

# サイエンス社「レクチャー 力学」

章末問題の解答例

半田利弘

2024年5月18日版

## 章末問題の解答例：第1章「力学の基礎概念」

### [問題 1]

全てを挙げることはほぼ不可能なほど答は多数ある。例えば、以下の項目が挙げられる。

- 物体に及ぶ空気抵抗は無視できるほど小さい
- 風の影響は無視できるほど小さい
- 斜面は表面にでこぼこがなく、傾斜は一定である
- 物体に加わる重力加速度は一定である
- 月や太陽など地球以外の天体の重力は無視できるほど小さい
- 斜面の状態には変化がなく、場所によって動摩擦係数は一定である
- 動摩擦係数は変化しない（摩擦熱による温度上昇で変わる可能性がある）
- 実験する斜面の大きさは地球の大きさに比べて十分に小さく、地面が平面としてよい
- 実験する斜面も物体も十分に大きく、それらの分子・原子による構造は影響しない
- 物体が摩擦によって減るために、その質量が減少する効果は無視できる

他にもいくつもあると考えられる。

近似しない厳密な答を求めてから、それと答の近似結果とを比べることで近似してよいかの判断をするのだと思うかも知れない。しかし、それは現実的ではない。なぜなら厳密な答を求めることが実際には不可能な場合が多いからだ。厳密な答を求める以前に、どのような近似やモデル化をしてよいかを的確に見抜けることが“物理学的に考える”場合に最も重要な能力であり、物理学のセンスの1つといえる。

### [問題 2]

正解はない。ここでは一例を与え、出題者がすぐに思いつくモデル化および近似のみを示す。他の例や要因についても考えてみよ。

スキーで斜面を直滑降で滑り落ちる場合が対応する。これと比べると、以下の点などがモデル化および近似されている。

- スキーヤー全体を質点と考えている。
- 斜面である雪面が完全に平面で傾きが一定であると考えている。

- 斜面の長さが十分に長いと考えている。
- 斜面との摩擦係数が一定であると考えている。
- 斜面とスキー板との動摩擦以外の摩擦を考えていない。
- 重力加速度が一定であると考えている。

**[問題 3]**

1 ガロン=4 クォート, 1 クォート=2 パイントなので, 樽の容積は  $3 \times 4 \times 2 = 24$  パイントである。したがって, 求める質量は  $1.25 \times 24 = 30$  ポンドである。英国での単位では 1 ポンド=454g なので, この質量は 1.36kg である。

なお, 1 パイントは 568mL なので, この樽は  $568\text{mL} \times 24 = 13632\text{mL}$ , すなわち, 13.6L 入りである。

**[問題 4]**

1L=1000cm<sup>3</sup> なので, このタンクの容積は 13600cm<sup>3</sup> である。したがって, 求める質量は  $1\text{g cm}^{-3} \times 13600\text{cm}^3 = 13600\text{g}$ , すなわち, 13.6kg である。また, これをポンドに換算すると  $\frac{13.6 \times 1000}{454} = 30$  ポンドとなる。

前問の計算と比べて計算のたやすさや単位換算の際に必要な数値の多寡に関してどのように感じただろうか。

**[問題 5]**

この系を特徴づける物理量は  $k$  と  $m$  と  $x_0$  のみである。

まずはバネ定数  $k$  の物理次元を求めよう。伸び  $x$  に対する復元力を  $f$  とすると, フックの法則から  $f = -kx$  である。力の物理次元は, (例えば) ニュートンの運動方程式  $f = m \frac{d^2x}{dt^2}$  から,  $[f] = \text{M L T}^{-2}$  である。したがって, バネ定数  $k$  の物理次元は,  $[k] = \text{M T}^{-2}$  である。

一方, 初期の伸び  $x_0$  の物理次元は  $[x_0] = \text{L}$  であり, おもりの質量  $m$  の物理次元は  $[m] = \text{M}$  である。また, 周期  $T$  の物理次元は  $[T] = \text{T}$  である。

これらから, 振動の周期  $T$  が  $T \propto k^\alpha x_0^\beta m^\gamma$  だったとすると,

$$[T] = [k^\alpha x_0^\beta m^\gamma] = \text{M}^\alpha \text{T}^{-2\alpha} \text{L}^\beta \text{M}^\gamma = \text{M}^{\alpha+\gamma} \text{L}^\beta \text{T}^{-2\alpha}$$

であり, これが周期  $T$  の物理次元  $[T] = \text{T}$  でなければならない。

したがって,

$$\alpha + \gamma = 0, \quad \beta = 0, \quad -2\alpha = 1$$

4

であり、これを解くと、

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = 0, \gamma = \frac{1}{2}$$

となる。ここから、周期  $T$  は

$$T \propto k^{-\frac{1}{2}} x_0^0 m^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

でなければならないことがわかる。

### [問題 6]

(1)  $\ddot{x} = a$  なので両辺を  $t$  で積分すると、

$$v = \dot{x} = \int_0^t \ddot{x} dt = a \int_0^t dt = at + v_0$$

となる。ここで、積分定数は  $t = 0$  で  $\dot{x} = v_0$  を考慮して決めた。

これをさらに時間で積分すると、

$$x = \int_0^t \dot{x} dt = \int_0^t (at + v_0) dt = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

となる。ここで、積分定数は  $t = 0$  で  $x = x_0$  を考慮して決めた。

(2)  $v$  と  $t$  との関係から

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

となる。これを代入すると

$$x - x_0 = \frac{1}{2}a \left( \frac{v - v_0}{a} \right)^2 + v_0 \left( \frac{v - v_0}{a} \right)$$

となり、整理すると

$$2a(x - x_0) = (v - v_0)^2 + 2v_0(v - v_0)$$

すなわち

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

こららはいずれも高校物理で習った公式と一致する。つまり、高校物理での“公式”のいくつかは、微分積分の関係を理解していれば本来、暗記する必要などなく、さらに、加速度が一定の場合にだけ成り立つ式だったのだ。

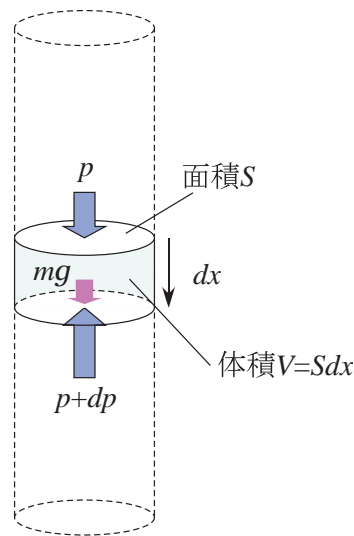


図 1: 水柱内の水圧

[問題 7]

水の状態は水平方向には一様だと考えられるので、断面積  $S$  の柱で考えよう。深さ  $x$  から  $x + \Delta x$  の板状の部分に対する力の釣合を考える。圧力自体は深さだけの関数でどの向きにも同じに働く。つまり、面に垂直向きの力だけを考えればよい。

この板状の部分に加わる鉛直方向の力は以下の3つのみである。

- 下面に加わる圧力による力  $f_{\text{up}} = (p + \Delta p)S$  で上向き。
- 上面に加わる圧力による力  $f_{\text{down}} = pS$  で下向き。
- この部分の体積  $V = S \Delta x$ ，その質量  $m = \rho V = \rho S \Delta x$  なので  $\Delta x$  に加わる重力は  $f_{\text{grav}} = mg = \rho g S \Delta x$  で下向き。

板状の部分は動かないので、力の釣合から  $f_{\text{up}} = f_{\text{down}} + f_{\text{grav}}$  であり、これに求めた力の大きさを代入すると

$$(p + \Delta p)S = pS + \rho g S \Delta x$$

が得られる。これを整理すると

$$\Delta p = \rho g \Delta x$$

となる。両辺を  $\Delta x$  で割って 0 への極限をとる。  $\Delta x \rightarrow 0$  のときには  $\Delta p \rightarrow 0$  が予想されるので、両者の比の極限值は有限値となることが期待できる。  $\rho$  と  $g$  は  $x$  に関して定数であることも考えると、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta x} = \rho g$$

となり、微分記号を用いれば、

$$\frac{dp}{dx} = \rho g$$

が得られる。この両辺を積分すると、

$$\int \frac{dp}{dx} dx = \int \rho g dx$$

となる。左辺は置換積分ができて、

$$\int dp = \int \rho g dx$$

となる。これを解くと、以下の式が得られる。

$$p - p_0 = \rho g x$$

ここで、 $p_0$  は  $x = 0$  での圧力。

よって、水深に比例して水圧が増え、その表式は与えられた初期条件も加味して

$$p = \rho g x + p_0$$

となる。

この答は「深さに比例して圧力が増す」ことを示しており、その比例係数は  $\rho g$  である。海水の典型的な密度を  $\rho = 1.03 \text{ g cm}^{-3}$ 、重力加速度を  $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$  とすると、単位も換算して、 $\rho g = 1.03 \times 10^{-3} (10^{-2})^{-3} \times 9.8 \text{ Pa m}^{-1} = 1.01 \times 10^4 \text{ Pa m}^{-1}$  が得られる。1 気圧は  $1013 \text{ hPa} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} \simeq 0.1 \text{ 気圧}$  なので、この比例係数は「10m ごとに 1 気圧」となり、実測値と一致する。

### [問題 8]

大気柱の断面積を  $S$  とし、上向きの力を正とする。この時、高さ  $x$  での圧力を  $p = p(x)$ 、高さ  $x + \Delta x$  での圧力を  $p(x + \Delta x)$  とする。すると、高さ  $x$  と  $x + \Delta x$  の間にある空気に加わる力は、次の 3 つである。

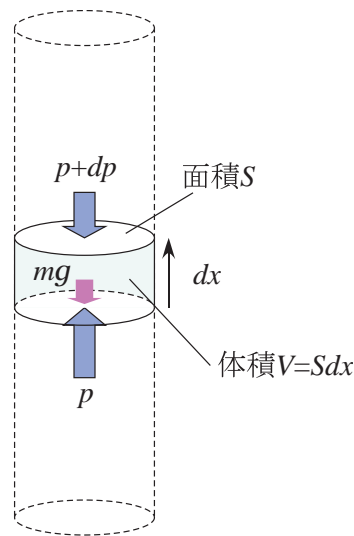


図 2: 断面積  $S$  の気柱に及ぶ鉛直方向の力の釣合

- 高さ  $x$  の底面に加わる気圧は上方向に  $p$ . したがって, その力は  $pS$ .
- 高さ  $x + \Delta x$  で上面に加わる気圧は下方向に  $p(x + \Delta x) = p(x) + \Delta p$ . したがって, その力は  $-(p + \Delta p)S$ . ここで, 気圧は  $x$  が増えると減少するはずなので,  $\Delta p < 0$  であるが,  $\Delta p = p(x + \Delta x) - p(x)$  が定義なので, 符号を逆にはいけない.
- この空気の体積は  $S \Delta x$  なので, 質量は  $\rho S \Delta x$  であるから, 重力は下向きで,  $-\rho g S \Delta x$ .

以上から, 全体の力の釣合を考えると,

$$pS - (p + \Delta p)S - \rho g S \Delta x = 0$$

となる. ここで, 極限を取り微分方程式を積分して解くことまで考えて,  $\Delta$  を  $d$  で置き換える記法を採用すれば, 微分方程式は

$$dp = -\rho g dx$$

となる.

