. (1) の前半から, ある m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q に対して

$$PAQ = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

が成り立つ. この両辺の転置をとり

$${}^tQ {}^tA {}^tP = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}.$$

(見かけ上わからないが, 右辺は先の右辺の転置である.) ${}^tQ, {}^tP$ がともに正則行列である (それぞれ ${}^t(Q^{-1}), {}^t(P^{-1})$ を逆行列にもつ) ことに注意すると, (1) の後半から $\text{rank}({}^tA) = r$.

演習 5 (1) 定理 3.9(1) より, 一般に $m \times n$ 行列 $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n]$ の階数は, A の列ベクトルたちが生成する \mathbb{K}^m の部分空間 $W = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n \rangle$ の次元に等し

い. すなわち $\text{rank } A = \dim W$. A にいくつか m 次ベクトル \mathbf{b}, \dots を加えた行列を $A' = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n, \mathbf{b}]$ とすれば, $W \subset \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b} \rangle$ ゆえ $\text{rank } A \leq \text{rank } A'$ が成り立つ. 従って本問において

$$\text{rank}(A + B) \leq \text{rank} \left[A + B \mid A \mid B \right]. \quad (*)$$

また上の一般的事実から, 行列に列基本変形 (とくに 3 種) を施しても階数は変わらない. 従って

$$\text{rank} \left[A + B \mid A \mid B \right] = \text{rank} \left[O \mid A \mid B \right] = \text{rank} \left[A \mid B \right]. \quad (**)$$

さらに $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n]$ と $B = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \cdots \ \mathbf{b}_n]$ を合わせた $2n$ 個の列ベクトルたちが生成する \mathbb{K}^m の部分空間は,

$$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \rangle + \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n \rangle$$

に等しく, その次元は $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$ と $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n \rangle$ の次元の和以下であるから

$$\text{rank} \left[A \mid B \right] \leq \text{rank } A + \text{rank } B$$

が成り立つ. これを前の (*), (**) と合わせればよい.

(2) 定理 3.9(1) より, 一般に行列 A の階数は, A による左乗法 L_A の像の次元に等しい. すなわち $\text{rank } A = \dim(\text{Im}(L_A))$. 本問において $\text{Im}(L_{AB}) \subset \text{Im}(L_A)$ ゆえ

$$\text{rank}(AB) \leq \text{rank } A.$$

この結果を ${}^t B {}^t A (= {}^t(AB))$ に適用し, 階数の転置不変性を用いると

$$\text{rank}(AB) = \text{rank}({}^t B {}^t A) \leq \text{rank } {}^t B = \text{rank } B.$$

(別解) $\text{Im}(L_B)$ の基底 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_s$ ($s = \text{rank } B$) を 1 組選ぶと $A\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2, \dots, A\mathbf{x}_s$ が $\text{Im}(L_{AB})$ の生成系となり, その中からこの像の基底を選ぶことができるから

$$\text{rank}(AB) = \dim(\text{Im}(L_{AB})) \leq s = \text{rank } B.$$

(3) (3.4) より, n 次正方行列 A に対し $n - \text{rank } A$ が, L_A の核 $\text{Ker}(L_A)$ の次元に一致するから

$$\dim(\text{Ker}(L_{AB})) \leq \dim(\text{Ker}(L_A)) + \dim(\text{Ker}(L_B)) \quad (\#)$$

を示せばよい. $\text{Ker}(L_{AB})$ が, L_B による $\text{Ker}(L_A)$ の逆像 (9章演習問題5を見よ)

$$L_B^{-1}(\text{Ker}(L_A)) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n \mid B\mathbf{x} \in \text{Ker}(L_A) \}$$

に等しいことに注意する. \mathbb{K}^n の部分空間 $\text{Ker}(L_A) \cap \text{Im}(L_B)$ の基底 $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_r$ を1組選ぶ. これらのベクトルはとくに $\text{Im}(L_B)$ に属すから

$$B\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i$$

を満たすベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$ が選べる. このとき

$$L_B^{-1}(\text{Ker}(L_A)) = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r \rangle + \text{Ker}(L_B) \quad (\natural)$$

が成り立つ. 実際 \supset は容易に確かめられる. \subset を示すため, 左辺の $L_B^{-1}(\text{Ker}(L_A))$ に属すベクトル \mathbf{x} を勝手に選ぶ. $B\mathbf{x}$ は $\text{Ker}(L_A) \cap \text{Im}(L_B)$ に属すから $B\mathbf{x} = c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \dots + c_r\mathbf{y}_r$ の形に書ける. $\mathbf{x} - (c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \dots + c_r\mathbf{x}_r)$ が $\text{Ker}(L_B)$ に属すことが確かめられるから, \mathbf{x} は (\natural) の右辺に属す. $r \leq \dim(\text{Ker}(L_A))$ ゆえ, いま示した (\natural) から

$$\begin{aligned} \dim(\text{Ker}(L_{AB})) &= \dim(L_B^{-1}(\text{Ker}(L_A))) \leq r + \dim(\text{Ker}(L_B)) \\ &\leq \dim(\text{Ker}(L_A)) + \dim(\text{Ker}(L_B)) \end{aligned}$$

と, 目標の $(\#)$ を得る.

第4章 行列式

問 4.1 (1) サラスの方法の方法を用いて

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \cdot (-3) \cdot 16 + (-2) \cdot 9 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot (-4) \\ &\quad - (4 \cdot (-3) \cdot 1 + (-2) \cdot 1 \cdot 16 + 1 \cdot 9 \cdot (-4)) \\ &= -82 - (-84) = 2. \end{aligned}$$

(2) 同様に, ただし 0 を成分に含む積は省略して書いて

$$\det A = agz + bhx - ahy.$$

問 4.5 行列式の定義に基づき計算する. ただし, 順列 I のうち, 対応する成分が 0 を含まないもののみを書き出して, それらの成分の積に $(-1)^{\ell(I)}$ を付した和をとる.

(1) $I_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\ell(I_1) = 0$, $(-1)^{\ell(I_1)} = 1$;

$I_2 = (4, 2, 3, 1)$, $\ell(I_2) = 5$, $(-1)^{\ell(I_2)} = -1$.

行列式 $= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$.

(2) $I = (1, 2, 3, 4, 5)$ のみ. $\ell(I) = 0$, $(-1)^{\ell(I)} = 1$.

行列式 $= a_1b_2c_3d_4e_5$.

(3) $I = (6, 5, 4, 3, 2, 1)$ のみ. $\ell(I) = 15$, $(-1)^{\ell(I)} = -1$.

行列式 $= -a_6b_5c_4d_3e_2f_1$.

問 4.8 (1) $AA^{-1} = E$ の両辺に \det をかぶせる. (0), (v) を用いてスカラーの間の等式

$$\det A \cdot \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det E = 1.$$

これより $\det(A^{-1})$ は $\det A$ の逆数. すなわち $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

(2) A を列ベクトルで表示して $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n]$ とするとき, (iii) をすべての列に適用して

$$\begin{aligned} \det(\lambda A) &= \det [\lambda \mathbf{a}_1 \ \lambda \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \lambda \mathbf{a}_n] \\ &= \lambda^n \det [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n] \\ &= \lambda^n \det A. \end{aligned}$$

問 4.14 (1) 掃出し法.

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & \begin{array}{l} \times(-1) \\ \downarrow \\ \times(-1) \end{array} \\ 1 & -3 & 9 & \\ 1 & -4 & 16 & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & \\ 0 & -1 & 5 & \\ 0 & -2 & 12 & \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \times(-2) \\ \end{array} = \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & \\ 0 & -1 & 5 & \\ 0 & 0 & 2 & \end{array} \right| = 1 \cdot (-1) \cdot 2 = -2.$$

余因子展開. 第3列で展開する.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 9 \\ 1 & -4 & 16 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - 9 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 16 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \\ = 4 \cdot (-1) - 9 \cdot (-2) + 16 \cdot (-1) = -2.$$

(2) 掃出し法.

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \swarrow \times(-2) \\ \searrow \times(-3) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & -2 & 10 & -6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \swarrow \times 3 \\ \searrow \times(-2) \end{matrix} \\ = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 14 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -14 \\ 14 & 0 \end{vmatrix} = 196.$$

余因子展開. 第1行で展開する. 3次行列式はサラスの方法で計算する.

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ = 14 + (-2) \cdot (-28) + 3 \cdot 42 = 196.$$

問 4.17 (i) (4.6) に倣い, 行列式を第1列に関し展開して

$$((\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c}) =) \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} a_1 - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} a_2 + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} a_3 \\ = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{a}).$$

第2列に関し展開して

$$((\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c}) =) \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} b_1 + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} b_2 - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} b_3 \\ = \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} b_1 - \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} b_2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} b_3 \\ = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

(ii) (4.4) より

$$\det [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c});$$

$$\det [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{a});$$

$$\det [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

行列式の反対称性により左辺は相等しいから、右辺も相等しい。

問 4.21 (1) 問 4.14(1) の結果から $\det A = -2$. これが非零ゆえ、定理 4.20 により A は正則. 公式 (4.8) を用いて

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{\det A} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ -4 & 10 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 16 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -12 & 16 & -6 \\ -7 & 12 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(2) 行列式を掃出し法, 次数降下を用いて計算し

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

定理 4.20 により A は正則でない。

問 4.25 (1) (i) の方法. 左辺の正方行列の行列式を計算して 9 を得る. クラメールの公式を用いて

$$\begin{aligned} [x_1, x_2, x_3] &= \frac{1}{9} \left[\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{9} [35, 24, 40]. \end{aligned}$$

(ii) の方法. 行基本変形により

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 8 \\ 0 & 7 & -6 & -8 \end{array} \right] \\ & \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/2 & -4 \\ 0 & 7 & -6 & -8 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -3/2 & -4 \\ 0 & 0 & 9/2 & 20 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -3/2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 40/9 \end{array} \right] \\ & \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 35/9 \\ 0 & 1 & 0 & 8/3 \\ 0 & 0 & 1 & 40/9 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

こうして (当然のことながら) 上と同じ結果を得る.

(2) (i) の方法. 左辺の正方行列の行列式は $4 \cdot (-2) \cdot 1 \cdot (-3) (= 24)$. クラメールの公式を用いて

$$\begin{aligned} & [x_1, x_2, x_3, x_4] \\ & = \frac{1}{24} \left[\begin{array}{cccc|cccc} -9 & -3 & 4 & 4 & 4 & -9 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & 1 & -3 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & 0 & 3 & 0 & -3 \end{array} \right] \\ & = \frac{1}{24} [-24, -24, -24, -24] = [-1, -1, -1, -1]. \end{aligned}$$

(ii) の方法. 行基本変形により

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 4 & 4 & -9 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 4 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \\ & \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \\ & \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

こうして (当然のことながら) 上と同じ結果を得る.

問 4.29 A の小行列に対し, 転置の位置にある tA の小行列を対応させるとき, A の小行列 (それを得るのに 行・列の選び方が異なっても, 結果的に同じ行列が得られることがあるから, 正確にはその選び方) 全体と tA の小行列 (の選び方) 全体とが 1 対 1 に対応す

る。この対応において対応し合う2つの小行列（互いに転置の関係にある）の次数と行列式の値（とくに零・非零）が一致するから

$$(A \text{ の非零行列式の最大次数}) = ({}^tA \text{ の非零行列式の最大次数}).$$

定理 4.27 により $\text{rank } A = \text{rank}({}^tA)$ を得る。

問 4.31 これは明らかであろう。例えば例 4.30 の τ は 5 次巡回置換である。

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1 \ 5 \ 4 \ 6 \ 3)$$

これにより数字を置換するとは、有向グラフにおいて、各数字を矢印の先にある数字に置き換えるということ。それを元に戻すには、矢印の向きを逆転させた有向グラフで表される置換を施せばよい。その置換は、巡回置換

$$\tau^{-1} = (3 \ 6 \ 4 \ 5 \ 1)$$

で、これが τ の逆元である。

問 4.34 (4.15) により、長さ r の巡回置換は $r - 1$ 個の互換の積として表されるから、 r の偶・奇に応じ ($r - 1$ が奇・偶となるため) 奇置換・偶置換となる。

問 4.37 恒等変換 $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ の符号 $\text{sgn } \varepsilon$ は 1 に等しく、 $\text{sgn } \sigma = \pm 1$ ゆえその逆数 $(\text{sgn } \sigma)^{-1}$ は $\text{sgn } \sigma$ 自身に等しい。 $\sigma \sigma^{-1} = \varepsilon$ ゆえ、系.36 より

$$(\text{sgn } \sigma)(\text{sgn}(\sigma^{-1})) = \text{sgn } \varepsilon = 1.$$

よって $\text{sgn}(\sigma^{-1}) = (\text{sgn } \sigma)^{-1} = \text{sgn } \sigma$.

第 4 章 演習問題

演習 1 $A\tilde{A} = (\det A)E_n$ の両辺の行列式をとる。行列式の乗法性と問 4.8(2) を用いて

$$(\det A)(\det \tilde{A}) = (\det A)^n.$$

$\det A \neq 0$ であれば $\det \tilde{A} = (\det A)^{n-1}$.

$\det A = 0$, すなわち A が逆行列をもたないと仮定する。 $\det \tilde{A} = (\det A)^{n-1} (= 0)$ を示すのに、 \tilde{A} が逆行列をもたないことを示せばよい。反して「逆行列をもつ」とすると、最初の等式から $A = (\det A)\tilde{A}^{-1} = O$. すると $\tilde{A} = O$ となり、 \tilde{A} が逆行列をもつことに矛盾する。

演習 2 (1) 写像 $\det : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ が、単位行列 E で値 1 をとり、列に関する多重線形性と反対称性をもつことは 4.2 節 (0), (iii), (iv) で見た。問題に与えられた事実から、これらの性質をもつ写像 $f : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ は

$$f(X) = f(E) \det X = \det X \quad (X \in M_n(\mathbb{K}))$$

を満たし、すなわち \det に一致する。

(2) ヒントにあるように A を固定し、写像

$$f : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, \quad f(X) = \det(AX)$$

を考えると、これが列に関する多重線形性と反対称性をもつことが確かめられる。例えば第 1 列に関する多重線形性は

$$\begin{aligned} f(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) &= \det(A(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}), A\mathbf{x}_2, \dots, A\mathbf{x}_n) \\ &= \det(\lambda(A\mathbf{x}) + \mu(A\mathbf{y}), A\mathbf{x}_2, \dots, A\mathbf{x}_n) \\ &= \lambda \det(A\mathbf{x}, A\mathbf{x}_2, \dots, A\mathbf{x}_n) + \mu \det(A\mathbf{y}, A\mathbf{x}_2, \dots, A\mathbf{x}_n) \\ &= \lambda f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) + \mu f(\mathbf{y}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \end{aligned}$$

と確かめられる。 $f(E) = \det A$ ゆえ、与えられた事実から

$$\det(AX) = f(X) = f(E) \det X = \det A \cdot \det X.$$

注意. この問題文に与えられ、上で既知とした事実の証明をしておこう。行列 $X = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n]$ を、成分を表示して $[x_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq n}$ と表す。すると、 $\mathbf{x}_1 = \sum_{i_1=1}^n x_{i_1,1} \mathbf{e}_{i_1}$, $\mathbf{x}_2 = \sum_{i_2=1}^n x_{i_2,2} \mathbf{e}_{i_2}$, \dots , $\mathbf{x}_n = \sum_{i_n=1}^n x_{i_n,n} \mathbf{e}_{i_n}$. $f : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ の多重線形性から

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n x_{i_1,1} x_{i_2,2} \cdots x_{i_n,n} f(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_n}).$$

例題 4.14 において、行列式の反対称性から性質 (iv)' を導いたのと同様にして、 f の反対称性から、 i_1, i_2, \dots, i_n のうちに重複があれば $f(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_n}) = 0$. 従って上は、 $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ が $\{1, 2, \dots, n\}$ の順列全体を亘るときの和

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \sum_I x_{i_1,1} x_{i_2,2} \cdots x_{i_n,n} f(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_n}).$$

となる。ここで、上のような順列 $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ に対して

$$f(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_n}) = (-1)^{\ell(I)} f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) (= (-1)^{\ell(I)} f(E)).$$

実際、定理 4.33 からわかるように、順列 $1, 2, \dots, n$ は、転倒数 $\ell(I)$ が偶数であれば偶数回の互換、奇数であれば奇数回の互換により i_1, i_2, \dots, i_n となる。 f の反対称性を当該回数用いて上の等式が従う。こうして結局

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) &= f(E) \sum_I (-1)^{\ell(I)} x_{i_1,1} x_{i_2,2} \cdots x_{i_n,n} \\ &= f(E) \det({}^t X) = f(E) \det X. \end{aligned}$$

演習 3 まず一般的結果を 2 つ：

(I) A を $m \times n$ 行列とする。2 章演習問題 1 の結果から

(Ia) $\text{rank } A < s \leq \text{Min}\{m, n\}$ とする。 A の n 個の列ベクトルから選んだ s 個のベクトルは必ず線形従属である。

(Ib) $s = \text{rank } A$ のとき、 A の列ベクトルの中から s 個の線形独立なベクトルを選ぶことができる。

(II) s 個の m 次ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$ が与えられたとき、これらから特定の s 個の成分 (第 i_1 成分, 第 i_2 成分 \dots , 第 i_s 成分; $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq m$) を選び出すと s 個の s 次ベクトルが得られる。これらを $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \dots, \mathbf{a}'_s$ としよう。これらが線形独立 (換言すれば s 次正方形行列 $A' = \begin{bmatrix} \mathbf{a}'_1 & \mathbf{a}'_2 & \cdots & \mathbf{a}'_s \end{bmatrix}$ の行列式 $\neq 0$) ならばもとの $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$ も線形独立である。換言すれば、斉次連立 1 次方程式 $A' \mathbf{x} = \mathbf{0}$ が自明な解 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ しか持たなければ、 $m \times s$ 行列 $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_s \end{bmatrix}$ が与える斉次連立 1 次方程式 $A \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (それは先の連立方程式に同じ変数の方程式をいくつか加えて得られる) も自明な解 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ しか持たない。対偶をとると、

(IIc) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$ が線形従属であれば $\det A' = 0$ である。

(1) この問題の A を (II) の A , また A の s 次小行列を (II) の A' とすることができる。 $\text{rank } A < s \leq m$ ならば, (Ia) から $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$ は線形従属。 (IIc) から, s 次小行列式 $= 0$ 。

(2) $\text{rank } A = s$ とする。 (Ib) を ${}^t A$ に適用 (あるいは A の行ベクトルたちに適用) して, A の行ベクトルたちから s 個の線形独立な行ベクトルを選ぶことができる (行ベクトルの線形独立性が, 列ベクトルに対するのと同様に定義される)。それらを並べた s 次正方形行列 (もとの A の小行列) の行列式は 0 と異なる。

(3) $s > \text{rank } A$ とする。 A の s 次小行列を勝手に選び, それを含む A の列ベクトルを

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$ とする. $s > \text{rank } A$ ゆえ, (Ia) よりこれらは線形従属である. (1) の結果を $m \times s$ 行列 $\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_s \end{bmatrix}$ に適用し, 選んだ小行列の行列式 $= 0$ を得る.

$s = \text{rank } A$ とする. (Ib) より, A の列ベクトルの中から s 個の線形独立なベクトルを選ぶことができる. こゝではそれらを $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$ とすると, (2) から $m \times s$ 行列 $\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_s \end{bmatrix}$ が非零行列式をもつ s 次小行列 (それは A の小行列でもある) を含む.

第5章 正方行列の固有値と対角化

問 5.10 与えられた正方行列を A とする.

(1) A の固有多項式を (例えばサラスの方法で) 計算し

$$\Phi_A(x) = - \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix} = x^3 - 1$$

を得る. 従って A の固有値は

$$1, \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, (\omega^2 =) \bar{\omega} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

これらの固有値の重複度はすべて 1 で, 従って, 各固有値 α に属す固有空間 V_α は 1 次元である (注意 5.12). V_α の基底を得るため, $A - \alpha E$ (階数 2 である) を階段化すると

$$\begin{aligned} A - E &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ A - \omega E &= \begin{bmatrix} -\omega & 1 & 0 \\ 0 & -\omega & 1 \\ 1 & 0 & -\omega \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\omega \\ 0 & 1 & -\bar{\omega} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ A - \bar{\omega} E &= \begin{bmatrix} -\bar{\omega} & 1 & 0 \\ 0 & -\bar{\omega} & 1 \\ 1 & 0 & -\bar{\omega} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\bar{\omega} \\ 0 & 1 & -\omega \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

斉次連立 1 次方程式 $(A - \alpha E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の基本解として

$$V_1 \text{ の基底 } \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad V_\omega \text{ の基底 } \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} \omega \\ \bar{\omega} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad V_{\bar{\omega}} \text{ の基底 } \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} \bar{\omega} \\ \omega \\ 1 \end{bmatrix}$$

を得る.

(2) A の固有多項式を (例えばサラスの方法で) 計算し

$$\Phi_A(x) = - \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = x^3 - 3x - 2 = (x - 2)(x + 1)^2.$$

を得る. 従って A の固有値は $2, -1, -1$.

固有値 2 の重複度は 1 ゆえ $\dim V_2 = 1$. $A - 2E$ (階数 2 である) の階段化

$$A - 2E = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

を得て, $(A - 2E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の基本解として

$$V_2 \text{ の基底 } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

を得る.

一方, 重複度 2 の固有値 -1 に関しては, $A + E$ の階段化が

$$A + E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となり, この階数が 1 であるから, $\dim V_{-1} = 2$. さらに

$$V_{-1} \text{ の基底 } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

を得る ($-\mathbf{v}_2, -\mathbf{v}_3$ が $(A + E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の基本解).

(3) 簡単な計算により $\Phi_A(x) = x^3$. 従って A の固有値は $0, 0, 0$. $A (= A - 0E)$ 自身が階段行列で, その階数が 2 だから $\dim V_0 = 1$. さらに V_0 は $\mathbf{e}_1 (= {}^t[1, 0, 0])$ を基底にもつ.

(4) 固有多項式を第 1 行の展開により計算して

$$\begin{aligned} \Phi_A(x) &= \begin{vmatrix} 3-x & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2-x & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 2-x & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= (3-x) \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 1 \\ -1 & 2-x & -4 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2-x & 0 \\ -3 & -1 & 2-x \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (x-2)^2(x^2 - 4x + 3) + (x-2)^2 \\ &= (x-2)^4. \end{aligned}$$

従って A の固有値は $2, 2, 2, 2$. $A - 2E$ の階段化が

$$A - 2E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となり, この階数が 2 であるから, $\dim V_2 = 2$. さらに V_2 の基底として ${}^t[0, 0, 1, 0], {}^t[1, 1, 0, -1]$ を得る.

(5) 固有多項式を次数降下を用いて計算して

$$\begin{aligned}\Phi_A(x) &= \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1-x & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix} \\ &= (2-x) \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 2 \\ 1 & -1-x & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix} \\ &= (x-2)(x^3+x+2) \\ &= (x-2)^2(x+1)^2.\end{aligned}$$

従って A の固有値は $2, 2, -1, -1$.

固有空間 V_2, V_{-1} を知るため, $A - 2E, A + E$ を階段化すると

$$\begin{aligned}A - 2E &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ A + E &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

これらより $\dim V_2 = \dim V_{-1} = 2$. さらに

$$V_2 \text{ の基底 } \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad V_{-1} \text{ の基底 } \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を得る.

問 5.21 定理 5.14 により, 正方行列 A が対角化可能であるためには, 重複度 ≥ 2 の各固有値 α に対して, その重複度 $= \dim V_\alpha$ が成り立つことが必要十分. 前問の正方行列の中でこの条件を満たすものは (1), (2), (5) である. 前問で求めた固有空間の基底を用いて, A を具体的に対角化する.

(1) 5.4 節で見たように, 固有空間の基底を寄せ集めた $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ は \mathbb{C}^3 の基底で, これに同値な条件として, これらのベクトルを並べた

$$P = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3] = \begin{bmatrix} 1 & \omega & \bar{\omega} \\ 1 & \bar{\omega} & \omega \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

は正則行列である。一方、上のベクトルたちが固有ベクトルであることを示す

$$A\mathbf{u}_1 = 1\mathbf{u}_1, \quad A\mathbf{u}_2 = \omega\mathbf{u}_2, \quad A\mathbf{u}_3 = \bar{\omega}\mathbf{u}_3$$

を行列表示して

$$AP = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\omega} \end{bmatrix}.$$

両辺の左から P^{-1} を乗じて

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\omega} \end{bmatrix}.$$

こうして A が対角化された。

(2) 上と同様に、固有空間の基底を寄せ集めた $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ は \mathbb{C}^3 の基底で、これに同値な条件として、これらのベクトルを並べた

$$P = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

は正則行列である。一方、これらのベクトルが固有ベクトルであることを示す

$$A\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_1, \quad A\mathbf{v}_2 = (-1)\mathbf{v}_2, \quad A\mathbf{v}_3 = (-1)\mathbf{v}_3$$

を行列表示して

$$AP = P \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

両辺の左から P^{-1} を乗じて

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

こうして A が対角化された。

(5) 上と同様に、固有空間の基底を寄せ集めた $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4$ は \mathbb{C}^4 の基底で、これに同値な条件として、これらのベクトルを並べた

$$P = [\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \mathbf{w}_3 \ \mathbf{w}_4] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

は正則行列である. 一方, これらのベクトルが固有ベクトルであることを示す

$$A\mathbf{w}_1 = 2\mathbf{w}_1, \quad A\mathbf{w}_2 = 2\mathbf{w}_2, \quad A\mathbf{w}_3 = (-1)\mathbf{w}_3, \quad A\mathbf{w}_4 = (-1)\mathbf{w}_4$$

を行列表示して

$$AP = P \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

両辺の左から P^{-1} を乗じて

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

こうして A が対角化された.

第 5 章 演習問題

演習 1 定義に基づき計算する.

$$\Phi_A(x) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & x - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & x - a_{33} \end{vmatrix}$$

は x の 3 次多項式で

- 3 次の項は順列 $(1, 2, 3)$ (に対応する成分の積 $(x - a_{11})(x - a_{22})(x - a_{33})$ の展開において) (x, x, x) を選んで得られる. その係数 = 1.
- 2 次の項は順列 $(1, 2, 3)$ から $(x, x, \text{定数})$, $(x, \text{定数}, x)$, $(\text{定数}, x, x)$ を選んで得られる. その係数 = $-(a_{11} + a_{22} + a_{33}) = \text{tr } A$.
- 1 次の項は, (i) 順列 $(1, 2, 3)$ から $(x, \text{定数}, \text{定数})$ を, 順列 $(1, 3, 2)$ から $(x, -, -)$ を選び, (ii) 順列 $(1, 2, 3)$ から $(\text{定数}, x, \text{定数})$ を, 順列 $(3, 2, 1)$ から $(-, x, -)$ を選び, (iii) 順列 $(1, 2, 3)$ から $(\text{定数}, \text{定数}, x)$ を, 順列 $(2, 1, 3)$ から $(-, -, x)$ を選んで得られる.

$$\text{その係数} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}| + |A_{22}| + |A_{33}|.$$

- 定数項は, すべての順列から x を含まない選び方で得られるから, $-|A| (= -|A|)$ に等しい.

演習 2 (1) $xE - B = P^{-1}(xE)P - P^{-1}AP = P^{-1}(xE - A)P$ に注意する. 行列式が積を保つこと (4.2 節 性質 (v)) を用い

$$\begin{aligned}\Phi_B(x) &= |xE - B| = |P^{-1}(xE - A)P| = |P^{-1}| \cdot |xE - A| \cdot |P| \\ &= |xE - A| \cdot |P^{-1}| \cdot |P| = |xE - A| \cdot |P^{-1}P| = |xE - A| \cdot |E| \\ &= \Phi_A(x).\end{aligned}$$

(2) 上の最初の注意と同様に $P^{-1}(A - \alpha E)P = B - \alpha E$. よって

$$P^{-1}(A - \alpha E) = (B - \alpha E)P^{-1}. \quad (*)$$

P^{-1} が正則だから

$$(V_\alpha =) \text{Ker}(A - \alpha E) = \text{Ker}(P^{-1}(A - \alpha E)).$$

(*) を用いて上に続き

$$\begin{aligned}V_\alpha &= \text{Ker}((B - \alpha E)P^{-1}) \\ &= \{ \mathbf{v} \mid P^{-1}\mathbf{v} \in \text{Ker}(B - \alpha E) (= V'_\alpha) \} \\ &= \{ P(P^{-1}\mathbf{v}) \mid P^{-1}\mathbf{v} \in V'_\alpha \} \\ &= PV'_\alpha.\end{aligned}$$

演習 3 n 次対角行列

$$D = \begin{bmatrix} \alpha & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \alpha & & & & & & \\ & & & \beta & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \beta & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \gamma & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \gamma \end{bmatrix}$$

において対角成分 $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ は相異なり, それぞれ r 個, s 個, \dots , t 個並んでいるとする. これの固有多項式は

$$\Phi_D(x) = (x - \alpha)^r (x - \beta)^s \cdots (x - \gamma)^t$$

であるから、 $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ が D の固有値のすべてを与え、それぞれ重複度が r, s, \dots, t をもつ。一方、それぞれの固有値に属す固有空間が

$$V_\alpha = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r \rangle, V_\beta = \langle \mathbf{e}_{r+1}, \dots, \mathbf{e}_{r+s} \rangle, \dots, V_\gamma = \langle \mathbf{e}_{n-t+1}, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$$