次に, 大気は理想気体の状態方程式に従うとすれば,

$$pV = nRT$$

が成り立つ。ここで、 $n$ は体積 $V$ に含まれる気体分子のモル数、 $R$ は気体定数。したがって、その質量 $m$ は、平均分子量(1モル当たりの質量)を $\mu$ とすると、

$$m = n\mu = \mu \frac{pV}{RT}$$

である。ここで状態方程式を用いた。また、

$$V = S dx$$

なので、大気の密度 $\rho$ は

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu p V}{RT V} = \frac{\mu}{RT} p$$

となる。

これを $dx$ と $dp$ の関係を表す先ほどの微分方程式に代入すると

$$dp = -\frac{\mu}{RT} p g dx$$

が得られる。これを変数分離すると、

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dx$$

となる。温度 $T$ 、重力加速度 $g$ は一定としてよいことになっていたため、両辺の積分結果は簡単に得られ、

$$\ln p - \ln p_0 = -\frac{\mu g}{RT} x$$

である。ここで、初期条件 $x = 0$ で $p = p_0$ を用いた。

よって、

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu g}{RT} x}$$

となり、気圧 $p$ は高さ $x$ に対して、スケール長 $\frac{RT}{\mu g}$ で指数関数的に減少することがわかる。

$g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ 、 $T = 240 \text{ K}$ 、 $\mu = 28.8 \text{ g mol}^{-1} = 2.88 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$ を代入すると、 $R = 8.31 \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-1} \text{ K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ なので、スケール長は $\frac{RT}{\mu g} = 7.07 \times 10^3 \text{ m} = 7.07 \text{ km}$ となる。



地球大気圧の高度分布のグラフを探してみると（例えば、兵庫大学地球科学講座の講義資料 [https://www.sci.u-hyogo.ac.jp/life/earth/geology\\_old/lecture.files/res2a.html](https://www.sci.u-hyogo.ac.jp/life/earth/geology_old/lecture.files/res2a.html) を参照），縦軸が高度，横軸が気圧（対数目盛）のものが見つかるだろう．そこに示された気圧分布は，ほぼ直線で，高度が上がるほど下がるグラフになっている．これは気圧が高度に対して指数関数的に減少していることを表し，我々が用いたモデルが概ね正しいことを示している．さらに，グラフの傾きは高度が約 16km 上がるごとに気圧は 1/10 になることを示している．ここで， $\log e = 0.434$ ，すなわち， $e = 10^{0.434}$  なので，この値は高度が約  $16 \text{ km} \times 0.434 = 6.9 \text{ km}$  上昇するごとに気圧が  $e^{-1} = 0.368$  ずつ減少すること，すなわち，スケール長が 6.9km であることを意味し，この値もほぼ一致する．

地球大気温の高度分布のグラフ（例えば，上記の兵庫大学の資料）を見ると，地表から高度 10km 程度までは気温は 270K から 210K 程度まで減少するが，そこから 50km 程度までは上昇に転じ，さらに上空 120km まではおよそ 190K から 300K 程度の範囲に収まっている．したがって，250K と比べると 25% 程度の違いに収まっており，温度一定の仮定で得た結果でも，それほど著しい食い違いを生じないのである．

## 章末問題の解答例:第2章「運動方程式とその解き方」

### [問題 1]

(1)  $f(x) = \sin x$  と置くと,  $f(0) = 0$ . また,  $f'(x) = \cos x$  なので,  $f'(0) = 1$ .  
よって, テイラー展開による1次近似は  $\sin x \approx x$ .

(2)  $f(x) = e^x$  と置くと,  $f(0) = 1$ . また,  $f'(x) = e^x$  なので,  $f'(0) = 1$ .  
よって, テイラー展開による1次近似は  $e^x \approx 1 + x$ .

(3)  $f(x) = \ln(1+x)$  と置くと,  $f(0) = \ln 1 = 0$ . また,  $f'(x) = \frac{1}{1+x}$  なので,  
 $f'(0) = 1$ .

よって, テイラー展開による1次近似は  $\ln(1+x) \approx x$ .

(4)  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  と置くと,  $f(0) = 1$ . また,  $f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$  なので,  $f'(0) = -1$ .  
よって, テイラー展開による1次近似は  $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ .

(5)  $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$  と置くと,  $f(0) = 1$ . また,  $f'(x) = 2\frac{1}{(1-x)^3}$  なので,  $f'(0) = 2$ .  
よって, テイラー展開による1次近似は  $\frac{1}{(1-x)^2} \approx 1 + 2x$ .

あるいは, 1次近似の連続適用をするならば,  $\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-2x+x^2} \approx \frac{1}{1-2x} \approx 1 + 2x$ .

### [問題 2]

$f(x)$  を  $x = 0$  周りでテイラー展開すると,

$$f(x) = f(0) + \frac{df}{dx}(0)x + \frac{1}{2} \frac{d^2f}{dx^2}(0)x^2 + \dots$$

となる. 変形していなければ応力はないはずなので,  $f(0) = 0$  としてよい. また,  $x$  が十分に小さければ, 2次以上の項を無視した式で近似できる. したがって,  $\frac{df}{dx}(0) = -k$  とおくと,

$$f(x) = -kx$$

となる. これは応力  $f(x)$  が変形量  $x$  に比例することを示す.

これはフックの法則とよばれ, バネの変形量と応力の関係を示す式として, 見たことがあるだろう.

### [問題 3]

人によって得意不得意があるので各自で答は異なるだろう. 一例として以下にくつかを挙げておく.

### 鉛直・水平の座標で考える方法

- 利点：ベクトルの考え方が最小限でよいので安心して計算ができる。
- 欠点：ベクトルの成分と座標との関係をきちんと理解していないとわかりにくい。

### 2通りの基本ベクトルを使い分ける方法

- 利点：ベクトルの方程式を解く数学的手法として基本ベクトルの成分間の連立方程式を解くという考え方がわかりやすい。
- 欠点：複数の基本ベクトルの組が混在していてわかりにくい。

### 分力で考える方法

- 利点：高校物理で習ったのと同じ方法なので慣れている。
- 欠点：分力という概念をきちんと理解していないと、なぜこの方法でよいのかが理解しにくい。

#### [問題4]

$\alpha$  と  $\theta$  は同じ向きを正とする。鉛直線に対して  $\alpha$  傾いた方向を基準とした基本ベクトルを用いた表記で解く場合を示す。

この場合、斜面に沿った向きを考えると、物体の斜面に沿った位置を上向き正として  $x'$  とするなら、物体の位置ベクトルは

$$\boldsymbol{x} = x' (\cos(\theta - \alpha) \boldsymbol{i}'' + \sin(\theta - \alpha) \boldsymbol{j}'')$$

となり、その時間2階微分は

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \ddot{x}' (\cos(\theta - \alpha) \boldsymbol{i}'' + \sin(\theta - \alpha) \boldsymbol{j}'')$$

となる。

一方、鉛直下方の単位ベクトルを考えると、重力は

$$m\boldsymbol{g} = -mg (\sin \alpha \boldsymbol{i}'' + \cos \alpha \boldsymbol{j}'')$$

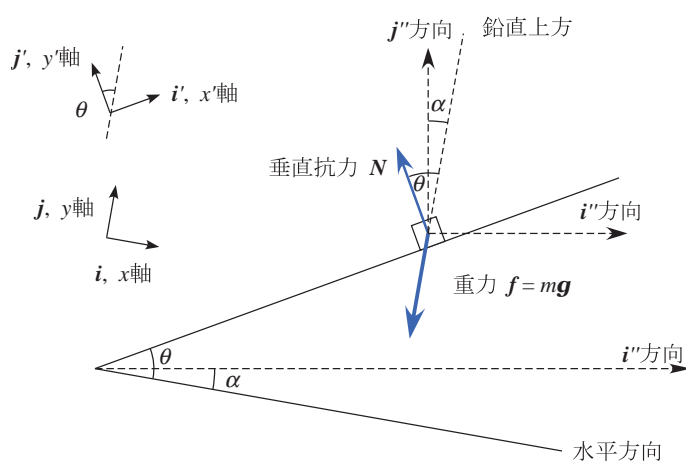


図 3: 傾斜角  $\theta$  の斜面上の物体に働く力を、鉛直方向から  $\alpha$  傾いた向きに基本ベクトルを設定した場合. 基本ベクトルが図の上方・右方となるように全体を傾けて表記した.

となり、斜面に垂直上方の単位ベクトルを考えると、垂直抗力は、その大きさを  $N$  とすると、

$$\mathbf{N} = N(-\sin(\theta - \alpha) \mathbf{i}'' + \cos(\theta - \alpha) \mathbf{j}'')$$

となる.

これを運動方程式に代入すると

$$m\ddot{x}'(\cos(\theta - \alpha) \mathbf{i}'' + \sin(\theta - \alpha) \mathbf{j}'') = N(-\sin(\theta - \alpha) \mathbf{i}'' + \cos(\theta - \alpha) \mathbf{j}'') - mg(\sin \alpha \mathbf{i}'' + \cos \alpha \mathbf{j}'')$$

なので、整理すると  $\mathbf{i}''$  と  $\mathbf{j}''$  の係数は、それぞれ

$$\begin{aligned} m\ddot{x}' \cos(\theta - \alpha) &= -N \sin(\theta - \alpha) - mg \sin \alpha \\ m\ddot{x}' \sin(\theta - \alpha) &= N \cos(\theta - \alpha) - mg \cos \alpha \end{aligned}$$

となる.  $N$  を消去すると  $\cos^2(\theta - \alpha) + \sin^2(\theta - \alpha) = 1$  より、

$$m\ddot{x}' = -mg(\cos(\theta - \alpha) \sin \alpha + \sin(\theta - \alpha) \cos \alpha)$$

だが、右辺の三角関数部分は

$$\begin{aligned} \cos(\theta - \alpha) \sin \alpha + \sin(\theta - \alpha) \cos \alpha \\ &= (\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha) \sin \alpha + (\sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha) \cos \alpha \\ &= \sin \theta \end{aligned}$$

なので、

$$m\ddot{x}' = -mg \sin \theta$$

が得られる。これは  $\alpha$  に影響されず、分力で考えるやり方と同一の式である。つまり、基本ベクトルの向きとは無関係に運動が決まるということである。

**[問題5]**

半径  $r$  の円を速さ  $v$  で通過する際の加速度は  $\frac{v^2}{r}$  である。したがって、この場合に質量  $m$  の車に加わる遠心力  $f$  は

$$f = m \frac{v^2}{r}$$

である。一方、車が路面から受ける最大(静止)摩擦力は4つのタイヤに均等に重量が加わっていると、タイヤは4つあるので、

$$F = \mu \frac{m}{4} g \times 4 = \mu mg$$

である。ここで、 $g$  は重力加速度。

カーブで横滑りしない条件は  $f$  が  $F$  以下であることであり、ギリギリの条件は  $f = F$  なので、これに代入すると、

$$m \frac{v^2}{r} = \mu mg$$

すなわち、

$$v = \sqrt{\mu r g}$$

である。つまり、この場合の通過上限速度は車の質量によらない。

資料を当たると、タイヤとレース場の路面の静止摩擦係数は  $\mu = 1.6$  程度といわれているので、この値を用いよう。この場合、半径 50m の急カーブならば

$$v = \sqrt{1.6 \times 50 \times 9.8} \text{ m s}^{-1} = 28 \text{ m s}^{-1}$$

となる。参考のため、この速さを時速に直すと  $100 \text{ km h}^{-1}$  である。

また、ここを通過するのに要する時間は、カーブが1周の  $\frac{1}{n}$  だとすると

$$T = \frac{2\pi r}{n} \frac{1}{v} = \frac{2\pi r}{n\sqrt{\mu r g}} = \frac{2\pi}{n\sqrt{\mu g}} \sqrt{r}$$

となる。したがって、 $r$  が大きい外側を通過する方が所要時間を要することになり不利である。ここからも、レースでコーナーの外側から追い越すのが難しいことが予想できる。

### [問題 6]

電車の質量を  $m$  とする。

必要な向心力は円運動の問題と同一である。すなわち、半径  $r$  の円を速さ  $v$  で通過する時の加速度は  $\frac{v^2}{r}$  なので、必要な向心力は

$$f_r = m \frac{v^2}{r}$$

である。

カントによる曲線内向きの力は斜面の問題と同一である。車体に加わる重力は重力加速度を  $g$  として、 $mg$ 。カントによる斜面の角を  $\theta$  とすると、線路からの垂直抗力は、重力の、線路に垂直な成分と大きさが等しく、

$$N = mg \cos \theta$$

である。これの水平方向成分は

$$f_c = N \sin \theta = mg \cos \theta \sin \theta$$

となる。

ここで、カント量  $h$  の線路の傾きは  $\frac{h}{w}$  だから  $\tan \theta = \frac{h}{w}$  であるが、 $\theta \ll 1$  で考えるとしたので  $\theta \simeq \frac{h}{w}$  であり、 $\cos \theta \simeq 1$ ,  $\sin \theta \simeq \theta$  であることを用いると、

$$f_c \simeq mg \frac{h}{w}$$

となる。

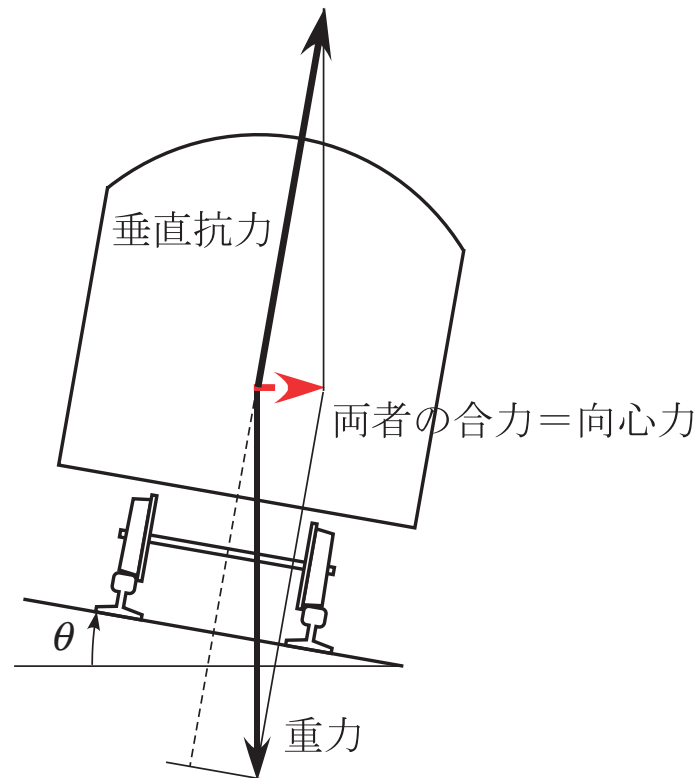


図 4: カントを持つ線路の断面. 車体に加わる重力と線路からの垂直抗力の合力が, この運動を実現する向心力と等しければ滑らかに曲線を通過できる. 線路からの垂直抗力は, 重力の, 線路と垂直方向の分力と釣り合っていないなければならない.