で与えられ、それぞれ r 次元、 s 次元、 \dots 、 t 次元となる。従って対角行列は性質

(#) 各固有値に対し、その重複度 = 固有空間の次元

をもつ。一方、前問の結果から次が成り立つ。

(b) A と $P^{-1}AP$ とは、固有値が重複度まで込めて一致し、各固有値に属す固有空間の次元も一致する。

(1) A が対角可能の場合に、 $P^{-1}AP$ をその対角化とする。 $P^{-1}AP$ は性質 (#) をもつ。

(b) より A もこの性質をもつ。すなわち定理 5.14 の (c) が成り立つ。

(2) A の対角化を

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{bmatrix}$$

とする。(b) の前半から、この対角成分 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ は、重複度を込めた A の固有値すべてである。いま $P = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n]$ と、 P の列ベクトルを表すと、記法 (2.12) に基づいた行列による表示を元に戻して

$$A\mathbf{v}_1 = \alpha_1\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2 = \alpha_2\mathbf{v}_2, \dots, A\mathbf{v}_n = \alpha_n\mathbf{v}_n$$

を得る。これより、 P の列ベクトルの順序を変えることにより、 A の対角化の対角成分の順序がいかようにも変わることがわかる (注意 5.20 を見よ)。

演習 4 (1) k に関する帰納法。 $k = 1$ において明らかに正しい。 $k > 1$ として $k - 1$ において正しいとする。すなわち $(PBP^{-1})^{k-1} = PB^{k-1}P^{-1}$ 。すると k においても正しい。実際

$$\begin{aligned} (PBP^{-1})^k &= (PBP^{-1})^{k-1}(PBP^{-1}) \\ &= PB^{k-1}P^{-1}PBP^{-1} \\ &= PB^{k-1}BP^{-1} = PB^kP^{-1}. \end{aligned}$$

(2) 上の結果を用いると, (5.11) の P に対し (5.12) から

$$A^k = P \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^k P^{-1}.$$

容易に計算できるように, 対角行列の k 乗は対角成分をすべて k 乗した行列に等しい. また P の逆行列は, 例えば 3.5 節の計算法により

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

と求まるから, 計算により

$$\begin{aligned} A^k &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2^k & 2^k & 2^{k+1} & 2^k \\ -2^k & 0 & 3 \cdot 2^k & 2^k \\ -2^{k+1} & 0 & -2^{k+2} & -2^k \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2^{k+1} - 2 & 2^k - 1 \\ -2^k + 1 & 2^k & 2^{k+1} - 2 & 2^k - 1 \\ -2^k + 1 & 0 & 3 \cdot 2^k - 2 & 2^k - 1 \\ -2^{k+1} - 2 & 0 & -2^{k+2} + 4 & -2^k + 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

第6章 ベクトルの内積と行列

問 6.2 内積 (\mathbf{x}, \mathbf{y}) を行列の積 ${}^t\mathbf{x}\bar{\mathbf{y}}$ として表示する (6.6) を先取りしよう. すると性質 (i), (ii) の確かめは (もちろん真正直にもできるが), 行列の積の性質に帰着できる. 例えば (ii) の第 1 の等式を確かめるのに, 分配法則を用い

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) &= {}^t\mathbf{x}(\overline{\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2}) \\ &= {}^t\mathbf{x}(\bar{\mathbf{y}}_1 + \bar{\mathbf{y}}_2) \\ &= {}^t\mathbf{x}\bar{\mathbf{y}}_1 + {}^t\mathbf{x}\bar{\mathbf{y}}_2 \\ &= (\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + (\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)\end{aligned}$$

とできる. (iii) を確かめるには, $\mathbf{x} = {}^t[x_1, x_2, \dots, x_n]$, $\mathbf{y} = {}^t[y_1, y_2, \dots, y_n]$ として

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \overline{x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \dots + x_n\bar{y}_n} \\ &= \overline{x_1\bar{y}_1} + \overline{x_2\bar{y}_2} + \dots + \overline{x_n\bar{y}_n} \\ &= \bar{x}_1\bar{\bar{y}}_1 + \bar{x}_2\bar{\bar{y}}_2 + \dots + \bar{x}_n\bar{\bar{y}}_n \\ &= \bar{x}_1y_1 + \bar{x}_2y_2 + \dots + \bar{x}_ny_n \\ &= y_1\bar{x}_1 + y_2\bar{x}_2 + \dots + y_n\bar{x}_n \\ &= (\mathbf{y}, \mathbf{x}).\end{aligned}$$

問 6.14 まず第 1 の等式を示す. A を $m \times n$ 型, B を $n \times \ell$ 型とする. AB , 従って左辺の \overline{AB} は $m \times \ell$ 型. \bar{A} が $m \times n$ 型, \bar{B} が $n \times \ell$ 型ゆえ, 右辺の $\bar{A}\bar{B}$ も (左辺と同じ) $m \times \ell$ 型である. あとは $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq \ell$ に対し, 両辺の (i, j) -成分が相等しいことを見ればよい. A の第 i 行を $[a_1, a_2, \dots, a_n]$, B の第 j 列を ${}^t[b_1, b_2, \dots, b_n]$ とすれば,

$$\begin{aligned}\text{左辺 } \overline{AB} \text{ の } (i, j)\text{-成分} &= \overline{AB \text{ の } (i, j)\text{-成分}} \\ &= \overline{a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n} \\ &= \bar{a}_1\bar{b}_1 + \bar{a}_2\bar{b}_2 + \dots + \bar{a}_n\bar{b}_n \\ &= \text{右辺 } \bar{A}\bar{B} \text{ の } (i, j)\text{-成分}.\end{aligned}$$

第 2 の等式は, いま示した第 1 の等式と (3.15) から次のように従う.

$$\begin{aligned}(AB)^* &= {}^t(\overline{AB}) = {}^t(\bar{A}\bar{B}) \\ &= {}^t\bar{B}{}^t\bar{A} = B^*A^*.\end{aligned}$$

問 6.15 $\mathbf{x} = {}^t[x_1, x_2, \dots, x_n]$, $\mathbf{y} = {}^t[y_1, y_2, \dots, y_n]$ とすれば

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{x}\bar{\mathbf{y}} &= [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n] \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{bmatrix} \\ &= [x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \cdots + x_n\bar{y}_n] \\ &= x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \cdots + x_n\bar{y}_n \\ &= (\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

問 6.22 U をユニタリ行列とすると、定義 6.16 の条件 (b) により、 U は随伴行列 U^* を逆行列にもち、従って $UU^* = U^*U (= E)$. これより U は正規行列である.

問 6.26 (1) 記述を簡単にするため、 ω^2 に替え、それに等しい ω の複素共役 $\bar{\omega}$ を用いる。 A の固有多項式を計算して $\Phi_A(x) = (x-3)x^2$ を得るから、 A の固有値は $3, 0, 0$ である。階段化して

$$A - 3E = \begin{bmatrix} -2 & \bar{\omega} & \omega \\ \omega & -2 & \bar{\omega} \\ \bar{\omega} & \omega & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\omega \\ 0 & 1 & -\bar{\omega} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるから、固有空間 V_3 の基底として $\mathbf{u} = {}^t[1, \omega, \bar{\omega}]$ が選べる。これを自身のノルム $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{3}$ で割った $\mathbf{u}' = \frac{1}{\sqrt{3}} {}^t[1, \omega, \bar{\omega}]$ は V_3 の正規直交基底である。一方、階段化して

$$A - 0E = \begin{bmatrix} 1 & \bar{\omega} & \omega \\ \omega & 1 & \bar{\omega} \\ \bar{\omega} & \omega & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \bar{\omega} & \omega \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるから、固有空間 V_0 の基底として $\mathbf{v} = {}^t[\omega, 0, -1]$, $\mathbf{w} = {}^t[0, \bar{\omega}, -1]$ が選べる。これをグラム-シュミット直交化して V_0 の直交基底

$$\mathbf{v}, \quad \mathbf{w} - \frac{(\mathbf{w}, \mathbf{v})}{(\mathbf{v}, \mathbf{v})} \mathbf{v} = \frac{1}{2} {}^t[-\omega, 2\bar{\omega}, -1]$$

を得る。これらをそれぞれのノルムで割った $\mathbf{v}' = \frac{1}{\sqrt{2}} {}^t[\omega, 0, -1]$, $\mathbf{w}' = \frac{1}{\sqrt{6}} {}^t[-\omega, 2\bar{\omega}, -1]$ は V_0 正規直交基底である。

定理 6.21 により、 V_3 と V_0 の正規直交基底を寄せ集めた $\mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}'$ は \mathbb{C}^3 の正規直交基底。定義 6.16 によりこれらを並べた

$$P = [\mathbf{u}' \quad \mathbf{v}' \quad \mathbf{w}'] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & \omega/\sqrt{2} & -\omega/\sqrt{6} \\ \omega/\sqrt{3} & 0 & 2\bar{\omega}/\sqrt{6} \\ \bar{\omega}/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

はユニタリ行列である. $A\mathbf{u}' = 3\mathbf{u}'$, $A\mathbf{v}' = 0\mathbf{v}'$, $A\mathbf{w}' = 0\mathbf{w}'$ を行列表示して

$$AP = P \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

両辺の左から P^* ($= P^{-1}$) を乗じて得られる

$$P^*AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

が A のユニタリ対角化である.

(2) A の固有多項式を計算して $\Phi_A(x) = (x-2)(x-(1+i))(x-(2-2i))$ を得るから, A の固有値は $2, 1+i, 2-2i$ である. 階段化して

$$\begin{aligned} A - 2E &= \begin{bmatrix} -i & 0 & i \\ 0 & -1+i & 0 \\ i & 0 & -i \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A - (1+i)E &= \begin{bmatrix} 1-2i & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1-2i \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A - (2-2i)E &= \begin{bmatrix} i & 0 & i \\ 0 & -1+3i & 0 \\ i & 0 & i \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となるから, 固有空間 V_2, V_{1+i}, V_{2-2i} それぞれの基底として,

$$\mathbf{u} = {}^t[1, 0, 1], \quad \mathbf{v} = {}^t[0, 1, 0], \quad \mathbf{w} = {}^t[1, 0, -1]$$

を得る. 定理 6.21 により, これらをそれぞれのノルムで割って寄せ集めた

$$\mathbf{u}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}, \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v}, \quad \mathbf{w}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{w}$$

は \mathbb{C}^3 の正規直交基底. 定義 6.16 によりこれらを並べた

$$P = [\mathbf{u}' \ \mathbf{v}' \ \mathbf{w}'] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

はユニタリ行列である. $A\mathbf{u}' = 2\mathbf{u}'$, $A\mathbf{v}' = (1+i)\mathbf{v}'$, $A\mathbf{w}' = (2-2i)\mathbf{w}'$ を行列表示して

$$AP = P \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-2i \end{bmatrix}.$$

両辺の左から $P^* (= P^{-1})$ を乗じて得られる

$$P^*AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-2i \end{bmatrix}$$

が A のユニタリ対角化である.

第 6 章 演習問題

演習 1 (1) これは自明.

(2) 問題の指示に従い

$$\begin{aligned} 0 \leq \|z\|^2 &= (z, z) = \left(x - \frac{(x, y)}{\|y\|^2}y, x - \frac{(x, y)}{\|y\|^2}y \right) \\ &= (x, x) - \frac{\overline{(x, y)}}{\|y\|^2}(x, y) - \frac{(x, y)}{\|y\|^2}(y, x) + \frac{|(x, y)|^2}{\|y\|^4}(y, y) \\ &= (x, x) - \frac{\overline{(x, y)}}{\|y\|^2}(x, y) - \frac{(x, y)}{\|y\|^2}\overline{(x, y)} + \frac{|(x, y)|^2}{\|y\|^4}(y, y) \\ &= \|x\|^2 - \frac{|(x, y)|^2}{\|y\|^2} = \frac{1}{\|y\|^2}((\|x\| \cdot \|y\|)^2 - |(x, y)|^2). \end{aligned}$$

これより $|(x, y)|^2 \leq (\|x\| \cdot \|y\|)^2$ が, さらに各辺から 2 乗を除いたコーシー-シュヴァルツの不等式が従う. 等号成立のためには $z = \mathbf{0}$, すなわち $x = \frac{(x, y)}{\|y\|^2}y$ が必要十分. これが成り立てば x, y は線形従属. 逆にこれらが線形従属であれば ($y \neq \mathbf{0}$ の仮定の下) $x = cy$ の形になるが, このとき等式成立が直接確かめられる (両辺 $= |c| \cdot \|x\|^2$ となる).

演習 2 n 次複素正則行列 A は, \mathbb{C}^n の 1 組の基底 v_1, v_2, \dots, v_n を以て

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

の形をしている (定理 4.22). v_1, v_2, \dots, v_n からグラム-シュミットの直交化法により得られる \mathbb{C}^n の正規直交基底を w_1, w_2, \dots, w_n とする. 定理 6.12 の記号を用いると

$$u_1 = \|u_1\| w_1, \quad u_2 = \|u_2\| w_2, \quad \dots, \quad u_n = \|u_n\| w_n.$$

同定理から, $c_{ij} = \frac{(v_j, u_i)}{\|u_i\|}$ ($i \leq j$) とおくと

$$\begin{aligned} v_1 &= c_{11}w_1, \quad v_2 = c_{12}w_1 + c_{22}w_2, \quad v_3 = c_{13}w_1 + c_{23}w_2 + c_{33}w_3, \dots \\ \dots, v_n &= c_{1n}w_1 + c_{2n}w_2 + c_{3n}w_3 + \dots + c_{nn}w_n \end{aligned}$$

が成り立つ. 記法 (2.21) を用いて

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \cdots & \mathbf{w}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

が成り立つ. ここで $\begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \cdots & \mathbf{w}_n \end{bmatrix}$ はユニタリ行列 (定義 6.16 を見よ), その右は上三角行列である.

演習 3 まず, すべてのベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ に対し

$$(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A^*\mathbf{y}) \quad (1)$$

が成り立つ. 実際, ${}^tA = \overline{{}^tA} = \overline{A^*}$ より

$$\text{左辺} = {}^t(A\mathbf{x})\overline{\mathbf{y}} = {}^t\mathbf{x}{}^tA\overline{\mathbf{y}} = {}^t\mathbf{x}\overline{A^*}\overline{\mathbf{y}} = \text{右辺}.$$

次に, すべてのベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ に対し

$$(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, B\mathbf{y}) \quad (2)$$

を成り立たせる正方行列 B が必ず A^* に一致することを見る. このため内積の**非退化性**と呼ばれる性質, すなわちすべてのベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ に対し

$$(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0$$

を成り立たせるベクトル $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ が零ベクトル $\mathbf{0}$ に限るという性質を用いる (この性質は, 上の等式においてとくに $\mathbf{x} = \mathbf{z}$ の場合の $\|\mathbf{z}\|^2 = (\mathbf{z}, \mathbf{z}) = 0$ から従う). さて (1) と (2) の右辺同士が等しいから, すべてのベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ に対し

$$(\mathbf{x}, A^*\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, B\mathbf{y}), \text{ すなわち } (\mathbf{x}, A^*\mathbf{y} - B\mathbf{y}) = 0$$

が成り立つ. 非退化性により, すべてのベクトル $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ に対し

$$A^*\mathbf{y} - B\mathbf{y} = \mathbf{0}, \text{ すなわち } A^*\mathbf{y} = B\mathbf{y}.$$

これより $A^* = B$ が従う.

演習 4 (b) \Leftrightarrow (c) を示そう. (b) は $U^*U = E$ と同値. 上で見た「内積の非退化性」を用いると, この条件は, すべての $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ に対し

$$(\mathbf{x}, U^*U\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

が成り立つこと同値. 前問の結果からこの左辺が $(U\mathbf{x}, U\mathbf{y})$ に等しいから, 最後の条件は (c) と同値である.

(c) \Rightarrow (d) を示す. (b) において $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ の場合を考えると (c) が従う.

(c) \Leftarrow (d) を示す. 複素数 α の実部, 虚部をそれぞれ $\operatorname{Re}(\alpha)$, $\operatorname{Im}(\alpha)$ で表す. 一般に

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\operatorname{Re}((\mathbf{x}, \mathbf{y})) \end{aligned} \quad (1)$$

が成り立つ. この \mathbf{y} を虚数単位倍 $i\mathbf{y}$ に置き換える. $\operatorname{Re}(-i\alpha) = \operatorname{Im}(\alpha)$ を用いて

$$\|\mathbf{x} + i\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\operatorname{Im}((\mathbf{x}, \mathbf{y})) \quad (2)$$

を得る.

さて, (d) を仮定する. するとすべての $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ に対し $\|U\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$, $\|U\mathbf{y}\| = \|\mathbf{y}\|$, $\|U\mathbf{x} + U\mathbf{y}\| = \|U(\mathbf{x} + \mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$, $\|U\mathbf{x} + iU\mathbf{y}\| = \|U(\mathbf{x} + i\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} + i\mathbf{y}\|$.

(1), (2) とそれらにおいて \mathbf{x}, \mathbf{y} をそれぞれ $U\mathbf{x}, U\mathbf{y}$ に置き換えた 2 式から

$$\operatorname{Re}((U\mathbf{x}, U\mathbf{y})) = \operatorname{Re}((\mathbf{x}, \mathbf{y})), \quad \operatorname{Im}((U\mathbf{x}, U\mathbf{y})) = \operatorname{Im}((\mathbf{x}, \mathbf{y})).$$

これは $(U\mathbf{x}, U\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, すなわち (c) を意味する.

演習 5 $W = \{\mathbf{0}\}$ または $W = \mathbb{C}^n$ の場合, それぞれ $W^\perp = \mathbb{C}^n$, $W^\perp = \{\mathbf{0}\}$ となる (後者の場合, 演習 3 の解答にある内積の非退化性を用いる) から, 本問の結論が成り立つ. よって以下, これらの場合を除く.

W の正規直交基底 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$ が存在する (6.1 節末を見よ). これを延長する \mathbb{C}^n の正規直交基底 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_n$ が存在する. 実際, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$ を延長する \mathbb{C}^n の基底 (2 章末演習問題 3 を見よ) に, グラムシュミットの直交化法を適用すればよい. このとき

$$W = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r \rangle, \quad W^\perp = \langle \mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_n \rangle \quad (*)$$

が成り立つことが以下のように示されるから, 目標の $\mathbb{C}^n = W \oplus W^\perp$ が従う (勝手なベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ が W に属す \mathbf{w} と W^\perp に属す \mathbf{v} の和 $\mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$ に一意的に表される). (*) の第 1 式は明らかに成り立つ. 第 2 式において \supset が成り立つことは容易に見て取れる. 逆の包含を見るため

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \dots + c_n\mathbf{u}_n$$

が第 2 式の左辺に属す, すなわち $\boldsymbol{v} \in W^\perp$ とする. このベクトルが $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r$ のそれぞれと直交することから

$$c_1 = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_1) = 0, c_2 = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_2) = 0, \dots, c_r = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_r) = 0.$$

よって \boldsymbol{v} は第 2 式右辺に属し, 第 2 式において c が成り立つことがわかる.

第 7 章 実対称行列と 2 次曲線・2 次曲面

問 7.6 (1) A の固有多項式を計算して $\Phi_A(x) = (x-1)(x-3)(x+2)$ を得るから, A の固有値は $1, 3, -2$ である. 階段化して

$$\begin{aligned} A - E &= \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A - 3E &= \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A + 2E &= \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となるから, 固有空間 V_1, V_3, V_{-2} それぞれの基底として, 実ベクトルたち

$$\mathbf{u} = {}^t[1, 0, -2], \quad \mathbf{v} = {}^t[1, -1, 0], \quad \mathbf{w} = {}^t[1, 1, 1]$$

を得る. 定理 6.21 により, これらをそれぞれのノルムで割って寄せ集めた

$$\mathbf{u}' = \frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{u}, \quad \mathbf{v}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{v}, \quad \mathbf{w}' = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{w}$$

は \mathbb{R}^3 の正規直交基底. 定義 6.16 によりこれらを並べた

$$P = [\mathbf{u}' \ \mathbf{v}' \ \mathbf{w}'] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

は直交行列である. $A\mathbf{u}' = 1\mathbf{u}'$, $A\mathbf{v}' = 3\mathbf{v}'$, $A\mathbf{w}' = -2\mathbf{w}'$ を行列表示して

$$AP = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

両辺の左から ${}^tP (= P^{-1})$ を乗じて得られる

$${}^tPAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

が A の直交実対角化である.

(2) A の固有多項式を計算して $\Phi_A(x) = x(x-3)^2$ を得るから、 A の固有値は $0, 3, 3$ である。階段化して

$$A - 0E = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるから、固有空間 V_0 の基底として実ベクトル $\mathbf{u} = {}^t[1, 1, 1]$ が選べる。これを自身のノルム $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{3}$ で割った $\mathbf{u}' = \frac{1}{\sqrt{3}} {}^t[1, 1, 1]$ は V_0 の正規直交基底である。

一方、階段化して

$$A - 3E = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるから、固有空間 V_3 の基底として実ベクトルたち $\mathbf{v} = {}^t[-1, 0, 1]$, $\mathbf{w} = {}^t[0, -1, 1]$ が選べる。これをグラム-シュミット直交化して V_3 の直交基底

$$\mathbf{v}, \quad \mathbf{w} - \frac{(\mathbf{w}, \mathbf{v})}{(\mathbf{v}, \mathbf{v})} \mathbf{v} = \frac{1}{2} {}^t[1, -2, 1]$$

を得る。これらをそれぞれのノルムで割った $\mathbf{v}' = \frac{1}{\sqrt{2}} {}^t[-1, 0, 1]$, $\mathbf{w}' = \frac{1}{\sqrt{5}} {}^t[1, -2, 1]$ は V_3 正規直交基底である。

定理 6.21 により、 V_0 と V_3 の正規直交基底を寄せ集めた $\mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}'$ は \mathbb{R}^3 の正規直交基底。定義 6.16 によりこれらを並べた

$$P = [\mathbf{u}' \ \mathbf{v}' \ \mathbf{w}'] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

は直交行列である。 $A\mathbf{u}' = 0\mathbf{u}'$, $A\mathbf{v}' = 3\mathbf{v}'$, $A\mathbf{w}' = 3\mathbf{w}'$ を行列表示して

$$AP = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

両辺の左から ${}^tP (= P^{-1})$ を乗じて得られる

$${}^tPAP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

が A の直交実対角化である。

問 7.9 (1) 与えられた 2 次曲線に対応する行列とその主要部は

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 9 \\ -3 & 9 & 9 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

である. A の固有多項式を計算して $\Phi_A(x) = (x-4)(x-6)$ を得るから, A の固有値は 4, 6. 従って, この 2 次曲線の標準形を与える 3 次実対称行列は, 定義 7.11 の下のリストのうちのタイプ (I) またはタイプ (III) で, いずれにせよ

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

の形をしている (タイプ (I) か (III) に応じ, $\gamma \neq 0$ か $\gamma = 0$ となる). 一般に, 標準形を与える行列 (${}^t\tilde{P}\tilde{A}\tilde{P}$ の形) の行列式はもとの \tilde{A} の行列式 $|\tilde{A}|$ に一致する ($|\tilde{P}| = |P| = \pm 1$ ゆえ). いまの場合, 標準形を与える行列の行列式は 24γ で, 一方計算により $|\tilde{A}| = -24 \cdot 20$ を得る. 両者が相等しいことから $\gamma = 20$ を得て, 結局求めるべき標準形は $4X^2 + 6Y^2 - 20 = 0$ であることが従う. これは楕円である.

(2) 与えられた 2 次曲線に対応する行列とその主要部は

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -10 \\ 2 & -1 & -4 \\ -10 & -4 & 48 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

である. A の固有多項式を計算して $\Phi_A(x) = (x-3)(x+2)$ を得るから, A の固有値は 3, -2. 従って, この 2 次曲線の標準形を与える 3 次実対称行列は, 上の (1) と同様, タイプ (I) または (III) で

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

の形をしている. この行列の行列式は -6γ で, 一方計算により $|\tilde{A}| = (-6) \cdot 10$ を得る. 両者が相等しいことから $\gamma = 10$ を得て, 求めるべき標準形は $3X^2 - 2Y^2 + 10 = 0$ であることが従う. これは双曲線である.

(3) 与えられた 2 次曲線に対応する行列とその主要部は

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & -5 \\ 5 & -5 & -1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

である. A の固有多項式を計算して $\Phi_A(x) = (x-5)x$ を得るから, A の固有値は $5, 0$. 従って, この 2 次曲線の標準形を与える 3 次実対称行列は

$$\text{タイプ (II)} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta \\ 0 & \delta & 0 \end{bmatrix} \text{ (行列式} = -5\delta^2 \text{)} \text{ または タイプ (IV)} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \text{ (行列式} = 0 \text{)}$$

の形をしている. 計算により $|\tilde{A}| = -25$ を得る. これが非零であって, かつ上のいずれかの行列の行列式と一致することから, その行列はタイプ (II) でなければならず, その行列式 $-5\delta^2$ は $|\tilde{A}| = -25$ と一致する. $\delta = \sqrt{5}$ が選ぶと ($\delta = -\sqrt{5}$ を選んでもよい) 求めるべき標準形は $(5X^2 + 2\delta Y) = 5X^2 + 2\sqrt{5}Y = 0$ となる. これは放物線である.

問 7.18 (1) 与えられた 2 次曲面に対応する行列とその主要部は

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & -5 & 27 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

である. A の固有多項式を計算して $\Phi_A(x) = (x-1)(x-3)(x+2)$ を得るから, A の固有値は $1, 3, -2$. \tilde{A} の行列式を計算して $|\tilde{A}| = 4$ を得る. 前問 (1), (2) と同様に考えて, この 2 次曲面の標準形は, 実対角行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2/3 \end{bmatrix}$$

が与える $X^2 + 3Y^2 - 2Z^2 - \frac{2}{3} = 0$ である. $\text{sgn } A = (2, 1)$, $\text{sgn } \tilde{A} = (2, 2)$ であるから, 本問の前の表よりこれは一葉双曲面である.

(2) 与えられた 2 次曲面に対応する行列とその主要部は

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

である. A の固有多項式を計算して $\Phi_A(x) = (x-1)(x-3)x$ を得るから, A の固有値は $1, 3, 0$. \tilde{A} の行列式を計算して $|\tilde{A}| = -9$ を得る. 前問 (3) と同様に考え, この 2 次曲面の標準形は実対称行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

が与える $X^2 + 3Y^2 + 2\sqrt{3}Z = 0$ である. $\text{sgn } A = (2, 0)$, $\text{sgn } \tilde{A} = (3, 1)$ であるから, 本問の前の表よりこれは楕円放物面である.

(3) 与えられた 2 次曲面に対応する行列とその主要部は

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 & 9 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

である. A の固有多項式を計算して $\Phi_A(x) = (x-2)(x+1)^2$ を得るから, A の固有値は $2, -1, -1$. \tilde{A} の行列式を計算して $|\tilde{A}| = -9$ を得る. 前問 (1), (2) と同様に考えて, この 2 次曲面の標準形は, 実対角行列

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9/2 \end{bmatrix}$$

が与える $2X^2 - Y^2 - Z^2 - \frac{9}{2} = 0$ である. $\text{sgn } A = (1, 2)$, $\text{sgn } \tilde{A} = (1, 3)$ であるから, 本問の前の表よりこれは二葉双曲面である (表の $\text{sgn } A = (2, 1)$, $\text{sgn } \tilde{A} = (3, 1)$ の欄を見る).

第 7 章 演習問題

演習 1 (1) ヒントにあるように, 3 次直交行列 A の固有多項式は実数係数の 3 次多項式ゆえ, 固有方程式は少なくとも 1 つの実数解 α をもつ. それに関するノルム 1 の実固有ベクトル \mathbf{u} を選べば, $A\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}$ ゆえ, $1 = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (A\mathbf{u}, A\mathbf{u}) = \alpha^2(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \alpha^2$. これより A の固有値は (a) 1 または -1 が 3 つ, または (b) $\pm 1, \beta, \bar{\beta}$ (β は虚数, 例題 7.2(1) より $|\beta| = 1$) のいずれかとなる. $\det A = 1$ の仮定から, いずれの場合も 1 が固有値に含まれる.

(2) 3 次直交行列 $P = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3]$ を, \mathbf{u}_1 が 1 に関する固有ベクトルとなるように選ぶ. $\mathbf{u}_1 = A\mathbf{u}_1$ ゆえ

$$(\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2) = (A\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = 0$$

となり, \mathbf{u}_1 と $A\mathbf{u}_2$ は直交する. 同様に \mathbf{u}_1 と $A\mathbf{u}_3$ は直交する. 従って $A\mathbf{u}_2, A\mathbf{u}_3$ はいずれも $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ の線形結合になり, 記法 (2.21) を用いて

$$A[\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3] = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix}, \quad \text{すなわち } {}^tPAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix}$$

が成り立つ。ここに a, b, c, d は実数である。'PAP が行列式 = 1 の直交行列であることから、 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ は行列式 = 1 の 2 次直交行列となり、例題 7.2 (2) により

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

に一致する。これより本問の求める結果を得る。

(3) $\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{OR}$, $\mathbf{u}_2 = \overrightarrow{OS}$, $\mathbf{u}_3 = \overrightarrow{OT}$ とする。いま得た

$$A[\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3] = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

は、 A に対応する線形変換が(それを \mathbf{E}^3 の変換と見るとき)、直線 OR の周りの $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ が右手系の場合、 O から R に向い右ネジが進み、左手系の場合、 R から O に向い右ネジが進むような) 角度 θ の回転である。実際、その線形変換は直線 OR 上の点を動かさず、 $O(0,0)$, $S(1,0)$, $T(0,1)$ となるような xy -座標平面における、原点回りの θ 回転を与えるからである。

演習 2 (1) 問題の 2 次曲線の標準形を与える 3 次実対称行列は、定義 7.11 の下のリストのうちのタイプ (I) または (III) である。これらの行列式はもとの $|\tilde{A}|$ と一致するから、いずれのタイプであっても行列の (3,3) 成分は $|\tilde{A}|/\alpha\beta$ に等しい。よって標準形は本問に与えられた通りになる。

(2) 問題の 2 次曲線の標準形を与える 3 次実対称行列はタイプ (II) であり、上に言う「一致」から $|\tilde{A}| = -\alpha\delta^2$ が成り立つ。これより $|\tilde{A}|/\alpha = -\delta^2 < 0$, すなわち $\alpha|\tilde{A}| < 0$ が従う。 δ として $\sqrt{-|\tilde{A}|/\alpha}$ が選べて本問の結果が従う。(δ として $-\sqrt{-|\tilde{A}|/\alpha}$ を選んでも、問題の 2 次曲線の標準形が得られる。)

演習 3 (1) 問題の 2 次曲面の標準形は、注意 7.17 の下のリストのうちのタイプ (I) または (III) であり、それを与える 4 次実対称行列は

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi \end{bmatrix}$$

である。ただし $\xi = 0$ も可とする。この行列式はもとの $|\tilde{A}|$ と一致するから、 $\xi = |\tilde{A}|/\alpha\beta\gamma$ 。よって標準形は本問に与えられた通りになる。

(2) 問題の 2 次曲面の標準形はタイプ (IV) であり, それを与える 4 次実対称行列は

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & \delta & 0 \end{bmatrix}$$

である. 上に言う「一致」から, $|\tilde{A}| = -\alpha\beta\delta^2$ が成り立つ. これより $|\tilde{A}|/\alpha\beta = -\delta^2 < 0$, すなわち $\alpha\beta|\tilde{A}| < 0$ が従う. δ として $\sqrt{-|\tilde{A}|/\alpha\beta}$ が選べて本問の結果が従う. (δ として $-\sqrt{-|\tilde{A}|/\alpha\beta}$ を選んでも, 問題の 2 次曲面の標準形が得られる.)