したがって, 最適量は  $f_c = f_r$  より,

$$h = w \frac{v^2}{rg}$$

となり, この量は電車の質量によらない.

$g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ ,  $v = 300 \times \frac{10^3}{3600} \text{ m s}^{-1}$ ,  $w = 1.435 \text{ m}$  を代入して, カント量は  $h=254 \text{ mm}$  となる.

実際のカント量は種々の技術的理由により 180mm を上限としているため, この値より小さい. つまり, 半径 4000m の曲線を円滑に通過するには時速 300km より減速する必要がある. その速さは, ここまでの解き方を応用すれば求めることができ

16

るので、各自で算出してみるとよい.



## 章末問題の解答例：第3章「運動に関する保存則」

### [問題 1]

(1) 時刻  $t$  でのロケット（本体と噴出する前の燃料の合計）の運動量は  $m(t)v(t)$  であり、時刻  $t + \Delta t$  でのロケット本体の運動量は

$$m(t + \Delta t)v(t + \Delta t) = (m(t) + \Delta m)(v(t) + \Delta v)$$

である。（ロケットの質量は減少するので  $\Delta m < 0$  であるが、 $\Delta m$  は時間  $\Delta t$  に対する  $m$  の変化量なので、その符号は自由には選べないことに注意。）この時、ガスは速度  $v(t)$  で進むロケットから反対方向に  $u$  で噴出しており、その質量はロケット全体では保存しているはずなので  $m(t) - m(t + \Delta t) = -\Delta m$  であることから、ガスの運動量は  $-\Delta m(v(t) - u)$  である。よって、時刻  $t + \Delta t$  での力学系の全運動量は

$$(m(t) + \Delta m)(v(t) + \Delta v) - \Delta m(v(t) - u)$$

である。

(2) 外力が働かないので時刻  $t$  と  $t + \Delta t$  の間で全運動量は保存している。したがって、

$$(m(t) + \Delta m)(v(t) + \Delta v) - \Delta m(v(t) - u) = m(t)v(t)$$

が成り立つ。

この式を展開して整理すると

$$m(t)\Delta v + u\Delta m + \Delta m\Delta v = 0$$

となる。そこで、両辺を  $\Delta t$  で割って、 $\Delta t \rightarrow 0$  の極限を取ると、 $\frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow \frac{dv}{dt}$  および  $\frac{\Delta m}{\Delta t} \rightarrow \frac{dm}{dt}$  は有限値となりうるが、 $\Delta v$  単独では 0 に収束する。したがって、第 3 項は寄与せず、

$$u \frac{dm}{dt} = -m \frac{dv}{dt}$$

が得られる。

(3) これを解く数学が以降の解答の本質となる。両辺を  $um$  で割ると変数分離ができ、

$$\frac{1}{m} \frac{dm}{dt} = -\frac{1}{u} \frac{dv}{dt}$$

となる．微分方程式の両辺を  $t$  で積分すると，今回は  $u$  が時間変化しないモデルなので，

$$\int \frac{1}{m} \frac{dm}{dt} dt = -\frac{1}{u} \int \frac{dv}{dt} dt$$

が得られる．ここで両辺に置換積分の公式を適用し，

$$\int \frac{1}{m} dm = -\frac{1}{u} \int dv$$

とすれば，この両辺は簡単に積分できて

$$\ln m = -\frac{1}{u} v + C$$

が得られる．ここで， $C$  は積分定数．変形すると， $v = C - (u \ln m)$  となるが， $t = 0$  のときに  $v = 0$ ， $m = m_0$  だったので， $C = u \ln m_0$  である．これを整理すると，出題文中に示したツィオルコフスキーの公式

$$v = u \ln \frac{m_0}{m}$$

が得られる（本文 p.89 参照）．

(4) ここから， $v$  を増やすためには  $u$  を増加させればよいことがわかる．しかし，それ以外に，ロケットの最終質量  $m$  に対して燃料込みの初期質量  $m_0$  が十分に大きければ  $v$  を  $u$  より大きくすることができる．とはいえ，それは比の対数でしか増えないので  $v$  を大きく増やすためには  $\frac{m_0}{m}$  をとんでもなく大きくする必要がある．

なお，ツィオルコフスキーの公式では  $m = m(t)$  が  $t$  のどんな関数であっても結果は変わらない．したがって， $u$  が一定という条件でならガスをいつどの程度噴出するかは最終速度  $v$  に影響しないことがわかる．

### [問題 2]

1つの物体が内力だけで2つに分裂する際の力学の考察から，ロケット本体を加速する推力はロケット本体の時間当たりの運動量変化であることがわかる．

ロケット本体の速度は時刻  $t$  から  $t + dt$  の間に  $dv$  だけ変化する．このとき，加速されるのは質量  $m$  だけなので，その運動量は  $dp = m dv$  だけ変化する．したがって，それに対応する推力  $f$  は

$$f = \frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt}$$

である。

そこで、前問で得た微分方程式

$$u \frac{dm}{dt} = -m \frac{dv}{dt}$$

を代入すると、ロケットの推力として

$$f = -u \frac{dm}{dt}$$

が得られる。ここで、ロケットの質量は時間と共に減少するので  $\frac{dm}{dt} < 0$  であり、ロケットの推力は  $f > 0$  となる。

この式から、ロケットの推力を増すには、ガスの噴出速度  $u$  が大きいエンジンを使う他に、短時間に大量のガスを噴出することでも達成できることがわかる。

地上からの打ち上げ時には、重力  $mg$  より大きな上向きの力が必要な上に、できるだけ短時間で加速して周回軌道に乗るのが望ましい。したがって、打ち上げの初期段階ほど推力  $f$  が大きなエンジンが必要となる。

### [問題 3]

時刻  $t$  での飛行機の運動量は  $Mv$  であり、吸入前の空気は速度  $0$  なので、その運動量は  $0$ 。一方、飛行機に他の力が働かなければ、時刻  $t + dt$  で飛行機が持つはずの運動量は  $M(v + dv)$  であり、噴出後の空気は速度  $-u$  で動くので、その運動量は  $-u dm$  である。したがって、運動量保存則より、

$$Mv = M(v + dv) - u dm$$

である。これを整理すると

$$M dv = u dm$$

となる。したがって、

$$\frac{dv}{dt} = \frac{u}{M} \frac{dm}{dt}$$

時間  $dt$  の間に飛行機の運動量は  $M dv$  だけ増えるはずなので、その加速に寄与する推力は  $f = M \frac{dv}{dt}$  となり、これに上式を代入すると

$$f = u \frac{dm}{dt}$$

が得られる。すなわち、加速  $u$  が大きく、短時間に大量の空気を噴き出せるエンジンほど大推力が得られる。

[問題 4]

飛行機が時間  $dt$  で得た運動エネルギー  $dK$  は、その前後の速度から

$$dK = \frac{1}{2}M(v + dv)^2 - \frac{1}{2}Mv^2 = Mv dv$$

である。ここで、2次の微小量は無視した。

次に、時間  $dt$  での系の運動エネルギーを考える。時刻  $t$  での飛行機本体の運動エネルギーは  $\frac{1}{2}Mv^2$  であり、この時点で空気は静止しているからその運動エネルギーは0。一方、時刻  $t + dt$  での飛行機本体の運動エネルギーは  $\frac{1}{2}M(v + dv)^2$  であり、噴出する空気は周囲に対して  $-u$  で運動しているので、その運動エネルギーは  $\frac{1}{2}dm u^2$  である。その差が、この間にエンジンが与えたエネルギー  $dW$  であり、式で書けば

$$dW = \frac{1}{2}M(v + dv)^2 + \frac{1}{2}dm u^2 - \frac{1}{2}Mv^2 = Mv dv + \frac{1}{2}dm u^2$$

である。ここで、2次の微小量は無視した。

ところで、飛行機の推進に関する運動量保存則から

$$M dv = u dm$$

が得られていたので、これを代入すると、

$$dW = Mv dv + \frac{1}{2}Mu dv$$

となる。

したがって、推進効率

$$\eta = \frac{dK}{dW} = \frac{v}{v + \frac{u}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{u}{2v}}$$

である。

前問の検討結果から、推力  $f > 0$  となるためには、 $u > 0$  であることが必要である。したがって、この条件内でエンジンの効率  $\eta$  が高くなるのはエンジンによる加速  $u$  ができるだけ遅い場合である。音速以下で飛行するジェット旅客機のエンジン

にはジェットの噴出と同時に、より遅い空気噴流が大量に混ざっている高バイパス比ターボファンエンジンが多用されている理由はこのことから説明できる。

また、この結果は、垂直に離着陸する場合も同じである。ただし、条件としては自重以上の推力が必要であり、 $u$  はあまり遅くできない。したがって、大量の空気をできるだけ低速で真下に送り出す仕組みの方が効率の観点で有利となる。このため、ヘリコプターにはジェットエンジンは用いられず、ジェット推進の垂直離着陸機は軍用機に限られているのは理にかなっているといえる。

[問題 5]

直交座標系で  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$  とする。

この時、

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k},$$

である。

ベクトルの実数倍の定義や内積の可換性、内積の結合則を考えると、

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &= a_x b_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + a_x b_y \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + a_x b_z \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} + a_y b_x \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + a_y b_y \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + a_y b_z \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} \\ &\quad + a_z b_x \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} + a_z b_y \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} + a_z b_z \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{aligned}$$

となる。これは直交座標成分による計算結果と一致する。

[問題 6]

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  がそれぞれ、 $x, y, z$  軸沿いの、互いに直交する単位ベクトルという定義から、 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$  および  $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$  と成分表記される2つのベクトルは

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$$

で表せる。

そこで、実数倍や結合則も用いれば、以下の答を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &= a_x b_y \mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_x b_z \mathbf{i} \times \mathbf{k} + a_y b_x \mathbf{j} \times \mathbf{i} + a_y b_z \mathbf{j} \times \mathbf{k} + a_z b_x \mathbf{k} \times \mathbf{i} + a_z b_y \mathbf{k} \times \mathbf{j} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k} \end{aligned}$$

これを直交3成分で表せば,  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$  となり, 直交座標成分による計算法と一致する.

### [問題7]

円運動なのでその進む方向は, 地球の重力が働く向きである公転の中心とは常に直交する. これは, 地球の重力による仕事は常に0となることを意味する. したがって, 人工衛星の持つ力学的エネルギーは増減がない.

### [問題8]

(1) 減速の加速度を  $a$  とする. 第1章の章末問題で解いたように, 一定加速度で長さ  $x - x_0$  の間に速さ  $v_0$  から  $v$  まで変化する場合には

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

である. 最高時速 285km は  $79.17 \text{ m s}^{-1}$  であり, 停車距離は  $3 \text{ km} = 3000 \text{ m}$  なので, 代入して  $a$  を求めると  $a = -1.044 \text{ m s}^{-2}$  である.

列車の質量は  $700 \text{ t} = 7 \times 10^5 \text{ kg}$  なので, 必要なブレーキ力は  $f = ma = 7 \times 10^5 \cdot 1.044 = 7.31 \times 10^5 \text{ N}$  である.