演習 4 (1) A の固有値はすべて実数であり (定理 6.25), 0 がこれに含まれれば $\text{Ker } A$ は A の固有値 0 に関する固有空間. 0 が含まれない場合には $\text{Ker } A = \{\mathbf{0}\}$ である. A は対角化可能である (定理 7.4) から $\mathbb{R}^n = V_- \oplus \text{Ker } A \oplus V_+$, すなわち (i) が成り立つ. $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in V_+$ とする. A のいくつかの正の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ ($s > 0$) と λ_k に関する実固有ベクトル \mathbf{x}_k ($1 \leq k \leq s$) に対して

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_s$$

が成り立つ. しかも $k \neq l$ ならば \mathbf{x}_k と $\lambda_l \mathbf{x}_l$ は直交する (定理 6.21). 従って

$$\begin{aligned} {}^t \mathbf{x} A \mathbf{x} &= (\mathbf{x}, A \mathbf{x}) = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_s, \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_s \mathbf{x}_s) \\ &= (\mathbf{x}_1, \lambda_1 \mathbf{x}_1) + (\mathbf{x}_2, \lambda_2 \mathbf{x}_2) + \dots + (\mathbf{x}_s, \lambda_s \mathbf{x}_s) \\ &= \lambda_1 \|\mathbf{x}_1\|^2 + \lambda_2 \|\mathbf{x}_2\|^2 + \dots + \lambda_s \|\mathbf{x}_s\|^2 > 0. \end{aligned}$$

同様に $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in V_-$ とすると ${}^t \mathbf{x} A \mathbf{x} < 0$. 従って (ii) が成り立つ.

(2) (V_+, V_-) を (1) に与えられたペアすると, これらは定義から (7.23) を満たす. ヒントの通り, (V'_+, V'_-) を別の (一般的) ペアとする. これが (7.23) を満たすことを示すには $\dim(V_+) = \dim(V'_+)$, $\dim(V_-) = \dim(V'_-)$ を示せばよい. しかし, (i) により後者は前者から従うから, 前者のみ示せば十分である. さて,

$$V_+ \cap (\text{Ker } A \oplus V'_-) = \{\mathbf{0}\} \quad (*)$$

が成り立つ. 実際 \supset は自明. 逆の包含のため, \mathbf{x} がこの左辺に属すとすると, $\mathbf{x} \in \text{Ker } A \oplus V'_-$ より ${}^t \mathbf{x} A \mathbf{x} \leq 0$. $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ とすれば $\mathbf{x} \in V_+$ より ${}^t \mathbf{x} A \mathbf{x} > 0$ となり, いま得た不等式に反するから $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が従う. こうして示せた (*) より

$$\dim(V_+) \leq \dim \mathbb{R}^n - \dim(\text{Ker } A \oplus V'_-) = \dim(V'_+).$$

第8章 ジョルダン標準形

問 8.3 (i)⇒(ii). (i) が成り立つとし, 具体的に $P^{-1}AP = B$ とする. $Q^{-1}BQ = J$ を B のジョルダン標準形とすると

$$(PQ)^{-1}A(PQ) = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = Q^{-1}BQ = J.$$

これは J が A のジョルダン標準形であることを示すから, (ii) が成り立つ.

(i)⇐(ii). まず一般に, ジョルダン標準形行列 J と, そのジョルダン細胞たちを並べ替えて得られるジョルダン標準形行列 J' とは互いに相似である. 実際, 例えば

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{bmatrix}, \quad J' = \begin{bmatrix} J_3 & & \\ & J_1 & \\ & & J_2 \end{bmatrix},$$

J_k ($k = 1, 2, 3$) は r_k -次ジョルダン細胞とする. ここで行列のブロック分割 (3.7 節) を用い, また見かけ上 (i, j) -成分の位置にあるブロックを (i, j) -ブロックと呼ぶことにする. このとき

$$P = \begin{bmatrix} O & E_{r_1} & O \\ O & O & E_{r_2} \\ E_{r_3} & O & O \end{bmatrix}$$

を以て $P^{-1}JP = J'$ が成り立つ. これは P が直交行列ゆえ

$$P^{-1} = {}^tP = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} O & O & E_{r_3} \\ E_{r_1} & O & O \\ O & E_{r_2} & O \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

であり,

- tP による左乗法が, $(1, k)$ -, $(2, k)$ -, $(3, k)$ -ブロックをそれぞれ $(2, k)$ -, $(3, k)$ -, $(1, k)$ -ブロックに写し,
- P による右乗法が, $(k, 1)$ -, $(k, 2)$ -, $(k, 3)$ -ブロックをそれぞれ $(k, 2)$ -, $(k, 3)$ -, $(k, 1)$ -ブロックに写す

($k = 1, 2, 3$) ことに基づいている.

さて (ii) を仮定し, 具体的に, $Q^{-1}AQ = J$, $R^{-1}BR = J'$ がジョルダン標準形行列で, これらはジョルダン細胞の並べ替えで相等しくなるとする. 上の一般論から, ある正則行列 P を以て $P^{-1}JP = J'$ が成り立つ. このとき

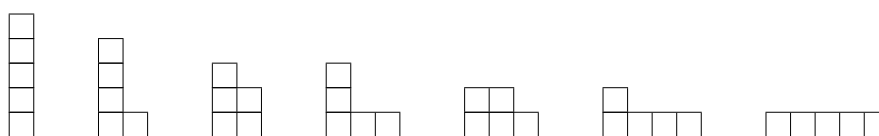
$$\begin{aligned} (QPR^{-1})^{-1}A(QPR^{-1}) &= RP^{-1}(Q^{-1}AQ)PR^{-1} \\ &= RP^{-1}JPR^{-1} = R(P^{-1}JP)R^{-1} \\ &= RJ'R^{-1} = B. \end{aligned}$$

こうして、 A と B は互いに相似、すなわち (i) が成り立つ。

問 8.6 定義 8.5 によれば、 V に属すベクトルたち v_1, v_2, \dots, v_d が $\text{mod } W$ 基底であるとは、これらが線形独立であり、かつ V における W の補空間を生成する、換言して、これらが V における W のある補空間の基底を成す。

問 8.9 $\dim W_\alpha^{(1)}, \dim W_\alpha^{(2)}, \dots$ をこの順に記すと次のいずれか。

(i) 1, 2, 3, 4, 5. (ii) 2, 3, 4, 5. (iii) 2, 4, 5. (iv) 3, 4, 5. (v) 3, 5. (vi) 4, 5. (vii) 5.
 W_α の図形は順に次のようになる。



問 8.12 (1) 与えられた正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

の行列式を計算して $\Phi_A(x) = (x - 2)^3$ を得る。よって A の固有値は 2, 2, 2。これより、広義固有空間 W_2 は \mathbb{C}^3 に一致する。階段化して

$$A - 2E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

を得るから、 $W_2^{(1)} (= \text{Ker}(A - 2E))$ は 1 次元であり、 ${}^t[0, -2, 1]$ を基底にもつ。同時に、 W_2 の図形が



であることが従う。 $W_2^{(2)}$ に属さないベクトル $v_3 \in W_2^{(3)} (= \mathbb{C}^3)$ (換言すれば、 $W_2^{(3)}$ の $\text{mod } W_2^{(2)}$ 基底) を選んで

$$v_2 = (A - 2E)v_3, \quad v_1 = (A - 2E)v_2 \tag{1.1}$$

とおくと、 v_1, v_2, v_3 が、上の図形に適合した $W_2 (= \mathbb{C}^3)$ の基底になり (下図参照),

$$\begin{matrix} A - 2E & \left(\begin{array}{c} \boxed{v_3} \\ \boxed{v_2} \\ \boxed{v_1} \end{array} \right. \end{matrix}$$

従ってこれら並べた

$$P = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3]$$

は正則行列になる. (1.1) の 2 つの等式と $\mathbf{v}_1 \in W_2^{(1)} (= \text{Ker}(A - 2E))$ を書き換えた

$$A\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_1, \quad A\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2, \quad A\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$$

を行列表示して

$$AP = P \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

この両辺の左から P^{-1} を乗じ

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

これが A のジョルダン標準形である. あとは \mathbf{v}_3 を選べばよい. $W_2^{(2)}$ の基底を求めてからこれをすべきところ, やや横着して試しに $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_2 (= {}^t[0, 1, 0])$ としてみると, 計算により $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ を得て, この \mathbf{v}_3 がいま望んでいる条件 $\mathbf{v}_3 \notin W_2^{(2)}$ を満たすことがわかる (\mathbf{v}_3 として \mathbf{e}_1 を選ばなかったのは, そうすると $\mathbf{v}_2 = {}^t[0, -2, 1]$ となってこれが上で求めた $W_2^{(1)}$ の基底に一致し $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ となるから). 計算により具体的に

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) 与えられた正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

の行列式を計算して $\Phi_A(x) = (x - 2)^4$ を得る. よって A の固有値は $2, 2, 2, 2$. これより, 広義固有空間 W_2 は \mathbb{C}^4 に一致する. 階段化して

$$A - 2E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

を得るから, $W_2^{(1)} (= \text{Ker}(A - 2E))$ は 2 次元であり,

$$\mathbf{e}_3 (= {}^t[0, 0, 1, 0]), \quad {}^t[1, 1, 0, -1] \tag{2.1}$$

を基底にもつ。最後の階段行列は $S(A - 2E)$ (S は正則行列) の形をしている。これを左から $A - 2E$ に乗じ $S(A - 2E)^2 = O$ を得るから、 $(A - 2E)^2 = O$ 。よって $W_2^{(2)} (= \text{Ker}((A - 2E)^2))$ は \mathbb{C}^4 に一致し、 W_2 の図形は



となる。(2.1) に与えられた $W_2^{(1)}$ の基底を見て、 $e_1 (= {}^t[1, 0, 0, 0])$, $e_2 (= {}^t[0, 1, 0, 0])$ が $W_2^{(1)}$ の補空間を、その基底として生成する (換言すれば、 $W_2^{(2)} (= \mathbb{C}^4)$ の $\text{mod } W_2^{(1)}$ 基底である) ことがわかる。 $v_2 = e_1$, $w_2 = e_2$ とおき

$$v_1 = (A - 2E)v_2, \quad w_1 = (A - 2E)w_2 \quad (2.2)$$

と定めると、 v_1, v_2, w_1, w_2 が上の図形に適合した $W_2 (= \mathbb{C}^4)$ の基底であって (下図参照),

$$A - 2E \left(\begin{array}{|c|c|} \hline v_2 & w_2 \\ \hline v_1 & w_1 \\ \hline \end{array} \right)$$

とくにこれらを並べた

$$P = [v_1 \ v_2 \ w_1 \ w_2]$$

は正則行列になる。(2.1) の 2 つの等式と $v_1, w_1 \in W_2^{(1)} (= \text{Ker}(A - 2E))$ を書き換えた

$$Av_1 = 2v_1, \quad Av_2 = v_1 + 2v_2, \quad Aw_1 = 2w_1, \quad Aw_2 = w_1 + 2w_2$$

を行列表示して

$$AP = P \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

この両辺の左から P^{-1} を乗じ

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

これが A のジョルダン標準形である。 P を具体的に表すと (ごく簡単な計算により)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(3) 与えられた正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 4 & 8 & 2 \\ -1 & -6 & 6 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

の行列式を計算して $\Phi_A(x) = x^2(x-2)^3$ を得る. よって A の固有値は $0, 0, 2, 2, 2$.