(2) 力  $f$  が長さ  $x = 3 \text{ km}$  に渡って働き続けるので, その仕事は  $fx = 2.19 \times 10^9 \text{ J}$

(3) 1編成の運動エネルギーは  $\frac{1}{2}mv^2 = 2.19 \times 10^9 \text{ J}$  であり, これが提供できる最大のエネルギーである. 一方, ブレーキ力が回生ブレーキのエネルギー源なので, (2)の結果も最大エネルギーとなる. 実際, 両者の値は一致している.

### [問題9]

ニュートンの重力定数 (万有引力定数) を  $G$  とし,  $x$  および  $y$  軸正方向の基本ベクトルを  $\mathbf{i}$  および  $\mathbf{j}$  と書くことにする.

(1) A から X への位置ベクトル  $\mathbf{x}_A$  は

$$\mathbf{x}_A = (x - a)\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

なので, 加わる重力は

$$\mathbf{f}_A = GMm \frac{(x - a)\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{((x - a)^2 + y^2)^{3/2}}$$

である.

同様にして、Bからの重力は

$$\mathbf{f}_B = GMm \frac{(x-b)\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{((x-b)^2 + y^2)^{3/2}}$$

である。

したがって、両者の合力は

$$\mathbf{f} = GMm \left( \frac{(x-a)\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{(x-b)\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{((x-b)^2 + y^2)^{3/2}} \right)$$

となる。基本ベクトルごとに整理すれば(むしろ、整理が悪い表式になるが)、

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= GMm \left( \frac{x-a}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{x-b}{((x-b)^2 + y^2)^{3/2}} \right) \mathbf{i} \\ &+ GMm \left( \frac{y}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{y}{((x-b)^2 + y^2)^{3/2}} \right) \mathbf{j} \end{aligned}$$

となる。

(2) この質点に対するAによる重力ポテンシャルは

$$V_A(x, y) = -\frac{GMm}{((x-a)^2 + y^2)^{1/2}}$$

である。この質点に対するBによる重力ポテンシャルは

$$V_B(x, y) = -\frac{GMm}{((x-b)^2 + y^2)^{1/2}}$$

である。したがって、その和は

$$V(x, y) = -GMm \left( \frac{1}{((x-a)^2 + y^2)^{1/2}} + \frac{1}{((x-b)^2 + y^2)^{1/2}} \right)$$

である。

(3)  $x$ での偏微分を求めると、

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x, y) = -GMm \left( \frac{x-a}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{x-b}{((x-b)^2 + y^2)^{3/2}} \right)$$

である。次に  $y$  での偏微分は

$$\frac{\partial}{\partial y} V(x, y) = -GMm \left( \frac{y}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{y}{((x-b)^2 + y^2)^{3/2}} \right)$$

である。したがって、力は

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = -\nabla V(x, y) &= GMm \left( \frac{x-a}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{x-b}{((x-b)^2 + y^2)^{3/2}} \right) \mathbf{i} \\ &+ GMm \left( \frac{y}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{y}{((x-b)^2 + y^2)^{3/2}} \right) \mathbf{j} \\ &= GMm \left( \frac{(x-a)\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{(x-b)\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{((x-b)^2 + y^2)^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

となる。これは (1) の結果と一致する。

力の和はベクトルの和なので計算が多少煩わしいが、ポテンシャルの和はスカラーの和なのでより単純に計算できる。したがって、ポテンシャルで考えた方が計算が単純になる場合が多い。



## 章末問題の解答例：第4章「回転運動と慣性力および重力」

### [問題1]

(1) 式(4.1.1)の両辺を時間で1階微分すると、

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{R} \cos \varphi - R \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y} &= \dot{R} \sin \varphi + R \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{z} &= \dot{z}\end{aligned}$$

が得られる。

(2) この結果と式(4.1.11)を代入すると以下の結果を得る。

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k} \\ &= (\dot{R} \cos \varphi - R \dot{\varphi} \sin \varphi)(\boldsymbol{e}_R \cos \varphi - \boldsymbol{e}_\varphi \sin \varphi) \\ &\quad + (\dot{R} \sin \varphi + R \dot{\varphi} \cos \varphi)(\boldsymbol{e}_R \sin \varphi + \boldsymbol{e}_\varphi \cos \varphi) \\ &\quad + \dot{z}\boldsymbol{k} \\ &= (\dot{R} \cos^2 \varphi - R \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi + \dot{R} \sin^2 \varphi + R \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi)\boldsymbol{e}_R \\ &\quad + (-\dot{R} \sin \varphi \cos \varphi + R \dot{\varphi} \sin^2 \varphi + \dot{R} \sin \varphi \cos \varphi + R \dot{\varphi} \cos^2 \varphi)\boldsymbol{e}_\varphi \\ &\quad + \dot{z}\boldsymbol{k} \\ &= \dot{R}\boldsymbol{e}_R + R\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \dot{z}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

つまり、円柱座標成分は以下の通り。

$$(v_R, v_\varphi, v_z) = (\dot{R}, R\dot{\varphi}, \dot{z})$$

各成分が全て速度の物理次元を持つことに注意したい。時間変化に応じて位置ベクトルがどのように変化するかを図示すれば、直観的に理解するのもそれほど難しくはないだろう。

(3) (1)の結果をもう1階微分すると、質点の位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対する加速度 $\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{x}}$

の直交座標成分は,

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= (\ddot{R} \cos \varphi - \dot{R} \dot{\varphi} \sin \varphi) - (\dot{R} \dot{\varphi} + R \ddot{\varphi}) \sin \varphi - R \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \\ &= (\ddot{R} - R \dot{\varphi}^2) \cos \varphi - (2\dot{R} \dot{\varphi} + R \ddot{\varphi}) \sin \varphi \\ \ddot{y} &= (\ddot{R} \sin \varphi + \dot{R} \dot{\varphi} \cos \varphi) + (\dot{R} \dot{\varphi} + R \ddot{\varphi}) \cos \varphi - R \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \\ &= (\ddot{R} - R \dot{\varphi}^2) \sin \varphi + (2\dot{R} \dot{\varphi} + R \ddot{\varphi}) \cos \varphi \\ \ddot{z} &= \ddot{z}\end{aligned}$$

となる.

(4) この結果を基本ベクトル表示で表すと以下となる.

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{x}} &= \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} \\ &= ((\ddot{R} - R \dot{\varphi}^2) \cos \varphi - (2\dot{R} \dot{\varphi} + R \ddot{\varphi}) \sin \varphi)\mathbf{i} \\ &\quad + ((\ddot{R} - R \dot{\varphi}^2) \sin \varphi + (2\dot{R} \dot{\varphi} + R \ddot{\varphi}) \cos \varphi)\mathbf{j} \\ &\quad + \ddot{z}\mathbf{k}\end{aligned}$$

を意味する. この右辺に式(4.1.11)を代入すると以下の結果を得る.

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{x}} &= ((\ddot{R} - R \dot{\varphi}^2) \cos \varphi - (2\dot{R} \dot{\varphi} + R \ddot{\varphi}) \sin \varphi)(\mathbf{e}_R \cos \varphi - \mathbf{e}_\varphi \sin \varphi) \\ &\quad + ((\ddot{R} - R \dot{\varphi}^2) \sin \varphi + (2\dot{R} \dot{\varphi} + R \ddot{\varphi}) \cos \varphi)(\mathbf{e}_R \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi) \\ &\quad + \ddot{z}\mathbf{k} \\ &= (\ddot{R} - R \dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_R + (2\dot{R} \dot{\varphi} + R \ddot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi + \ddot{z}\mathbf{k}\end{aligned}$$

つまり, 円柱座標成分は以下の通り.

$$(a_R, a_\varphi, a_z) = (\ddot{R} - R \dot{\varphi}^2, 2\dot{R} \dot{\varphi} + R \ddot{\varphi}, \ddot{z})$$

各成分が全て加速度の物理次元を持つことに注意したい. とはいえ, 速度の場合よりもかなり複雑な表式になっており, 各成分がこのように表されることを直観的に理解するのは, 実際には, たいへん難しい. しかし, この結果は, 存外にいろいろな場合に使うことがあるので, (必要に応じて引用すればよいので暗記する必要はないが,) 一度は自分で求めておくべきである.

[問題 2]

(1) 式(4.1.2)の両辺を時間で1階微分すると、

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (\dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi) \cos \theta - r \dot{\theta} \cos \phi \sin \theta \\ \dot{y} &= (\dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi) \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \phi \sin \theta \\ \dot{z} &= \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta\end{aligned}$$

が得られる。

(2) この結果と式(4.1.13)を用いると以下の結果を得る。

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \\ &= \left( (\dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi) \cos \theta - r \dot{\theta} \cos \phi \sin \theta \right) \left( (\mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \sin \theta) \cos \phi - \mathbf{e}_\phi \sin \phi \right) \\ &\quad + \left( (\dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi) \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \phi \sin \theta \right) \left( (\mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \sin \theta) \sin \phi + \mathbf{e}_\phi \cos \phi \right) \\ &\quad + (\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta) (\mathbf{e}_r \sin \theta + \mathbf{e}_\theta \cos \theta) \\ &= (\dot{r} \cos^2 \phi - r \dot{\phi} \sin \phi \cos \phi + \dot{r} \sin^2 \phi + r \dot{\phi} \cos \phi \sin \phi) \cos^2 \theta \mathbf{e}_r \\ &\quad - r \dot{\theta} (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \sin \theta \cos \theta \mathbf{e}_r + (\dot{r} \sin^2 \theta + r \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta) \mathbf{e}_r \\ &\quad + (-\dot{r} \sin \phi \cos \phi + r \dot{\phi} \sin^2 \phi + \dot{r} \sin \phi \cos \phi + r \dot{\phi} \cos^2 \phi) \cos \theta \mathbf{e}_\phi \\ &\quad + r \dot{\theta} (\sin \phi \cos \phi - \sin \phi \cos \phi) \sin \theta \mathbf{e}_\phi \\ &\quad - (\dot{r} \cos^2 \phi - r \dot{\phi} \sin \phi \cos \phi + \dot{r} \sin^2 \phi + r \dot{\phi} \sin \phi \cos \phi) \sin \theta \cos \theta \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + r \dot{\theta} (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \sin^2 \theta \mathbf{e}_\theta + (\dot{r} \sin \theta \cos \theta + r \dot{\theta} \cos^2 \theta) \mathbf{e}_\theta \\ &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\phi} \cos \theta \mathbf{e}_\phi + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta\end{aligned}$$

つまり、速度  $\mathbf{v}$  の極座標成分は以下の通り。

$$(v_r, v_\phi, v_\theta) = (\dot{r}, r \dot{\phi} \cos \theta, r \dot{\theta})$$

各成分が全て速度の物理次元を持つことに注意したい。時間変化に応じて位置ベクトルがどのように変化するかを図示すれば、直観的に理解するのもそれほど難しくはないだろう。

(3) (1)の結果をもう1階微分すると、質点の位置ベクトル  $\mathbf{x}$  に対する加速度  $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{x}}$

の直交座標成分は,

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} &= \left( \ddot{r} \cos \phi - \dot{r} \dot{\phi} \sin \phi - (\dot{r} \dot{\phi} + r \ddot{\phi}) \sin \phi - r \dot{\phi}^2 \cos \phi \right) \cos \theta - (\dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi) \dot{\theta} \sin \theta \\
 &\quad - \left( (\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \cos \phi - r \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi \right) \sin \theta - r \dot{\theta}^2 \cos \phi \cos \theta \\
 &= \left( (\ddot{r} - r \dot{\phi}^2 - r \dot{\theta}^2) \cos \phi - (2\dot{r} \dot{\phi} + r \ddot{\phi}) \sin \phi \right) \cos \theta \\
 &\quad + \left( -(2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \cos \phi + 2r \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \phi \right) \sin \theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{y} &= \left( \ddot{r} \sin \phi + \dot{r} \dot{\phi} \cos \phi + (\dot{r} \dot{\phi} + r \ddot{\phi}) \cos \phi - r \dot{\phi}^2 \sin \phi \right) \cos \theta - (\dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi) \dot{\theta} \sin \theta \\
 &\quad - \left( (\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \sin \phi + r \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \phi \right) \sin \theta - r \dot{\theta}^2 \sin \phi \cos \theta \\
 &= \left( (2\dot{r} \dot{\phi} + r \ddot{\phi}) \cos \phi + (\ddot{r} - r \dot{\phi}^2 - r \dot{\theta}^2) \sin \phi \right) \cos \theta \\
 &\quad + \left( -2r \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \phi - (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \sin \phi \right) \sin \theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{z} &= \ddot{r} \sin \theta + \dot{r} \dot{\theta} \cos \theta + (\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \cos \theta - r \dot{\theta}^2 \sin \theta \\
 &= (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \cos \theta + (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \sin \theta
 \end{aligned}$$

(4) この結果と式 (4.1.13) を用いると以下の結果を得る.

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbf{x}} &= \ddot{x} \mathbf{i} + \ddot{y} \mathbf{j} + \ddot{z} \mathbf{k} \\
 &= \left( \left( (\ddot{r} - r \dot{\phi}^2 - r \dot{\theta}^2) \cos \phi - (2\dot{r} \dot{\phi} + r \ddot{\phi}) \sin \phi \right) \cos \theta \right. \\
 &\quad \left. + \left( -(2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \cos \phi + 2r \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \phi \right) \sin \theta \right) ((\mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \sin \theta) \cos \phi - \mathbf{e}_\phi \sin \phi) \\
 &\quad + \left( \left( (2\dot{r} \dot{\phi} + r \ddot{\phi}) \cos \phi + (\ddot{r} - r \dot{\phi}^2 - r \dot{\theta}^2) \sin \phi \right) \cos \theta \right. \\
 &\quad \left. + \left( -2r \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \phi - (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \sin \phi \right) \sin \theta \right) ((\mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \sin \theta) \sin \phi + \mathbf{e}_\phi \cos \phi) \\
 &\quad + \left( (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \cos \theta + (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \sin \theta \right) (\mathbf{e}_r \sin \theta + \mathbf{e}_\theta \cos \theta)
 \end{aligned}$$

これ以降, 展開すると項の数が増えるので, 3つの基本ベクトルごとに式を整理し

よう。まず、 $e_r$  の係数  $\ddot{x}_r = a_r$  は以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
 a_r &= \left( (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 - r\dot{\theta}^2) \cos^2 \phi - (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \sin \phi \cos \phi \right) \cos^2 \theta \\
 &\quad + \left( -(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \cos^2 \phi + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \sin \phi \cos \phi \right) \sin \theta \cos \theta \\
 &\quad + \left( (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \sin \phi \cos \phi + (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 - r\dot{\theta}^2) \sin^2 \phi \right) \cos^2 \theta \\
 &\quad + \left( -2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \phi \sin \phi - (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \sin^2 \phi \right) \cos \theta \sin \theta \\
 &\quad + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \cos \theta \sin \theta + (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \sin^2 \theta \\
 &= (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 - r\dot{\theta}^2) \cos^2 \theta - (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \cos \theta \sin \theta \\
 &\quad + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \cos \theta \sin \theta + (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \sin^2 \theta \\
 &= \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \cos^2 \theta - r\dot{\theta}^2
 \end{aligned}$$

次に、 $e_\phi$  の係数  $\ddot{x}_\phi = a_\phi$  は以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
 a_\phi &= - \left( (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 - r\dot{\theta}^2) \cos \phi \sin \phi - (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \sin^2 \phi \right) \cos \theta \\
 &\quad - \left( -(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \cos \phi \sin \phi + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \sin^2 \phi \right) \sin \theta \\
 &\quad + \left( (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \cos^2 \phi + (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 - r\dot{\theta}^2) \sin \phi \cos \phi \right) \cos \theta \\
 &\quad + \left( -2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos^2 \phi - (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \sin \phi \cos \phi \right) \sin \theta \\
 &= (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \cos \theta - 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \sin \theta
 \end{aligned}$$

最後に  $e_\theta$  の係数  $\ddot{x}_\theta = a_\theta$  は以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
 a_\theta &= - \left( (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 - r\dot{\theta}^2) \cos^2 \phi - (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \sin \phi \cos \phi \right) \cos \theta \sin \theta \\
 &\quad - \left( -(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \cos^2 \phi + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \sin \phi \cos \phi \right) \sin^2 \theta \\
 &\quad - \left( (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \sin \phi \cos \phi + (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 - r\dot{\theta}^2) \sin^2 \phi \right) \cos \theta \sin \theta \\
 &\quad - \left( -2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \phi \sin \phi - (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \sin^2 \phi \right) \sin^2 \theta \\
 &\quad + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \cos^2 \theta + (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \sin \theta \cos \theta \\
 &= -(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 - r\dot{\theta}^2) \cos \theta \sin \theta + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \sin^2 \theta \\
 &\quad + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \cos^2 \theta + (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \sin \theta \cos \theta \\
 &= r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}
 \end{aligned}$$

つまり、極座標成分は以下の通り.

$$(a_r, a_\phi, a_\theta) = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \cos^2 \theta - r\dot{\theta}^2, (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \cos \theta - 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \sin \theta, r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta)$$

各成分が全て加速度の物理次元を持つことに注意したい. とはいえ, 速度の場合よりもかなり複雑な表式になっており, 各成分がこのように表されることを直観的に理解するのは, 実際には, たいへん難しい. しかし, この結果は, 存外にいろいろな場合に使うことがあるので, (必要に応じて引用すればよいので暗記する必要はないが,) 一度は自分で求めておくべきである.

### [問題 3]

(1) 加速度の定義から

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \iint \mathbf{a} \, dt \, dt$$

なので,

$$\ddot{\mathbf{x}}' = \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{a}$$

である.

したがって,  $K$  系での運動方程式に代入すると

$$\mathbf{f} = m\ddot{\mathbf{x}}' + m\mathbf{a}$$

となるので, 移項して

$$\mathbf{f} - m\mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{x}}'$$

が得られる. つまり, 力  $\mathbf{f}' = \mathbf{f} - m\mathbf{a}$  が働くとした場合の運動方程式が成り立つ. この付加項  $-m\mathbf{a}$  が慣性力である.

(2) 加速度の定義から

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{x}' + \iint \mathbf{a}' \, dt \, dt$$

なので,

$$\ddot{\mathbf{x}}'' = \ddot{\mathbf{x}}' + \mathbf{a}'$$

である.

したがって,  $K$  系での運動方程式に代入すると

$$\mathbf{f}' = m\ddot{\mathbf{x}}'' + m\mathbf{a}'$$

となるので、移項して

$$\mathbf{f}' - m\mathbf{a}' = m\ddot{\mathbf{x}}''$$

が得られる。これに(1)の結果を代入すると、

$$\mathbf{f} - m\mathbf{a} - m\mathbf{a}' = \ddot{\mathbf{x}}''$$

つまり、力  $\mathbf{f}'' = \mathbf{f}' - m\mathbf{a}' = \mathbf{f} - m(\mathbf{a} + \mathbf{a}')$  が働くとした場合の運動方程式が成り立つ。

(3) ここまでの結果を比べると、 $K'$ 系と $K''$ 系とでの違いには $\mathbf{a}$ は含まれない。したがって、 $\mathbf{f}'$ に慣性力が含まれているかどうかは、その力が質量 $m$ に比例するかどうか、系の至るところで一定であるかではしか判定できない。一方で、一様な重力も、同じ特徴を持つ。したがって、一様な重力が存在する可能性がある場合には、それと慣性力とは識別できない。

#### [問題4]

(1) 運動速度 $v$ が一定の円運動の加速度 $a$ は加速度の定義から

$$a = \frac{v^2}{r}$$

である。一方、半径 $r$ の円を一定速度で回転している場合、その周期は

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

である。したがって、両式から $v$ を消去すると

$$a = \frac{(2\pi r)^2}{rT^2} = \frac{(2\pi)^2 r}{T^2}$$

が得られる。

これに $T = 365.25 \text{ 日} = 3.156 \times 10^7 \text{ sec}$ と、 $r = 1.5 \times 10^8 \text{ km} = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ を代入すれば、 $a = 5.95 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$ が得られる。

なお、より正確な値として $r = 1.495978707 \times 10^{11} \text{ m}$ 、 $T = 365.25636302 \text{ 日}$ を用いると、 $a = 5.93 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$ となる。

(2) 重力の強さは

$$f = G \frac{Mm}{r^2}$$

で与えられる。したがって、その大きさは

$$f = 3.54 \times 10^{22} \text{ N}$$

となり、この力によって地球が受ける加速度は

$$a = 5.93 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$$

である。

なお、より精密な値として、 $M = 1.9884 \times 10^{30} \text{ kg}$ 、 $G = 6.67430 \times 10^{-11} \text{ N kg}^{-2} \text{ m}^2$ 、 $r = 1.495978707 \times 10^{11} \text{ m}$ を用いると、 $a = 5.93 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$ となり、(1)の精度を上げた答と一致する。

(3) 地上の実験室系が持つ加速度で生じる慣性力と、その加速を生じさせる重力とが実験室内の全ての物体に同時に働いている。後者が前者の原因であるため、両者は逆向きで同じ大きさとなる。このため、両者が打ち消し合う。したがって、両者がともに存在しないと考えた場合と同じ結果となり、実験室は慣性系であるとして矛盾が生じない。

地球の運動が等速円運動でなくとも、それが他の天体からの重力による加速度運動だけならば、系の加速度で生じる慣性力とその原因となる重力とは逆向きで同じ大きさとなるため、やはり、慣性系であるとして矛盾は生じない。

なお、厳密には地球全体の動きを決める重力は太陽からの距離によって変わるので、地表の各物体に働く重力は慣性力を完全には打ち消せない。この差が認識される場合には、これを“潮汐力”と解釈するのである。

### [問題 5]

(1) 角速度  $\omega$  の系でのコリオリ力は本文の式 (4.3.37) に示したように

$$\boldsymbol{f}_{\text{Cori}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$$

である。ここで、 $\boldsymbol{\omega}$  は慣性系から見た回転系の角速度ベクトルで、地球は北極を見下ろすと慣性系に対して反時計回りに自転している。つまり、地球の自転の角速度ベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  は南極から北極に向かって地球の中心を貫く向きである。A.4 節で示しているようにベクトルの外積は互いに垂直な成分同士だけを考えればよいので、自転軸と垂直方向の速度  $\boldsymbol{v}$  しかコリオリ力に寄与しない。ここで、 $\boldsymbol{v}$  は回転系に対する物体の速度である。



南極点と北極点ではどの方向の運動も  $\omega$  と垂直になるので、どの方向の運動も等しくコリオリ力を生じる。その向きは北極では進行方向と垂直に右、南極では左になる ( $\omega$  の向きは地球外から見ると変わらないが、地表を基準とすると南極では  $\omega$  の向きは鉛直下方向になることに注意)。

赤道上の地点では南北方向の運動は  $\omega$  と平行なのでコリオリ力は働かず、東西方向の運動に対してのみ働く。ただし、その向きはいずれも地面と垂直方向となる。つまり、赤道上ではコリオリ力は水平方向の運動には影響しない。

(2) 緯度  $\beta$  では地面の南北方向は自転軸に対して  $\beta$  だけ傾き、東西方向は自転軸と垂直である。したがって、水平方向の速度の南北成分が  $v_N$  (北向きを正) の場合、コリオリ力の水平成分は東西方向で、その大きさを  $f_E$  (東向きを正) とすれば、質量  $m$  の物体に対して、

$$f_E = 2m\omega v_N \sin \beta$$

である。つまり、北半球では北上する運動には東を、南下する運動には西を向いたコリオリ力が働き、南半球では逆向きになる。このため、南北への流れがあると北半球では時計回り、南半球では反時計回りの運動を生じる。

(3) 地球は  $T = 23$  時間 56 分 4 秒  $= 86164$  s で自転しているので、その角速度は

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7.29 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$$

であり、 $1000 \text{ m s}^{-1} = 10^3 \text{ m s}^{-1}$  で移動する砲弾に働くコリオリ力による加速度は  $7.29 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$  である。これは重力加速度  $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$  と比べると、0.7%にすぎない。

### [問題 6]

ポテンシャルの  $x$  方向の偏微分を求める。

$$V = -G \frac{m}{r} = -G \frac{m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

なので、

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -Gm \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = Gm \frac{x}{r^3}$$

である。ここで、 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |\mathbf{x}|$  と置いた。

他の2方向での偏微分は地道に計算しても良いが、ポテンシャルの式が  $x, y, z$  に関して同じ形に入っていることから答は容易に予想ができ、

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial y} &= Gm \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = Gm \frac{y}{r^3} \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= Gm \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = Gm \frac{z}{r^3}\end{aligned}$$

である。

したがって、このポテンシャルで生じる力は

$$-\nabla V = -Gm \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r^3} = -Gm \frac{\mathbf{x}}{r^3} = -Gm \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} = -Gm \frac{1}{\mathbf{x}^2} \mathbf{e}_r$$