(i) 固有値 0 に関して. 階段化して

$$A - 0E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 4 & 8 & 2 \\ -1 & -6 & 6 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

を得るから, $W_0^{(1)} (= \text{Ker}(A - 0E))$ は 1 次元であり, ${}^t[0, 1, 1, 0, 0]$ を基底にもつ. 同時に, W_0 の図形が

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

であることが従う. 最後の階段行列は $S(A - 0E)$ (S は正則行列) の形をしている. $S(A - 0E)^2$ を計算して, それを階段化し

$$S(A - 0E)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

を得るから, $W_0 (= W_0^{(2)} = \text{Ker}((A - 0E)^2))$ は

$$\mathbf{e}_1 (= {}^t[1, 0, 0, 0]), \quad {}^t[0, 1, 1, 0, 0]$$

を基底にもつ. $W_0^{(1)}$ に属さない W_0 のベクトル (換言すれば, $W_0^{(2)}$ の mod $W_0^{(1)}$ 基底) \mathbf{v}_2 として \mathbf{e}_1 を選べる.

$$\mathbf{v}_1 = (A - 0E)\mathbf{v}_2 (= {}^t[0, -1, -1, 0, 0]) \quad (3.1)$$

とおくと, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ が上の図形に適合した W_2 の基底になる (下図参照).

$$A - 2E \left(\begin{array}{|c|} \hline \mathbf{v}_2 \\ \hline \mathbf{v}_1 \\ \hline \end{array} \right)$$

(ii) 固有値 2 に関して. 階段化して

$$A - 2E = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -6 & 4 & 8 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

を得るから, $W_2^{(1)} (= \text{Ker}(A - 2E))$ は 1 次元であり, ${}^t[0, 2, 1, 1, 0]$ を基底にもつ. 同時に, W_2 の図形が

$$\begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array}$$

であることが従う. 最後の階段行列は $T(A - 2E)$ (T は正則行列) の形をしている. $T(A - 2E)^2$ を計算して, それを階段化し

$$T(A - 2E)^2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -6 & 4 & 8 & 0 \\ -1 & -6 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

を得るから, $W_2^{(2)} (= \text{Ker}((A - 2E)^2))$ は

$${}^t[0, 2, 1, 1, 0], \quad e_4 (= {}^t[0, 0, 0, 0, 1])$$

を基底にもつ. 最後の階段行列は $R(A - 2E)^2$ (R は正則行列) の形をしている. $R(A - 2E)^3$ を計算して, それを階段化し

$$R(A - 2E)^3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -6 & 4 & 8 & 0 \\ -1 & -6 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & -4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

を得るから, $W_2 (= W_2^{(3)} = \text{Ker}((A - 2E)^3))$ は

$${}^t[0, 2, 3, 0, 0], \quad {}^t[0, 4, 0, 3, 0], \quad e_4$$

を基底にもつ. $W_2^{(2)}$ に属さない W_2 のベクトル (換言すれば, $W_2^{(3)}$ の mod $W_2^{(2)}$ 基底) w_3 として ${}^t[0, 2, 3, 0, 0]$ を選べる.

$$w_2 = (A - 2E)w_3 (= {}^t[0, 0, 0, 0, 1]), \quad w_1 = (A - 2E)w_2 (= {}^t[0, 2, 1, 1, 0]) \quad (3.2)$$

とおくと, w_1, w_2, w_3 が上の図形に適合した W_2 の基底になる (下図参照).

$$\begin{array}{l} A - 2E \left(\begin{array}{|c|} \hline w_3 \\ \hline \end{array} \right. \\ \left. \begin{array}{|c|} \hline w_2 \\ \hline \end{array} \right) \\ A - 2E \left(\begin{array}{|c|} \hline w_1 \\ \hline \end{array} \right) \end{array}$$

命題 8.4 により, 上で得られた W_0 の基底と W_2 の基底を寄せ集めて並べた

$$P = [v_1 \ v_2 \ w_1 \ w_2 \ w_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

は正則行列である. (3.1), (3.2) の計 3 つの等式と $v_1 \in W_0^{(1)}$, $w_1 \in W_2^{(1)}$ を書き換えた

$$Av_1 = 0v_1, \quad Av_2 = v_1 + 0v_2, \quad Aw_1 = 2w_1, \quad Aw_2 = w_1 + 2w_2, \quad Aw_3 = w_2 + 2w_3$$

を行列表示して

$$AP = P \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

この両辺の左から P^{-1} を乗じて得られる

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

が A のジョルダン標準形である.

(4) 以下において, 5 次基本ベクトル

$$e_1 = {}^t[1, 0, 0, 0, 0], \quad e_2 = {}^t[0, 1, 0, 0, 0], \quad \dots, \quad e_5 = {}^t[0, 0, 0, 0, 1]$$

を用いる. 与えられた正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

の行列式を計算して $\Phi_A(x) = x(x-2)^4$ を得る. よって A の固有値は $0, 2, 2, 2, 2$.

(i) 固有値 0 に関して. $W_0 = \text{Ker}(A - 0E)$ であって, これは 1 次元. 階段化して

$$A - 0E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

を得るから, W_0 の基底 \mathbf{v} として \mathbf{e}_4 が選べる.

(ii) 固有値 2 に関して. 階段化して

$$A - 2E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

を得るから, $W_2^{(1)} (= \text{Ker}(A - 2E))$ は 1 次元であり, \mathbf{e}_5 を基底にもつ. 同時に, W_2 の図形が



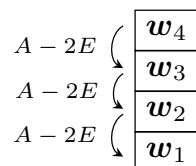
であることが従う. これまでと同じ方法で $W_2^{(k)}$ ($1 < k \leq 4$) の基底を求める. 上で求めた $k = 1$ のときも含めて, 生成系を表す記号を用いて結果を記し

$$W_2^{(1)} = \langle \mathbf{e}_5 \rangle, W_2^{(2)} = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_5 \rangle, W_2^{(3)} = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_5 \rangle, W_2^{(4)} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_5 \rangle.$$

$W_2^{(3)}$ に属さない W_2 のベクトル (換言すれば, $W_2^{(4)}$ の mod $W_2^{(3)}$ 基底) \mathbf{w}_4 として \mathbf{e}_1 を選べる.

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_3 &= (A - 2E)\mathbf{w}_4 (= {}^t[1, 1, 1, 0, -1]), \\ \mathbf{w}_2 &= (A - 2E)\mathbf{w}_3 (= {}^t[0, -1, 0, 0, 2]), \\ \mathbf{w}_1 &= (A - 2E)\mathbf{w}_2 (= \mathbf{e}_5) \end{aligned} \tag{4.1}$$

とおくと, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4$ が上の図形に適合した W_2 の基底になる (下図参照).



命題 8.4 により, 上で得られた W_0 の基底と W_2 の基底を寄せ集めて並べた

$$P = [\mathbf{v} \ \mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \mathbf{w}_3 \ \mathbf{w}_4] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

は正則行列である. (4.1) の 3 つの等式と $\mathbf{v} \in W_0^{(1)}$, $\mathbf{w}_1 \in W_2^{(1)}$ を書き換えた

$$A = 0\mathbf{v}, \quad A\mathbf{w}_1 = 2\mathbf{w}_1, \quad A\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 + 2\mathbf{w}_2, \quad A\mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_2 + 2\mathbf{w}_3, \quad A\mathbf{w}_4 = \mathbf{w}_3 + 2\mathbf{w}_4$$

を行列表示して

$$AP = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

この両辺の左から P^{-1} を乗じて得られる

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

が A のジョルダン標準形である.

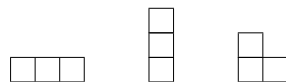
問 8.13 簡単な計算により, A の固有値は α, α, α .

$$A - \alpha E = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

の階数は

$$\text{rank}(A - \alpha E) = \begin{cases} 0 & a = b = c = 0 \text{ の場合} \\ 2 & a \neq 0 \text{ かつ } c \neq 0 \text{ の場合} \\ 1 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

で与えられる. 3 つのケースに応じて, 固有空間 $V_\alpha (= \text{Ker}(A - \alpha E))$ の次元 = 3, 1, 2 となり, 従って広義固有空間 W_α の図形が



となるから

$$A \text{ のジョルダン標準形} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} & a = b = c = 0 \text{ の場合} \\ \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} & a \neq 0 \text{ かつ } c \neq 0 \text{ の場合} \\ \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} & \text{その他の場合} \end{cases}$$

問 8.17 (i) A がジョルダン細胞の場合. A が n 次で, A の固有値を α とする. 本問の前に記されている通り, A を $S = \alpha E$ と

$$N = A - \alpha E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

の和として表す $A = S + N$ が, A のジョルダン分解である. S はスカラー行列ゆえ, とくに対角行列で, すべての n 次正方行列と, とくに N と可換である. N がベキ零であるのは, 例えば $n = 4$ の場合, 順に計算して

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

を得て確かめられる. n が一般の場合にも, 同様にして (または章末演習問題 3 の解答中の公式 (◇) において $\alpha = 0$ として) $N^n = O$ が確かめられる.

(ii) A がジョルダン標準形行列の場合.

$$A = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix},$$

J_i はジョルダン細胞 ($1 \leq i \leq s$) であるとする. $J_i = S_i + N_i$ を, (i) で確かめられた J_i のジョルダン分解とすると, A は 2 つの行列

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & & & \\ & S_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & S_s \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} N_1 & & & \\ & N_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & N_s \end{bmatrix}$$

の和に等しい. こうして得られる $A = S + N$ が A のジョルダン分解である. 実際, S は対角行列で,

$$N^k = \begin{bmatrix} N_1^k & & & \\ & N_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & N_s^k \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

が成り立つことから, N がベキ零 (A が n 次であれば $N^n = O$) であることがわかる. また

$$SN = \begin{bmatrix} S_1 N_1 & & & \\ & S_2 N_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & S_s N_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 S_1 & & & \\ & N_2 S_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & N_s S_n \end{bmatrix} = NS$$

より, S と N は可換である.

(iii) 一般の場合. $P^{-1}AP = J$ を A のジョルダン標準形とする. $J = S_J + N_J$ を (ii) で確かめられた J のジョルダン分解とする. このとき $A = PS_JP^{-1} + PN_JP^{-1}$ が A のジョルダン分解を与える. 実際, $P^{-1}(PS_JP^{-1})P (= S_J)$ が対角行列ゆえ, PS_JP^{-1} は対角化可能. また, 5 章末演習問題 4 (1) の結果により

$$(PN_JP^{-1})^k = PN_J^kP^{-1} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

が成り立ち, (ii) の場合の結果により N_J がベキ零であることから, PN_JP^{-1} はベキ零 (A が n 次であれば $(PN_JP^{-1})^n = O$) である. 最後に, 同結果から $S_JN_J = N_JS_J$ ゆえ

$$\begin{aligned} (PS_JP^{-1})(PN_JP^{-1}) &= P(S_JN_J)P^{-1} \\ &= P(N_JS_J)P^{-1} \\ &= (PN_JP^{-1})(PS_JP^{-1}) \end{aligned}$$

となり, PS_JP^{-1} と PN_JP^{-1} は可換である.

問 8.18 (1) A の各固有値 α に関して, A のジョルダン標準形 $J (= P^{-1}AP)$ の広義固有空間 $W_{J,\alpha}$ と, J と対角成分がすべて一致する対角行列 S_J の固有空間 $V_{S_J,\alpha}$ とは等しい. すなわち

$$W_{J,\alpha} = V_{S_J,\alpha}. \quad (*)$$

実際, α が J の (等しく S_J の) 第 i_1, i_2, \dots 対角成分 ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots$) に現れる場合, $W_{J,\alpha}, V_{S_J,\alpha}$ のいずれも $\langle e_{i_1}, e_{i_2}, \dots \rangle$ に一致する.

さて, α に属す A の広義固有空間を $W_{A,\alpha}$ で表す. $v \in W_{A,\alpha}$ とすると, ある正整数 k に対し

$$(A - \alpha E)^k v = \mathbf{0}.$$

この左辺 $= P(P^{-1}(A - \alpha E)^k P)(P^{-1}v) = P(J - \alpha E)^k(P^{-1}v)$ ゆえ,

$$(J - \alpha E)^k(P^{-1}v) = \mathbf{0}.$$

よって $P^{-1}v \in W_{J,\alpha}$. (*) より $S_J P^{-1}v = \alpha P^{-1}v$. 両辺の左から P を乗じて

$$(PS_J P^{-1})v = \alpha v.$$

(2) k を正整数とする. $S - \beta E$ と N とが可換であり, $(S - \beta E)w = \mathbf{0}$ であるから

$$\begin{aligned} (A - \beta E)^k w &= ((S - \beta E) + N)^k w \\ &= \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} N^p (S - \beta E)^{k-p} w \\ &= N^k w. \end{aligned}$$

(最後の等号は, $0 \leq p < k$ のとき $(S - \beta E)^{k-p} w = \mathbf{0}$ による.) 十分大きな k に対して $N^k = O$, 従って $(A - \beta E)^k w = N^k w = \mathbf{0}$ ゆえ, $w \in W_{A,\beta}$.

(3) S の相異なる固有値のすべてを $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ とする. S の固有空間を V_{S,α_q} とかくと, (2) の結果から $V_{S,\alpha_q} \subset W_{A,\alpha_q}$ ゆえ, A の (等しく S の) 次数を n として

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{q=1}^s V_{S,\alpha_q} \subset \bigoplus_{q=1}^s W_{A,\alpha_q} \subset \mathbb{C}^n.$$

最左辺と最右辺が一致するから 2 つの包含は等号に替えることができ, 従って $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ は A の固有値のすべてであって, かつ

$$V_{S,\alpha_q} = W_{A,\alpha_q} \quad (1 \leq q \leq s)$$

が成り立つ. (1) の結果から各固有空間 V_{S, α_q} に属すベクトルに対して

$$S\mathbf{v} = (PS_J P^{-1})\mathbf{v}$$

が成り立つ (両辺とも $\alpha_q \mathbf{v}$ に等しい). $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{q=1}^s V_{S, \alpha_q}$ ゆえ, すべての $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ に対して上の等式が成り立ち, $S = PS_J P^{-1}$ が従う.

第 8 章 演習問題

演習 1 (1) 固有多項式を計算して

$$\begin{aligned} \Phi_A(x) &= \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 & 0 \\ -\alpha^2 & 2\alpha - x & 0 & 1 \\ & & -x & 1 \\ & & -\alpha^2 & 2\alpha - x \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -\alpha^2 & 2\alpha - x \end{vmatrix}^2 \\ &= (\alpha - x)^4. \end{aligned}$$

これより A の固有値は α のみ (重複度を除く). $B = \begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ -\alpha^2 & \alpha \end{bmatrix}$ とおくと

$$A - \alpha E = \begin{bmatrix} B & E \\ O & B \end{bmatrix}.$$

これに 3 回の第 3 種行基本変形を施して

$$\begin{bmatrix} -\alpha & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

を得る. これの (従って $A - \alpha E$ の) 階数は 2 である. 従って

$$\dim(\text{Ker}(A - \alpha E)) = 2. \quad (\heartsuit)$$

また

$$(A - \alpha E)^2 = \begin{bmatrix} B^2 & 2B \\ O & B^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & 2B \\ O & O \end{bmatrix}$$

であり, これの (従って $(A - \alpha E)^2$ の) 階数は $\text{rank}(2B) (= 1)$ に等しい. よって

$$\dim(\text{Ker}(A - \alpha E)^2) = 3. \quad (\spadesuit)$$

(♡), (♠) より, 広義固有空間 W_α の図形は



となり, 従って A のジョルダン標準形は

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \alpha & 1 & \\ & & \alpha & \\ & & & \alpha \end{bmatrix}$$

となる.

(2) 固有多項式を計算して

$$\begin{aligned} \Phi_A(x) &= \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 & 0 \\ -\alpha^2 & 2\alpha - x & 0 & 1 \\ & & -x & -\alpha^2 \\ & & 1 & 2\alpha - x \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -\alpha^2 & 2\alpha - x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -x & -\alpha^2 \\ 1 & 2\alpha - x \end{vmatrix} \\ &= (\alpha - x)^4. \end{aligned}$$

これより A の固有値は α のみ (重複度を除く). 再び $B = \begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ -\alpha^2 & \alpha \end{bmatrix}$ とおくと

$$A - \alpha E = \begin{bmatrix} B & E \\ O & {}^tB \end{bmatrix}.$$

これに何回かの行基本変形を施して

$$\begin{bmatrix} -\alpha & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 + 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

が得られる. また

$$(A - \alpha E)^2 = \begin{bmatrix} B^2 & B + {}^tB \\ O & B^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & B + {}^tB \\ O & O \end{bmatrix}.$$

ここで

$$B + {}^tB = \begin{bmatrix} -2\alpha & 1 - \alpha^2 \\ 1 - \alpha^2 & 2\alpha \end{bmatrix}$$

であり、この行列式は

$$|B + {}^tB| = -(\alpha^2 + 1)^2.$$

$(\alpha^2 + 1) = 0$ の零・非零で $A - \alpha E$, $(A - \alpha E)^2$ の階数が変わるため、場合分けが起きる.