となる。ここで、 $\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$  は原点から力が及ぶ質点を向いた単位ベクトル、すなわち、極座標表示の場合の動径方向の単位ベクトルである。

このポテンシャルは、力が働く対象の質量当たりの重力に相当する。質量  $m_1$  の質点が質量  $m_2$  の質点に及ぼす重力の場合は、 $m = m_1$  とした上で、 $m_2$  を乗じて

$$\mathbf{f} = -m_2 \nabla V = -G \frac{m_1 m_2}{\mathbf{x}^2} \mathbf{e}_r$$

となる。これはニュートンが発見した重力の式 (4.4.9) と一致する。

### [問題 7]

(1) 円環の中心を座標原点、円環の軸を  $z$  軸とする円柱座標で考えよう。円環の半径を  $r$ 、半径方向の微小幅を  $\Delta r$  とし、軸方向の微小幅を  $\Delta z$  とする。

この場合、微小体積  $\Delta r r d\phi \Delta z$  に含まれる質量が位置  $(0, 0, z)$  に与えるポテンシャルを積分すれば、円環全体が生じるポテンシャルが求められる。それは以下の  $d\phi$  に対する積分で求められる。

$$V = - \int_0^{2\pi} G \frac{\rho \Delta r \Delta z}{\sqrt{r^2 + z^2}} r d\phi = -2\pi G \rho \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} \Delta r \Delta z$$

円環全体の質量は  $M = 2\pi r \rho \Delta r \Delta z$  なので、これで表現すると

$$V = -G \frac{M}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

となる。

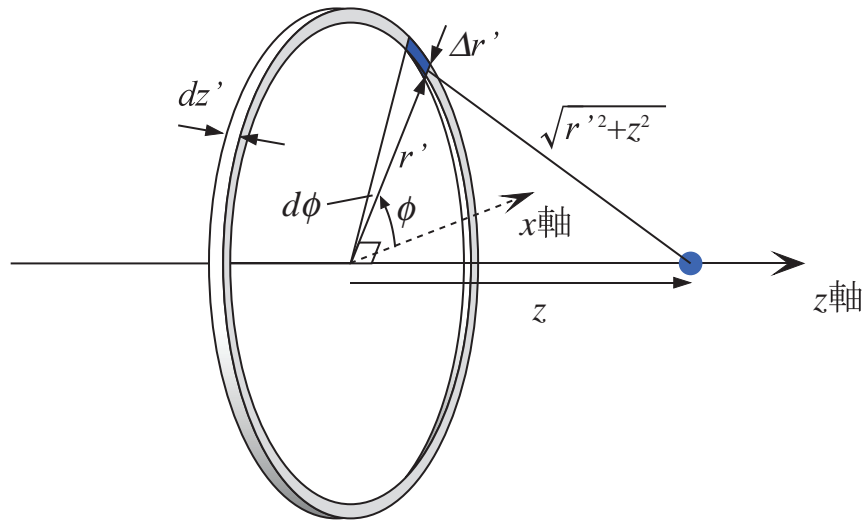


図 5: 十分に細い円環が及ぼす重力

重力はこれの grad を求め、重力が及ぶ質点の質量  $m$  を乗じればよい。  $z$  座標にしか依存性がないので、重力も  $z$  成分のみである。

$$\mathbf{f} = -m\nabla V = m \frac{\partial}{\partial z} \frac{GM}{\sqrt{r^2 + z^2}} \mathbf{k} = -GMm \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k}$$

(2) 球殻の中心を座標原点とし、ポテンシャルを求める点の向きに  $z$  軸をとり、ポテンシャルを求める位置を  $(0, 0, z)$  とする。

球殻は球対称なので、これだけを求めておけば他の方向でも物理的には同じ結果を与える。また、 $z$  軸の決め方から  $z \geq 0$  としても問題はない。

球殻の半径を  $r$ 、球殻の厚さを  $\Delta r$  とし、密度を  $\rho$  とする。球殻を位置  $z'$  で  $z$  軸に垂直な平面で厚さ  $dz'$  で十分に薄く輪切りにすると、その形状は半径  $r' = \sqrt{r^2 - z'^2}$ 、厚さ  $\Delta r'$ 、幅  $dz'$  の円環で近似できる。このとき、位置  $(0, 0, z)$  は円環の中心から  $z - z'$  に位置する。 $z = 0$  以外では球殻の半径方向  $r$  に対して輪切りにした円環の半径方向  $r'$  が斜めになっていることを考慮する、あるいは、 $r' = \sqrt{r^2 - z'^2}$  から

$$\frac{dr'}{dr} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - z'^2}} = \frac{r}{r'}$$

となることを用いれば、

$$\Delta r' = \frac{r}{\sqrt{r^2 - z'^2}} \Delta r = \frac{r}{r'} \Delta r$$

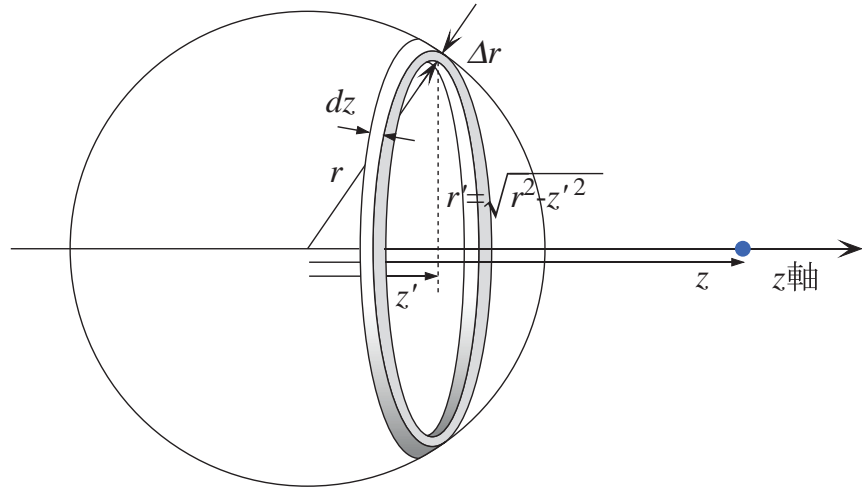


図 6: 球殻を薄切りにした細い円環が及ぼす重力

となる。

これらを円環による軸上でのポテンシャルを表す式 (4.4.41) に代入すると、

$$V = -2\pi G\rho \frac{r \Delta r}{\sqrt{r^2 - z'^2 + (z - z')^2}} dz' = -2\pi G\rho \frac{r \Delta r}{\sqrt{r^2 + z^2 - 2zz'}} dz'$$

となる。これを球殻全体にわたる  $z'$  で積分しよう。ここで、 $r$  も  $\Delta r$  も  $z'$  の変化に対して定数であることに注意すると、球殻が与えるポテンシャルが以下のように得られる。

$$\begin{aligned} V &= -2\pi G\rho r \Delta r \int_{z'=-r}^{z'=+r} (r^2 + z^2 - 2zz')^{-1/2} dz' \\ &= 2\pi G\rho \frac{r}{z} \Delta r \left[ (r^2 + z^2 - 2zz')^{1/2} \right]_{z'=-r}^{z'=+r} \\ &= 2\pi G\rho \frac{r}{z} \Delta r \left( \sqrt{r^2 + z^2 - 2rz} - \sqrt{r^2 + z^2 + 2rz} \right) \\ &= 2\pi G\rho \frac{r}{z} \Delta r (|r - z| - |r + z|) \\ &= \begin{cases} -4\pi G\rho r \Delta r & (0 \leq z < r \text{ の場合}) \\ -4\pi G\rho \frac{r^2}{z} \Delta r & (z \geq r \text{ の場合}) \end{cases} \end{aligned}$$

重力はこれの grad を求め、質点の質量  $m$  を乗じればよい。球殻の内側ではポテンシャルは定数であり、球殻の外では  $z$  座標にしか依存性がない。

$$f = -m\nabla V = \begin{cases} 0 & (0 \leq z < r \text{ の場合}) \\ -4\pi G\rho \frac{r^2}{z^2} \mathbf{k} = -G \frac{Mm}{z^2} \mathbf{k} & (z \geq r \text{ の場合}) \end{cases}$$

ここで、 $M = 4\pi r^2 \Delta r \rho$  は球殻の総質量である。

ここから、球殻の内側には重力が及ばず、外側では球殻の中心に球殻の全質量と同じ質量の質点が存在する場合と同じ重力が生じることがわかる。

(3) 球の表面の半径を  $R$ 、密度分布を球中心からの距離  $r$  の関数として  $\rho(r)$  とする。球体の中心を座標原点とし、ポテンシャルを求める点の向きに  $z$  軸をとり、ポテンシャルを求める位置を  $(0, 0, z)$  とする。

球体は球対称なので、これだけを求めておけば他の方向でも物理的には同じ結果を与える。また、 $z$  軸の決め方から  $z \geq 0$  としても問題はない。

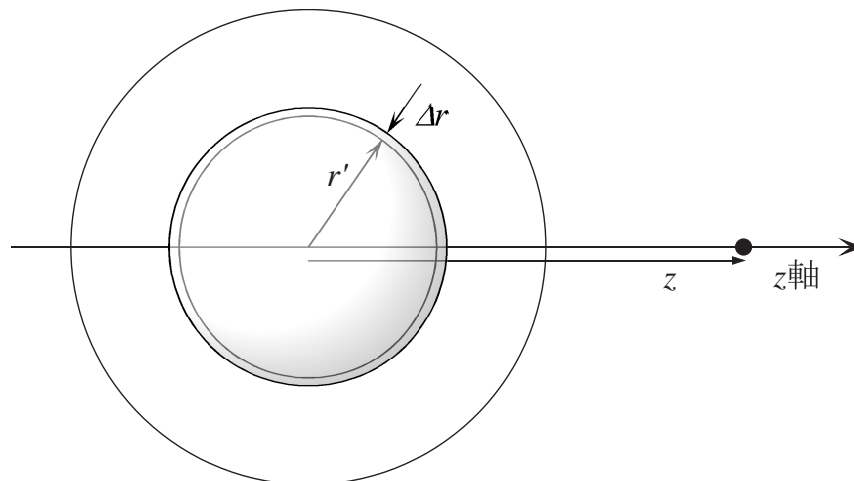


図 7: 薄い球殻が及ぼす重力

先に求めた、十分に薄い球殻で生じる力を合計すれば、厚さが有限の球殻による重力を求めることができる。(2)で示したように薄い球殻が作る重力はすべて球殻の中心を向いているので、力の合計はその  $z$  成分を単純に合計すればよいので、ポテンシャルを求めなくても答を得ることができる。まずは、この方法で求めてみよう。

(2) の答から球殻はその内部には重力を及ぼさないことがわかるので、求めたい球殻による重力は以下の式で求められる。

まず、 $z \leq r_1$  の場合は、全ての球殻の内部なので、働く力は0である。

次に、 $z \geq r_2$  の場合は、全ての球殻の外部なので、働く力は全球殻の質量を

$$M = 4\pi\rho \int_{r_1}^{r_2} \rho(r)r^2 dr$$

とすれば、

$$\mathbf{f} = -G \frac{Mm}{z^2}$$

である。

最後に、 $r_1 < z < r_2$  の場合は、半径  $z$  より内側の球殻の総質量を

$$M(z) = 4\pi \int_{r_1}^z \rho(r)r^2 dr$$

とすれば、

$$\mathbf{f} = -4\pi Gm \frac{1}{z^2} \int_{r_1}^z \rho(r)r^2 dr \mathbf{k} = -G \frac{M(z)m}{z^2} \mathbf{k}$$

となる。

もちろん、一旦ポテンシャルを求めた場合も同じ結果になる。それを示すと以下のようになる。

$$\begin{aligned} V &= -4\pi G \int_{r=r_1}^{r=r_2} \rho(r)r dr \\ &= -G (\lambda(r_2) - \lambda(r_1)) = -G \lambda(r_2) \quad (0 \leq z \leq r_1 \text{ の場合}) \\ V &= -\frac{4\pi G}{z} \int_{r=r_1}^{r=z} \rho(r)r^2 dr - 4\pi G \int_{r=z}^{r=r_2} \rho(r)r dr \\ &= -G \frac{M(z)}{z} - G (\lambda(r_2) - \lambda(z)) \quad (r_1 < z < r_2 \text{ の場合}) \\ V &= -4\pi G \int_{r=r_1}^{r=r_2} \rho(r) \frac{r^2}{z} dr = -G \frac{M}{z} \quad (z \geq r_2 \text{ の場合}) \end{aligned}$$

ここで、本文にも示したように、 $M(z) = 4\pi \int_{r_1}^z \rho(r)r^2 dr$ 、 $\lambda(z) = 4\pi \int_{r_1}^z \rho(r)r dr$  で、積分の下端を見れば、 $\rho(r)$  がどんな関数であろうが、 $M(r_1) = 0$ 、 $\lambda(r_1) = 0$  である。

ここから求められる重力  $\mathbf{f} = -m\nabla V$  が先の結果と一致することは本文にも示したので、容易に導けよう。

(4) 十分に薄い球殻で生じる力を合計すれば、厚さが有限の球殻あるいは中心までつまった球による重力を求めることができる。(2)で示したように薄い球殻が作る重力はすべて球殻の中心を向いているので、力の合計はその  $z$  成分を単純に合計すればよい。そのため、ポテンシャルを求めなくても答を得ることができる。まずは、この方法で求めてみよう。

まず、 $z < R$  の場合は、半径  $z$  より内側の球殻の総質量を

$$M(z) = 4\pi \int_0^z \rho(r)r^2 dr$$

とすれば、

$$\mathbf{f} = -4\pi Gm \frac{1}{z^2} \rho(r) \int_0^z r^2 dr \mathbf{k} = -G \frac{M(z)m}{z^2} \mathbf{k}$$

となる。

次に、 $z \geq R$  の場合は、全ての球殻の外部なので、働く力は全球殻の質量を

$$M = M(R) = 4\pi \int_0^R \rho(r)r^2 dr$$

とすれば、

$$\mathbf{f} = -G \frac{Mm}{z^2}$$

である。

もちろん、一旦ポテンシャルを求めた場合も同じ結果になる。それを示すと以下のようなになる。

$$V = \begin{cases} -G \frac{M}{z} & (z \geq R \text{ の場合}) \\ -G \frac{M(z)}{z} - G(\lambda(R) - \lambda(z)) & (0 \leq z < R \text{ の場合}) \end{cases}$$

である。ここで、 $\lambda(z) = 4\pi \int_{r_1}^z \rho(r)r dr$  で、 $\lambda(r_1) = 0$  である。

このポテンシャルの grad を求め、質点の質量  $m$  を乗じると、重力が得られる。定義により、

$$\frac{\partial M(z)}{\partial z} = 4\pi\rho(z)z^2, \quad \frac{\partial \lambda(z)}{\partial z} = 4\pi\rho(z)z$$

であることを用いると,

$$\mathbf{f} = -m\nabla V = -m\frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k} = \begin{cases} -G\frac{Mm}{z^2}\mathbf{k} & (z \geq R \text{ の場合}) \\ -G\frac{M(z)m}{z^2}\mathbf{k} & (0 \leq z < R \text{ の場合}) \end{cases}$$

でとなり, 力を合計した場合と同じ答が得られる.

**[問題 8]**

(1) 惑星の半径を  $R$ , 質量を  $M$  とし, 落下させる小物体の質量を  $m$  とする. それの惑星中心からの距離を  $r$  とすると, この問題では  $\rho$  は定数なので, 小物体は表面より下に位置する限り,

$$M(r) = 4\pi\rho \int_0^r r'^2 dr' = \frac{4\pi}{3}\rho r^3$$

なので, 前問の答で  $z = r$  と置き換えてから, これを代入すると,

$$\mathbf{f} = -\frac{4\pi}{3}Gm\rho r \mathbf{e}_r$$

となる. ただし,  $\mathbf{e}_r$  は惑星の中心から小物体に向かう単位ベクトル. したがって, 小物体の運動方程式 (惑星中心からの距離方向成分) は

$$m\ddot{r} = -\frac{4\pi}{3}Gm\rho r$$

である. これは  $k = \frac{4\pi}{3}G\rho$  とした場合のバネによる単振動と同じ形なので (もちろんバネの場合と同様の手順で微分方程式を解いてもよい), その解は

$$r = a \cos(\omega t + \phi)$$

と書ける. ここで,  $a$  と  $\phi$  は初期条件で決まる積分定数であり,

$$\omega = \sqrt{\frac{4\pi}{3}G\rho}$$

である.



問題文に示された初期条件は  $t = 0$  で  $r = R, \dot{r} = 0$  で与えられるので、積分定数は  $a = R, \phi = 0$  と確定する。すなわち、小物体の運動は

$$r = R \cos \left( \sqrt{\frac{4\pi}{3} G \rho} t \right)$$

であり、これは振幅  $R$ 、角振動数  $\omega = \sqrt{\frac{4\pi}{3} G \rho}$  の単振動である。したがって、その周期は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

である。ここで、 $T$  は  $R$  によらず  $\rho$  の値だけで決まることに注目しよう。

(2) 地球の平均密度は

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 5.51 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

なので、(1) より振動周期は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} = 5.06 \times 10^3 \text{ s}$$

となる。ここで、 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N kg}^{-2} \text{ m}^2$  を用いた。地球の反対側に出るのに要する時間はその半分なので、求める答は

$$\frac{T}{2} = 2.53 \times 10^3 \text{ s} = 42 \text{ 分 } 10 \text{ 秒}$$

である。

(3) 火星の平均密度は

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 3.92 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

なので、(2) と同様にして、火星の反対側に出るのに要する時間は

$$\frac{T}{2} = 3.00 \times 10^3 \text{ s} = 50 \text{ 分}$$

である。

火星の方が平均密度が小さいため、地球より半径が小さいのに長い時間を要する。

[問題 9]

映画「スターウォーズ」の描写がどこまで現実的かを物理学の知識で確かめてみようという問題である。なお、問題文にあるデススターの平均密度は戦艦大和の満載質量と体積概算値から見積もった値を採用した。

(1) デススターの全体積は  $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 9.05 \times 10^{17} \text{ m}^3$  なので、与えられた平均密度を用いると全質量は  $M = 4.52 \times 10^{17} \text{ kg}$  である。表面に及ぶ重力は密度が球対称分布ならば、この質量が中心に位置する質点の場合と同じなので、その重力加速度の大きさは

$$g = G \frac{M}{R^2} = 8.38 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$$

である。地球表面での重力加速度は  $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$  なので、その  $1/1200$  しかない。

このため、表面で行動する場合には惑星表面のようにはならず、スペースシャトルの船外活動に似たものとなったはずである。

なお、密度が一様でなくとも平均密度が同じで密度分布が球対称ならば答は同じになる。

(2) 惑星に小物体を落とす、前の問題と本質的に同じである。プロトン魚雷の落下の運動方程式は (廃熱穴が反対側の表面まで達しているなら) その場合と同じく、周期が  $T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$  の単振動をする。中心までの到達時間はその  $1/4$  なので、具体的な値を代入すると、

$$\frac{T}{4} = 4.20 \times 10^3 \text{ s} = 7 \text{ 分}$$

である。

ジェダイの騎士となるルーク スカイウォーカーは、これだけの時間で安全な距離まで逃げ切れたということである。

## 章末問題の解答例：第5章「2つ以上の質点の組の運動」

### [問題 1]

2体問題の運動方程式は，2体の相対位置を  $\boldsymbol{x}$ ，その間に働く力を  $\boldsymbol{f}$  とすれば，

$$\frac{Mm}{M+m}\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}$$

であり，左辺の換算質量の項を  $M \gg m$  で1次近似すると  $\frac{Mm}{M+m} = \frac{m}{1+\frac{m}{M}} \simeq m$  となる．

また， $M$  の位置を原点とすると，重心位置は

$$\boldsymbol{x}_G = \frac{m}{M+m}\boldsymbol{x}$$

となり， $M \gg m$  で1次近似すると  $\boldsymbol{x}_G = \frac{m}{1+\frac{m}{M}}\boldsymbol{x} \simeq 0$  となる．このため，重心に対する  $m$  の位置は  $M$  に対する  $m$  の位置と一致する．

したがって，運動方程式は

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}$$

となり， $M$  が静止している場合の  $m$  の運動方程式と一致する．

### [問題 2]

(1) 人工衛星は地球より質量が十分に小さいので，地球が静止しているとして扱ってよい．この場合，人工衛星の公転速度は  $v_{\text{sat}} = \frac{2\pi r_{\text{sat}}}{T_{\text{sat}}}$  なので，地球と人工衛星の質量をそれぞれ  $M$  と  $m$  としたときの運動方程式は

$$G\frac{Mm}{r_{\text{sat}}^2} = mr_{\text{sat}}\left(\frac{2\pi}{T_{\text{sat}}}\right)^2$$

となる．これを解くと，

$$M = \left(\frac{2\pi}{T_{\text{sat}}}\right)^2 \frac{r_{\text{sat}}^3}{G}$$

であり，人工衛星の地球中心からの距離は  $r_{\text{sat}} = h + R$  も考慮して，値を代入すると  $M = 5.99 \times 10^{24}$  kg となる．

なお，より精密な見積もりでは，地球の質量は  $5.97 \times 10^{24}$  kg とされている．

(2) 地球と月の2体だと考えると、両者の相対位置の加速度は  $r \left( \frac{2\pi}{T_m} \right)^2$  なので、内部運動の運動方程式は

$$\frac{Mm}{M+m} r \left( \frac{2\pi}{T_m} \right)^2 = G \frac{Mm}{r^2}$$

となる。したがって、

$$M+m = \frac{r^3}{G} \left( \frac{2\pi}{T_m} \right)^2$$

であり、これに値を代入すると  $M+m = 6.07 \times 10^{24}$  kg となる。

(3) ここまでの結果から、月の質量は  $m = M+m - M = 7.98 \times 10^{22}$  kg となるので、地球質量との比は  $1.33 \times 10^{-2}$  あるいは地球の質量は月の75.1倍となる。したがって、月と地球の共通重心は地球の中心から  $\frac{m}{M+m} r = 5.06 \times 10^3$  km となる。地球の半径  $R = 6500$  km と比べるとかなり離れているといえるが、地球の内部ではある。

なお、より精密な見積もりでは月の質量は  $7.35 \times 10^{22}$  kg で、地球の質量はその81倍であるとされる。

### [問題3]

この場合、式(5.3.18)は

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) \times m_i \dot{\mathbf{x}}_i$$

となる。ここで、 $\mathbf{x}_0$  は時間が経っても移動しないので、

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) = \dot{\mathbf{x}}_i$$

を用いた。

これを時間微分すると、

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) \times m_i \dot{\mathbf{x}}_i \right) = \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{x}}_i \times m_i \dot{\mathbf{x}}_i + \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) \times m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \\ &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) \times m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \end{aligned}$$

これに運動方程式 (5.3.1) を代入すると以下の式を得る.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{L}} &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) \times \left( \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{F}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) \times \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{ij} + \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{F}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{f}_{ij} + \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{F}_i\end{aligned}$$

この第1項は原点周りの回転の場合と同じように考えれば、以下のように0となる。まず、 $i$ と $j$ の変数を交換し、内力に関する作用反作用の法則から  $\mathbf{f}_{ji} = -\mathbf{f}_{ij}$  であることを用い、和を求める順番を入れ替えると、

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{f}_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{f}_{ji} = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{f}_{ij}$$

となる。この両辺に  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{f}_{ij}$  を加えると、

$$2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{f}_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \times \mathbf{f}_{ij}$$

が得られる。ここで、内力  $\mathbf{f}_{ij}$  が2つの質点を結ぶ直線と平行ならば、上記は0になる。

結局、この場合には

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{F}_i$$

であることがわかる。この右辺は  $i$  番目の質点に加わる外力によるトルク  $\mathbf{N}_i = (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{F}_i$  の総和なので、

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i = \mathbf{N}$$

であることが導ける。ここで、 $\mathbf{N}$  は外力による全トルクである。

[問題 4]

三角形の頂点 A, B, C の位置ベクトルをそれぞれ  $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_C$  とする. この場合, B と C の中点 M の位置ベクトルは  $\mathbf{x}_M = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_B + \mathbf{x}_C)$  であるから, 図形としての三角形の重心の位置  $G'$ , すなわち, 両者を 1:2 に内分する点の位置ベクトルは

$$\mathbf{x}_{G'} = \frac{1}{3}(\mathbf{x}_A + 2\mathbf{x}_M) = \frac{1}{3}(\mathbf{x}_A + \mathbf{x}_B + \mathbf{x}_C)$$

である.