(i) $(\alpha^2 + 1) = 0$ の場合.

$$\text{rank}(A - \alpha E) = 2, \quad \text{rank}((A - \alpha E)^2) = 1$$

であり、従って

$$\dim(\text{Ker}(A - \alpha E)) = 2, \quad \dim(\text{Ker}(A - \alpha E)^2) = 3.$$

これより広義固有空間 W_α の図形は



となり、従って A のジョルダン標準形は

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \alpha & 1 & \\ & & \alpha & \\ & & & \alpha \end{bmatrix}$$

となる.

(ii) $(\alpha^2 + 1) \neq 0$ の場合.

$$\text{rank}(A - \alpha E) = 3, \quad \text{従って} \quad \dim(\text{Ker}(A - \alpha E)) = 1$$

となる. これより広義固有空間 W_α の図形は



となり、 A のジョルダン標準形は

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \alpha & 1 & \\ & & \alpha & 1 \\ & & & \alpha \end{bmatrix}$$

となる.

$$\dim(\text{Ker}(A - \alpha E)) = 2.$$

また

演習 2 (1) k に関する帰納法で示す. 主張の「等式」は, $k = 1$ において明らかに正しい. ここで, 与えられた定義に従い

$$\binom{1}{2} = \frac{1 \cdot (1-1)}{2!} = 0, \quad \binom{1}{3} = \frac{1 \cdot (1-1) \cdot (1-2)}{3!} = 0$$

であることに注意しよう.

$k > 1$ として, 「等式」が $k-1$ において正しいとすると

$$\begin{aligned} A^k &= A A^{k-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & k-1 & \binom{k-1}{2} & \binom{k-1}{3} \\ 0 & 1 & k-1 & \binom{k-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & k-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & (k-1)+1 & \binom{k-1}{2} + (k-1) & \binom{k-1}{3} + \binom{k-1}{2} \\ 0 & 1 & (k-1)+1 & \binom{k-1}{2} + (k-1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & k & \binom{k}{2} & \binom{k}{3} \\ 0 & 1 & k & \binom{k}{2} \\ 0 & 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

これは「等式」が k においても正しいことを示している. この最後の等号において, 公式

$$\binom{k-1}{s} + \binom{k-1}{s-1} = \binom{k}{s}$$

の $s = 2, 3$ の場合の

$$\binom{k-1}{2} + (k-1) = \binom{k}{2}, \quad \binom{k-1}{3} + \binom{k-1}{2} = \binom{k}{3}$$

を用いた.

(2) A^k の標準形を求める要領を用いる. A^k の固有値は (重複度を除けば) 1 に限る. いま $v_4 = e_4$, $v_3 = (A^k - E)v_4$, $v_2 = (A^k - E)v_3$, $v_1 = (A^k - E)v_2$ とおくと, これらは

$$v_1 = \begin{bmatrix} k^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} * \\ k^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} * \\ * \\ k \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ 1 \end{bmatrix}$$

の形をしている．とくに $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ である．これは A^k の固有値 1 に属す広義固有空間 $W_1 (= \mathbb{C}^4)$ の図形が



であって， $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ がこの図形に適合した $W_1 (= \mathbb{C}^4)$ の基底であることを示している．従って，この基底を並べて得られる正則行列

$$P = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3 \ \mathbf{v}_4]$$

を以て

$$P^{-1}A^kP = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (= A)$$

が成り立つ．簡単な計算によって，より具体的に

$$P = \begin{bmatrix} k^3 & k^2(k-1) & \binom{k}{3} & 0 \\ 0 & k^2 & \binom{k}{2} & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

注意 次の問題の解答に向けて，上の議論を少し一般化しておこう． α を複素数として，上の A を

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

に一般化する．これは固有値 α の 4 次ジョルダン細胞 (8.1 節参照) である．設問 (1) の「等式」の一般化として，正整数 k に対して

$$A^k = \begin{bmatrix} \alpha^k & k\alpha^{k-1} & \binom{k}{2}\alpha^{k-2} & \binom{k}{3}\alpha^{k-3} \\ 0 & \alpha^k & k\alpha^{k-1} & \binom{k}{2}\alpha^{k-2} \\ 0 & 0 & \alpha^k & k\alpha^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^k \end{bmatrix} \quad (\clubsuit)$$

が成り立つことが示せる．明らかにこれは， α^k を (重複度を除き) 唯一の固有値としてもつ． $\mathbf{v}_4 = \mathbf{e}_4$, $\mathbf{v}_3 = (A^k - \alpha^k E)\mathbf{v}_4$, $\mathbf{v}_2 = (A^k - \alpha^k E)\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_1 = (A^k - \alpha^k E)\mathbf{v}_2$ とおく

と、これらは

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} (k\alpha^{k-1})^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} * \\ (k\alpha^{k-1})^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} * \\ * \\ k\alpha^{k-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ 1 \end{bmatrix}$$

の形をしていることが確かめられる. $\alpha \neq 0$ と仮定する. すると $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$. これより, A^k の固有値 α^k に属す広義固有空間 $W_{\alpha^k} (= \mathbb{C}^4)$ の図形が



であって, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ がこの図形に適合した $W_{\alpha^k} (= \mathbb{C}^4)$ の基底である (下図参照).

$$\begin{array}{l} A^k - \alpha^k E \left(\begin{array}{|c|} \hline \mathbf{v}_4 \\ \hline \end{array} \right) \\ A^k - \alpha^k E \left(\begin{array}{|c|} \hline \mathbf{v}_3 \\ \hline \end{array} \right) \\ A^k - \alpha^k E \left(\begin{array}{|c|} \hline \mathbf{v}_2 \\ \hline \end{array} \right) \\ A^k - \alpha^k E \left(\begin{array}{|c|} \hline \mathbf{v}_1 \\ \hline \end{array} \right) \end{array}$$

従って, この基底を並べて得られる正則行列

$$P = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3 \ \mathbf{v}_4]$$

を以て

$$P^{-1}A^kP = \begin{bmatrix} \alpha^k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^k \end{bmatrix}$$

が成り立つ.

演習 3 A を n 次複素正方行列, k を正整数とする. 正則行列 P に対し $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$ ゆえ, A^k と $(P^{-1}AP)^k$ は相似である. 本問に答えるのに A を (正則な) ジョルダン標準形行列としてよい. 問 8.3 の結果より, $P^{-1}AP$ がジョルダン標準形行列の場合に, A をこれに替えてよいからである.

さて

$$A = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$$

をジョルダン標準形行列とし, J_1, J_2, \dots, J_s をジョルダン細胞とする.

$$A^k = \begin{bmatrix} J_1^k & & & \\ & J_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s^k \end{bmatrix}$$

であって, $P_i^{-1} J_i^k P_i$ がジョルダン標準形行列であるとき, 正則行列

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_s \end{bmatrix}$$

を以て $P^{-1} A^k P$ が A^k のジョルダン標準形となるから, A を J_i に替えることで, 初めから A がジョルダン細胞

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & & \\ & \alpha & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \alpha \end{bmatrix}$$

としてよい. これが正則行列であると仮定する. これは $\alpha \neq 0$ を意味する. このとき示すべきは, A^k のジョルダン標準形が

$$\begin{bmatrix} \alpha^k & 1 & & & \\ & \alpha^k & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \alpha^k \end{bmatrix}$$

であるということ. A の次数 $n = 4$ の場合, これは上の注意から従う. n が一般の場合も同様に, ただし (♣) の一般化

$$A^k = \begin{bmatrix} \alpha^k & \binom{k}{1} \alpha^{k-1} & \binom{k}{2} \alpha^{k-2} & \cdots & \binom{k}{n-1} \alpha^{k-n+1} \\ & \alpha^k & \binom{k}{1} \alpha^{k-1} & \cdots & \binom{k}{n-2} \alpha^{k-n+2} \\ & & \alpha^k & & \vdots \\ & & & \ddots & \binom{k}{1} \alpha^{k-1} \\ & & & & \alpha^k \end{bmatrix} \quad (\diamond)$$

を用いて示すことができる.

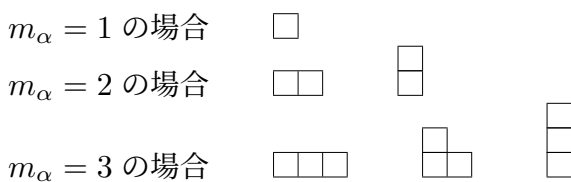
演習 4 A, B を n 次複素正方行列とする. 問 8.3 の結果から, 次の (i), (i') が同値で, ジョルダン標準形の求め方から, これらはさらに (i'') と同値になる.

- (i) A と B は互いに相似である;
- (i') A と B のジョルダン標準形が (ジョルダン細胞の並び順を除いて) 一致する;
- (i'') (a) A と B の固有値が ((b) のもと必然的に重複度を込めて) 一致し, かつ (b) 各固有値に関して広義固有空間の図形が一致する.

最小多項式の定義から次の (ii), (ii') は同値で, 明らかに (i'') \Rightarrow (ii') ゆえ, (i) \Rightarrow (ii) が従う.

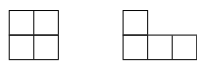
- (ii) A と B の固有多項式, 最小多項式がいずれも一致する;
- (ii') (a) A と B の固有値が重複度を込めて一致し, かつ (b) 各固有値に関して広義固有空間の図形の高さが一致する.

$n = 2$ または 3 の場合, 固有値 α の重複度 m_α はせいぜい 3 であり, 広義固有空間 W_α の図形は



のいずれかとなる ($n = 2$ の場合 $m_\alpha = 3$ は起こりえない). 重複度ごとにこれらの図形は高さのみから決まるから, $n = 2$ または 3 の場合, (i) \Leftarrow (ii) も成り立つ.

$n \geq 4, m_\alpha = 4$ の場合, W_α の図形は



のように同じ高さであっても異なり得る. これに応じ, 例えば

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \alpha & & \\ & & \alpha & 1 \\ & & & \alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \alpha & & \\ & & \alpha & \\ & & & \alpha \end{bmatrix}$$

はともに $(x - \alpha)^4$ を固有多項式, $(x - \alpha)^2$ を最小多項式としてもつが, 相似ではない.

第9章 抽象ベクトル空間

問 9.13 (1) 定義 9.6 を見ればわかるように, $W \subset U (\subset V)$ ゆえ, W が U の部分空間であるために要請される条件は, W が V の部分空間であるために要請される条件と一致する. いま後者が満たされるから前者も満たされる.

(2) 問 2.38 (1) の解答にある証明と本質的に同じ. いまの一般的状況に合うようわずかに書き換えればよい.

(3) (b) \Rightarrow (a): 例題 2.39 の解答にある (b) \Rightarrow (a) の証明と本質的に同じ. いまの一般的状況に合うようわずかに書き換えればよい.

(a) \Rightarrow (b): (a) を仮定する. (b) を導くのに, $W \cap U$ に属す元 v が零元に限ることを示せばよい. この v は, (i) W の元 v と U の元 0 の和として, 他方 (ii) W の元 0 と U の元 v との和として表される. すなわち

$$(v =) v + 0 = 0 + v.$$

(a) より $v = 0$ (かつ $0 = v$) が従う.

問 9.23 問 3.13 の解答の後半にある証明と本質的に同じ. いまの一般的状況に合うようわずかに書き換えればよい.

問 9.37 V/W に対する (A1)–(A4), (S1)–(S4) を示すには, V に対するそれらに現れる等式の両辺に $[\]$ をかぶせればよい. 例えば, V に対する (A1) により

$$(u + v) + w = u + (v + w).$$

両辺に $[\]$ をかぶせて, V/W における等式

$$[(u + v) + w] = [u + (v + w)]$$

を得る. V/W における加法の定義から

$$\text{左辺} = [u + v] + [w] = ([u] + [v]) + [w],$$

$$\text{右辺} = [u] + [v + w] = [u] + ([v] + [w]).$$

これらが等しいことから, V/W に対する (A1) が従う. 同様にして V/W に対する (A2), (S1)–(S4) を示すことができる. また, V に対する (A3) により

$$v + 0 = v.$$

両辺に $[]$ をかぶせ、 V/W の加法の定義を用い、 V/W における等式

$$[v] + [0] = [v]$$

を得る。これは $[0]$ が V/W の零元であることを示している。同様にして、 V に対する (A4) を用い、 V/W において $[-v]$ が $[v]$ の加法逆元であることを示すことができる。

問 9.41 後半 (同値性 “ f 単射 $\Leftrightarrow \tilde{f} = \{0\}$ ” の証明) : 例題 3.12 (3) の解答中 (a) \Leftrightarrow (c) の証明と本質的に同じ。いまの一般的状況に合うようわずかに書き換えればよい。

前半 (定理 9.39 の証明) : まず写像 \tilde{f} が well-defined であることを確かめるため、 $V/\text{Ker } f$ において $[v] = [v']$ とする。これは、ある $w \in \text{Ker } f$ に対し $v = v' + w$ が成り立つことを意味する (例題 9.34(1))。 $f(w) = 0$ ゆえ

$$f(v) = f(v' + w) = f(v') + f(w) = f(v').$$

これは目的の well-definedness を示している。

次に \tilde{f} が線形性が

$$\begin{aligned} \tilde{f}(c_1[v_1] + c_2[v_2]) &= \tilde{f}([c_1v_1 + c_2v_2]) \\ &= f(c_1v_1 + c_2v_2) \\ &= c_1f(v_1) + c_2f(v_2) \\ &= c_1\tilde{f}([v_1]) + c_2\tilde{f}([v_2]) \end{aligned}$$

というように、 f の線形性 (第 3 の等号) から従う。

また

$$\begin{aligned} \text{Im } \tilde{f} &= \{ \tilde{f}([v]) \mid v \in V \} \\ &= \{ f(v) \mid v \in V \} \\ &= \text{Im } f \end{aligned}$$

より \tilde{f} は全射である。最後に \tilde{f} が単射であるのを見る。そのためには、後半の結果から、 $[v] \in \text{Ker } \tilde{f}$ とするとき、 $[v]$ が $V/\text{Ker } f$ の零元であること、すなわち $v \in \text{Ker } f$ (例題 9.34(2)) を示せばよい。これは、 $[v] \in \text{Ker } \tilde{f}$ が $(\tilde{f}([v]) =) f(v) = 0$ を意味することから従う。

問 9.42 $\text{Im } f = \{ [v] (= f(v)) \mid v \in V \} = V/W$ より $f : V \rightarrow V/W$ は全射。 V/W における加法、スカラー乗法の定義により $c_1[v_1] + c_2[v_2] = [c_1v_1 + c_2v_2]$ 。これを f を用いて書き換え

$$c_1f(v_1) + c_2f(v_2) = f(c_1v_1 + c_2v_2).$$

これは f が線形であることを示している。また例題 9.34(1) の結果から

$$\text{Ker } f = \{v \in V \mid [v] = [0]\} = W.$$

定理 9.39 が与える \tilde{f} は

$$\tilde{f}: V/W = V/\text{Ker } f \rightarrow V/W, [v] \mapsto f(v) = [v]$$

であって、これは確かに V/W の恒等変換である。

問 9.48 命題 9.46 により、 $\text{Ker } f$ および商空間 $V/\text{Ker } f$ は有限生成であって

$$\dim(V/\text{Ker } f) = \dim V - \dim(\text{Ker } f).$$

一般に、同型写像は基底（または生成系）を基底（または生成系）に写し、従って次元を保つ。これを定理 3.39 が与える同型写像 $\tilde{f}: V/\text{Ker } f \rightarrow \text{Im } f$ に適用すれば、 $\text{Im } f$ は有限生成であって、上の等式の左辺が、従って右辺も、 $\dim(\text{Im } f)$ に一致する。

問 9.53 (a) を仮定する。 $\mathbf{x} = {}^t[x_1, x_2, \dots, x_n]$, $\mathbf{y} = {}^t[y_1, y_2, \dots, y_n]$ とすると

$$\begin{aligned} (\phi_{(v_i)}(\mathbf{x}), \phi_{(v_i)}(\mathbf{y})) &= \left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \bar{y}_j (v_i, v_j) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i = (\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

第 3 の等号に (a) を用いた。

第 9 章 演習問題

演習 1 写像に名前を付けて

$$\Phi: M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \text{End}(V), \quad \Phi(A) = \phi_{(v_i)} \circ L_A \circ \phi_{(v_i)}^{-1},$$

$$\Psi: \text{End}(V) \rightarrow M_n(\mathbb{K}), \quad \Psi(f) = ((v_i) \text{ に関する } f \text{ の表現行列})$$

とする。「表現行列」の定義（定義 9.30）から

$$\Psi(f) = \left(f = \phi_{(v_i)} \circ L_A \circ \phi_{(v_i)}^{-1} \text{ を満たす正方行列（がただ 1 つ存在する。その） } A \right).$$

これより容易に

$$\Psi(\Phi(A)) = A \quad (A \in M_n(\mathbb{K})), \quad \Phi(\Psi(f)) = f \quad (f \in \text{End}(V))$$

が見て取れ、従って

$$\Psi \circ \Phi = \text{Id}, \quad \Phi \circ \Psi = \text{Id}.$$

あとは、 Φ が線形写像であることを示せばよい。End(V) において (写像の合成を積と見て) 分配法則が成り立つ ($(f \circ (g + h))(v) = f(g(v) + h(v)) = f(g(v)) + f(h(v)) = ((f \circ g) + (f \circ h))(v)$ 等による) から

$$\begin{aligned} \Phi(A + B) &= \phi_{(v_i)} \circ L_{A+B} \circ \phi_{(v_i)}^{-1} \\ &= \phi_{(v_i)} \circ (L_A + L_B) \circ \phi_{(v_i)}^{-1} \\ &= \phi_{(v_i)} \circ L_A \circ \phi_{(v_i)}^{-1} + \phi_{(v_i)} \circ L_B \circ \phi_{(v_i)}^{-1} \\ &= \Phi(A) + \Phi(B). \end{aligned}$$

また、 V のスカラー乗法がどんな線形変換とも交換可能である ($(f \circ (c \text{ 倍}))(v) = f(cv) = cf(v) = ((c \text{ 倍}) \circ f)(v)$ による) ことから

$$\begin{aligned} \Phi(cA) &= \phi_{(v_i)} \circ L_{cA} \circ \phi_{(v_i)}^{-1} \\ &= \phi_{(v_i)} \circ (c \text{ 倍}) \circ L_A \circ \phi_{(v_i)}^{-1} \\ &= (c \text{ 倍}) \circ \phi_{(v_i)} \circ L_A \circ \phi_{(v_i)}^{-1} \\ &= c\Phi(A). \end{aligned}$$

演習 2 (1) $p(x), q(x) \in V, c \in \mathbb{R}$ とする. $\frac{dp}{dx}(x)$ は 1 次以下の多項式で, それに $(x+1)$ を乗じた $f(p(x))$ は 2 次以下であるから, f は確かに V の変換である. さて, 微分作用素 $\frac{d}{dx}$ の線形性により

$$\frac{d(p+q)}{dx}(x) = \frac{dp}{dx}(x) + \frac{dq}{dx}(x), \quad \frac{d(cp)}{dx}(x) = c \frac{dp}{dx}(x).$$

これらの等式の両辺に $(x+1)$ を乗じ, 多項式の分配法則と交換法則を用いて

$$f(p(x) + q(x)) = f(p(x)) + f(q(x)), \quad f(cp(x)) = cf(p(x)).$$

(2) $1, x+1, (x+1)^2$ が V の基底であることは容易にわかる. 簡単な計算により

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f(1) & f(x+1) & f((x+1)^2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & x+1 & 2(x+1)^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x+1 & (x+1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

これより最後の2次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

が上の基底に関する表現行列である.

(3) 上の注意により, $\text{End}(V)$ は結合的代数として $M_3(\mathbb{R})$ と (写像の合成を行列の積に置き換えて) 同一視できるから,

$$M' = \{ X \in M_3(\mathbb{R}) \mid AX = XA \}$$

が $M_3(\mathbb{R})$ の部分空間であることを示し, この M' の次元を求めればよい.

まず上の A に限らず, どんな行列 A に対しても M' は $M_3(\mathbb{R})$ の部分空間である. 実際, 明らかに零行列 $O \in M'$. また $X, Y \in M'$, $c \in \mathbb{R}$ とするとき,

$$A(X + Y) = AX + AY = XA + YA = (X + Y)A,$$

$$A(cX) = c(AX) = c(XA) = (cX)A$$

より $X + Y \in M'$, $cX \in M'$ が成り立つからである.

次に M' が何か, 具体的に知るべく, $X \in M_3(\mathbb{R})$ を

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

と表し, これが M' に属す, すなわち $AX = XA$ を満たすための条件を求める. この等式は計算により

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 2x_{31} & 2x_{32} & 2x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x_{12} & 2x_{13} \\ 0 & x_{22} & 2x_{23} \\ 0 & x_{32} & 2x_{33} \end{bmatrix}$$

となり, これは X の対角成分を除くすべての成分が0, と同値になる. よって

$$M' = \{ 3 \text{ 次実対角行列} \}.$$

これは $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ を基底にもち3次元ゆえ, $\dim M = 3$.

演習 3 \hat{f} が well-defined な線形写像であることの証明は, 定理 3.39 (同型定理) の証明 (問 3.40 の解答) において, \tilde{f} が同じ性質の写像であることを示すのと同様である.

残りに答える前に**一般的注意**：一般に， V をベクトル空間， W, U をその部分空間とする．容易に確かめられるように，商空間 V/W において， U の元 u を以て $[u]$ で与えられる元全体から成る部分集合（これを $[U]$ で表す），すなわち

$$[U] = \{ [u] \mid u \in U \} \quad (\dagger)$$

は V/W の部分空間である．(i) $U \supset W$ の場合，商空間 U/W が定義でき，その定義から $U/W = [U]$ が見て取れる*¹．(ii) 一般の場合． $u \in U, w \in W$ に対し $[u+w] = [u]$ (V/W において) ゆえ $[U+W] = [U]$ ．また $U+W \supset W$ ゆえ，(i) の場合の結果を $U+W$ に適用し

$$[U] = [U+W] = (U+W)/W \quad (\dagger\dagger)$$

を得る．

さて本問の残り，

$$\begin{aligned} \text{Ker } \widehat{f} &= \{ [v] \mid (f(v) =) \widehat{f}([v]) = 0 \} \\ &= \{ [v] \mid v \in \text{Ker } f \} \quad (\text{Ker } f \supset W \text{ ゆえ } (\dagger) \text{ より}) \\ &= \text{Ker } f/W. \\ \text{Im } \widehat{f} &= \{ \widehat{f}([v]) (= f(v)) \mid v \in V \} \\ &= \text{Im } f. \end{aligned}$$

演習 4 3章末演習問題 3 の解答の状況にあるとし， $f = L_A$ とする．非負整数 i に対し， $f^i = L_{A^i}$ ，また

$$r_i = \text{rank}(A^i) = \dim(\text{Im}(f^i)) \quad (*)$$

が成り立つ． $f(\text{Im}(f^i)) = \text{Im}(f^{i+1})$ ゆえ， $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ の定義域を $\text{Im}(f^i)$ に制限すると，線形全射

$$f|_{\text{Im}(f^i)} : \text{Im}(f^i) \rightarrow \text{Im}(f^{i+1})$$

が得られる．これと標準全射 $\text{Im}(f^{i+1}) \rightarrow \text{Im}(f^{i+1})/\text{Im}(f^{i+2})$ との合成

$$\text{Im}(f^i) \rightarrow \text{Im}(f^{i+1})/\text{Im}(f^{i+2})$$

もまた線形全射である（一般に，2つの（線形）全射の合成はまた（線形）全射である）． $\text{Im}(f^i)$ の部分空間 $\text{Im}(f^{i+1})$ はこの線形全射で消滅する，すなわちこの線形全射の核に含

*¹ 元 $u \in U$ に対し， U/W の元としての $[u]$ ($= (U$ の部分集合としての $u+W$)) と V/W の元としての $[u]$ ($= (V$ の部分集合としての $u+W$)) は異なるから，厳密には次のようになる． U/W の元としての $[u]$ に V/W の元としての $[u]$ を対応させる $U/W \rightarrow V/W$ が線形単射であって，その像が (\dagger) の $[U]$ に一致する．従って同型写像 $U/W \rightarrow [U]$ が得られる．これを通して U/W と $[U]$ とを同一視する．

まれる $(f|_{\text{Im}(f^i)})$ による $\text{Im}(f^{i+1})$ の像が $\text{Im}(f^{i+2})$ で、これが標準全射で消滅するから).
前問の結果から、線形写像

$$\text{Im}(f^i)/\text{Im}(f^{i+1}) \rightarrow \text{Im}(f^{i+1})/\text{Im}(f^{i+2})$$

が引き起こされ、(その像は前のと変わらないという結果から) これも全射である. 従って問 9.48 の結果 (次元定理) から

$$\dim(\text{Im}(f^i)/\text{Im}(f^{i+1})) \geq \dim(\text{Im}(f^{i+1})/\text{Im}(f^{i+2})).$$

命題 9.46 と (*) から、目的の

$$r_i - r_{i+1} \geq r_{i+1} - r_{i+2}$$

が従う.

演習 5 (1) f の核を求めると

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{v \in V \mid (f(v) =) [g(v)] = 0 \text{ in } X/Y\} \\ &= \{v \in V \mid g(v) \in Y\} \\ &= g^{-1}(Y). \end{aligned}$$

とくに $g^{-1}(Y)$ は V の部分空間である (一般に、線形写像の核は定義域のベクトル空間の部分空間だから). 次に f の像を求めると

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= \{[g(v)] \mid v \in V\} \\ &= \{v \in V \mid g(v) \in Y\} \\ &= [\text{Im } g] \text{ (} X/Y \text{ における)} \\ &= (\text{Im } g + Y)/Y. \end{aligned}$$

ここで演習 3 の解答中の一般的注意にある記法 $[\text{Im } g]$ と (†) を用いた. 同型定理から同型写像 \tilde{f} が得られる.

(2) (1) の状況において V, X がともに有限生成とする. 同型写像 \tilde{f} によってベクトル空間の次元が保たれるから

$$\dim(V/g^{-1}(Y)) = \dim((\text{Im } g + Y)/Y).$$

命題 9.46 より

$$\dim V - \dim(g^{-1}(Y)) = \dim(\text{Im } g + Y) - \dim Y \geq \dim(\text{Im } g) - \dim Y.$$

この (2) で考える特別な状況において

$$\begin{aligned}g^{-1}(Y) &= \{ \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \mid L_B(\mathbf{v}) \in \text{Ker}(L_A) \} \\ &= \{ \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \mid L_A(L_B(\mathbf{v})) = 0 \} \\ &= \text{Ker}(L_{AB})\end{aligned}$$

ゆえ、 $\dim(g^{-1}(Y)) = n - \text{rank}(AB)$ を得る. $\dim V = n$, $\dim(\text{Im } g) = \text{rank } B$, $\dim Y = n - \text{rank } A$ と合わせ、上の不等式から

$$n - (n - \text{rank}(AB)) \geq \text{rank } B - (n - \text{rank } A).$$

これより直ちに示すべき不等式を得る.

注意 (2) に答えるのに、3 章末演習問題 5 (3) の、先に与えた解法にとらわれなければ、次のようにもできる (この方が易しい).

$L_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ の定義域を $\text{Im}(L_B)$ に制限した線形写像

$$L_A|_{\text{Im}(L_B)} : \text{Im}(L_B) \rightarrow \mathbb{K}^n$$

は、 $\text{Ker}(L_A) \cap \text{Im}(L_B)$ を核に、 $\text{Im}(L_{AB})$ を像にもつから、同型定理 (定理 9.39) により、同型写像

$$\text{Im}(L_B)/(\text{Ker}(L_A) \cap \text{Im}(L_B)) \rightarrow \text{Im}(L_{AB})$$

が得られる. これの定義域と値域の次元は相等しい.

$$\begin{aligned}\text{定義域の次元} &= \dim(\text{Im}(L_B)) - \dim(\text{Ker}(L_A) \cap \text{Im}(L_B)) \\ &\geq \dim(\text{Im}(L_B)) - \dim(\text{Ker}(L_A)) \\ &= \text{rank } B - (n - \text{rank } A) = \text{rank } A + \text{rank } B - n, \\ \text{値域の次元} &= \dim(\text{Im}(L_{AB})) \\ &= \text{rank}(AB)\end{aligned}$$

ゆえ、示すべき不等式が従う.

Revision history

- 2021.12.25 The original version
- 2022.02.08 問 3.13 の前半の解答を書き換えた. 4 章末演習問題 2 に与えられた事実の証明を, 同問題の解答に注意として加えた.
- 2022.03.02 問 2.42 の解答, 最後の部分の誤り $c + 1 = 0, c = -1$ を, $c + 1 \neq 0, c \neq -1$ に修正. 江上研介氏のご指摘による.
- 2022.07.11 問 3.13 の解答 最初の行, $\dim \mathbb{R}^m$ を $\dim \mathbb{K}^m$ に修正.
- 2022.08.08 p.36 最下の行列 P の 2 行上, (3) 上と同様に... を (5) 上と同様に... に修正.
問 8.12 と問 8.17 の解答が入れ替わっていたのを修正.
- 2024.07.25 問 7.18 (2) の解答 $|\tilde{A}| = -21$ を $|\tilde{A}| = -9$ に修正. 応じて, 問題の 2 次曲面の標準形を与える 4 次実対称行列の (3, 4), (4, 3) 成分の $\sqrt{7}$ を $\sqrt{3}$ に修正. 標準形 $X^2 + 2Y^2 + 2\sqrt{7}Z = 0$ を $X^2 + 2Y^2 + 2\sqrt{3}Z = 0$ に修正.
9 章末演習問題 2 (2), (3) の解答を書き直した.
9 章末演習問題 5 の解答のあとに注意を追記.