一方, A, B, C に位置する同質量  $m$  の質点系の重心は定義により

$$\mathbf{x}_G = \frac{1}{3m}(m\mathbf{x}_A + m\mathbf{x}_B + m\mathbf{x}_C) = \frac{1}{3}(\mathbf{x}_A + \mathbf{x}_B + \mathbf{x}_C)$$

である.

これは,  $\mathbf{x}_{G'}$  と等しい.

(次ページに続く)

[問題5]

まず、三角形の幾何学的重心の位置を定義にしたって求めてみる。三角形の頂点A,B,Cの位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_C$ とする。

座標軸は計算が簡単になるように決めてよいので、三角形の頂点A,B,Cに対して、鋭角となっている頂点(の1つ)をAとし、そこを原点、辺ABを $x$ 軸とする。こうすると、各点の位置座標はそれぞれ、 $(0,0), (b_x, 0), (c_x, c_y)$ と置くことができる。

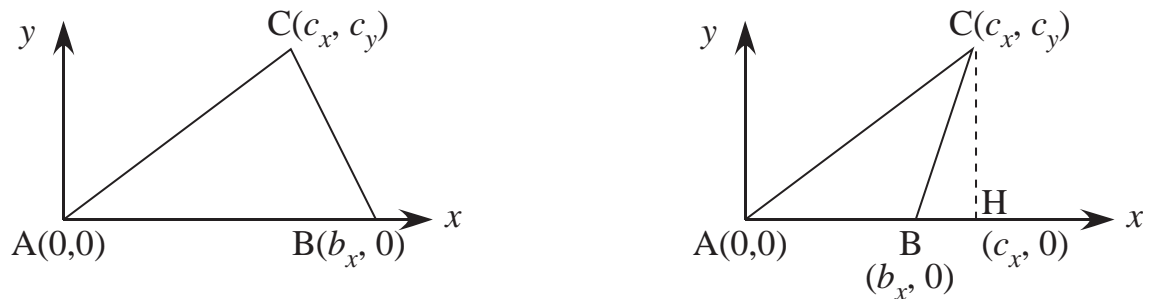


図8: 三角形板の頂点とその座標。(左)鋭角三角形の場合。(右)鈍角三角形の場合は鈍角である頂点をBとする。

この場合、辺AB, AC, BCは、それぞれ以下の式で表せる。

$$\begin{aligned} \text{辺 AB : } y &= 0 \\ \text{辺 AC : } y &= \frac{c_y}{c_x}x \\ \text{辺 BC : } y &= \frac{c_y}{c_x - b_x}(x - b_x) \end{aligned}$$

これを $x$ について解くと

$$\begin{aligned} \text{辺 AC : } x &= \frac{c_x}{c_y}y \\ \text{辺 BC : } x &= \frac{c_x - b_x}{c_y}y + b_x \end{aligned}$$

である。

次に、一様な板の力学的重心位置を定義にしたがって求めてみる。そのために、板の密度 $\rho$ を厚さ方向に積分した量を

$$\sigma = \int_0^t \rho dz = \rho t$$

とする．三角形の全質量  $M$  は

$$M = \sigma \frac{1}{2} b_x c_y = \frac{\rho t b_x c_y}{2} \quad (1)$$

である．したがって，この板の重心  $(x_G, y_G)$  は以下の式で求められる．

まず， $x$  座標は，以下ようになる．

i)  $b_x \geq c_x$  の場合

$$\begin{aligned} Mx_G &= \iint \rho x \, dx \, dz \\ &= \sigma \left( \int_0^{c_x} \frac{c_y}{c_x} x^2 \, dx + \int_{c_x}^{b_x} \frac{c_y}{c_x - b_x} (x - b_x) x \, dx \right) \\ &= \sigma \left( \int_0^{c_x} \frac{c_y}{c_x} x^2 \, dx + \int_{c_x}^{b_x} \frac{c_y}{c_x - b_x} (x - b_x)^2 \, dx + \int_{c_x}^{b_x} \frac{c_y}{c_x - b_x} (x - b_x) b_x \, dx \right) \\ &= \sigma \left( \left[ \frac{c_y}{3c_x} x^3 \right]_0^{c_x} + \left[ \frac{c_y}{3(c_x - b_x)} (x - b_x)^3 \right]_{c_x}^{b_x} + \left[ \frac{b_x c_y}{2(c_x - b_x)} (x - b_x)^2 \right]_{c_x}^{b_x} \right) \\ &= \sigma \left( \frac{c_y c_x^2}{3} - \frac{c_y (c_x - b_x)^2}{3} - \frac{b_x c_y (c_x - b_x)}{2} \right) \\ &= \sigma \left( \frac{2}{3} b_x c_x c_y - \frac{1}{3} b_x^2 c_y + \frac{1}{2} b_x^2 c_y - \frac{1}{2} b_x c_x c_y \right) \\ &= \frac{\sigma}{6} (b_x c_x c_y + b_x^2 c_y) = \frac{\rho b_x c_y t}{6} (b_x + c_x) \end{aligned}$$

ii)  $b_x < c_x$  の場合

$\triangle ABC$  の面積は，点  $(c_x, 0)$  を点  $H$  とすると， $\triangle ACH$  の面積から  $\triangle BCH$  の面積を減じたものなので，以下の積分で求められる．

$$\begin{aligned} Mx_G &= \sigma \left( \int_0^{c_x} \frac{c_y}{c_x} x^2 \, dx - \int_{b_x}^{c_x} \frac{c_y}{c_x - b_x} (x - b_x) x \, dx \right) \\ &= \sigma \left( \frac{1}{3} c_y c_x^2 - \frac{c_y}{c_x - b_x} \left( \frac{c_x^3 - b_x^3}{3} - b_x c_y \frac{c_x^2 - b_x^2}{2} \right) \right) \\ &= \frac{\sigma}{6} (2c_x^2 c_y - 2c_y (c_x^2 + b_x c_x + b_x^2) + 3b_x c_y (c_x + b_x)) \\ &= \frac{\sigma}{6} (-2b_x c_x c_y - 2b_x^2 c_y + 3b_x c_x c_y + 3b_x^2 c_y) \\ &= \frac{\sigma}{6} (b_x c_x c_y + b_x^2 c_y) = \frac{\rho b_x c_y t}{6} (b_x + c_x) \end{aligned}$$



よって、どちらの場合でも等しく、式(1)を用いれば、 $x_G = \frac{1}{3}(b_x + c_x)$ となる。  
 $y$ 座標は

$$\begin{aligned} My_G &= \iint \rho y \, dy \, dz \\ &= \sigma \int_0^{c_y} \left( \frac{c_x - b_x}{c_y} y^2 + b_x y - \frac{c_x}{c_y} y^2 \right) dy \\ &= \sigma \int_0^{c_y} \left( b_x y - \frac{b_x}{c_y} y^2 \right) dy = \sigma \left[ \frac{b_x}{2} y^2 - \frac{b_x}{3c_y} y^3 \right]_0^{c_y} \\ &= \rho t \frac{1}{6} b_x c_y^2 = M \frac{1}{3} c_y \end{aligned}$$

となるので、 $y_G = \frac{1}{3} c_y$ である。

一方、図形としての三角形の重心  $G'$  の座標は、出題文中に示されたヒントを用いれば、

$$\begin{aligned} x_{G'} &= \frac{(b_x + c_x)}{3} = x_G \\ y_{G'} &= \frac{1}{3} c_y = y_G \end{aligned}$$

である。

両者を比較すると、 $x$ 座標も  $y$ 座標も一致していることがわかる。つまり、三角形板の物理学的重心と図形としての重心は一致する。

(次ページに続く)

## [問題 6]

(1) 定義にしたがって求めよう. 軸に沿った断面の形状が変わらないので, 直交座標で求めるのが計算も楽だ. 3つの対称軸に対して広がり異なるので, それぞれの軸周りで計算する必要がある. まずは,  $x$  軸周りのモーメントを求める. 点  $(x, y, z)$  の  $x$  軸からの距離は  $r = \sqrt{y^2 + z^2}$  なので,

$$\begin{aligned}
 I_{1,x} &= \int \rho r^2 dx dy dz = \rho \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} dz \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} (y^2 + z^2) dx \\
 &= \rho \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} dz \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} [(y^2 + z^2)x]_{x=-\frac{a}{2}}^{x=+\frac{a}{2}} dy = \rho \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} dz \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} (y^2 + z^2)a dy \\
 &= \rho a \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} dz \left[ \frac{y^3}{3} + yz^2 \right]_{y=-\frac{b}{2}}^{y=+\frac{b}{2}} = \rho a \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \left( \frac{b^3}{12} + bz^2 \right) dz \\
 &= \rho a \left[ \frac{b^3}{12}z + b\frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} = \rho a \left( \frac{b^3}{12}c + b\frac{c^3}{12} \right) \\
 &= \rho \frac{abc(b^2 + c^2)}{12} = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)
 \end{aligned}$$

である. ここで  $m = \rho abc$  は直方体の質量.

他の2軸については同様に地道に計算しても良いが,  $a, b, c$  と3軸との関係を入れ替えて考えても答は得られる. すなわち,  $y$  軸周りなら

$$I_{1,y} = \rho \frac{abc(a^2 + c^2)}{12} = \frac{1}{12}m(a^2 + c^2)$$

$z$  軸周りなら

$$I_{1,z} = \rho \frac{abc(a^2 + b^2)}{12} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$$

となる.

(2) 計算を楽にするために回転軸周りの円柱座標を採用する. 点  $(r, \phi, z)$  の回転軸からの距離は  $r$  であり,  $dx dy dz = r d\phi dr dz$  に注意して,

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \iiint \rho r^2 dx dy dz = \int_0^l dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a r^3 \rho dr \\
 &= 2\pi \rho l \left[ \frac{1}{4}r^4 \right]_0^a = \frac{\pi}{2} \rho a^4 l = \frac{1}{2}ma^2
 \end{aligned}$$

である。ここで  $m = \rho\pi a^2 l$  は円柱の質量。

(3) 前問の解答で  $r$  の積分範囲を  $a_2$  から  $a_1$  としてもよいが、円筒の慣性モーメントの差として求めてもよい。いずれにせよ、答は

$$I_3 = I_2(a_1) - I_2(a_2) = \frac{\pi}{2}\rho l(a_1^4 - a_2^4)$$

(4) 計算を楽にするために回転軸周りの極座標を採用する。点  $(r, \theta, \phi)$  の回転軸からの距離は  $r \cos \theta$  であり、 $dx dy dz = r^2 \cos \theta d\phi d\theta dr$  に注意して、

$$\begin{aligned} I_4 &= \iiint \rho (r \cos \theta)^2 dx dy dz = \rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a dr r^4 \cos^3 \theta \\ &= 2\pi\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a dr r^4 (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta = 2\pi\rho \left[ \frac{r^5}{5} \right]_0^a \left[ \sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2\pi}{5}\rho a^5 \left( 2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{8\pi}{15}\rho a^5 = \frac{2}{5}ma^2 \end{aligned}$$

である。ここで  $m = \frac{4\pi a^3}{3}\rho$  は球の質量。

(5) 前問の解答で  $r$  の積分範囲を  $a_2$  から  $a_1$  としてもよいが、球の慣性モーメントの差として求めてもよい。いずれにせよ、答は

$$I_5 = I_4(a_1) - I_4(a_2) = \frac{8\pi}{15}\rho(a_1^5 - a_2^5)$$

である。

### [問題 7]

鳥3型宇宙植民島はアニメ「機動戦士ガンダム」のモデルとなった宇宙植民島(スペースコロニー)であり、「ガンダム」のスペースコロニーとほぼ同型である。この問題では、それが実現した際の種々の値を求めることになる。

(1) 回転運動で生じる遠心力による加速度の大きさは、回転半径を  $r$ 、回転角速度を  $\omega$  とすると、 $a = r\omega^2$  であるから、

$$g = \left( \frac{D}{2} - (d_1 + d_2) \right) \omega^2$$

となる  $\omega$  を求めればよい。すなわち、 $\omega = \sqrt{\frac{2g}{D-2(d_1+d_2)}}$  で、与えられた値を単位換算して代入すると  $\omega = 0.0495 \text{ rad s}^{-1}$  となる。角速度  $\omega$  に対する自転周期は  $\frac{2\pi}{\omega}$  なので、この角運動量に対応する自転周期は、126.8 s である。

(2) 円筒部と2つの半球部外壁、円筒部内側の土の層、円筒部内部と2つの半球部内部の空気の3つの部分に分けて計算することにしよう。

アルミ外壁の外側と内側の半径は、それぞれ、 $r_{\text{out}} = \frac{D}{2}$ ,  $r_{\text{in}} = \frac{D}{2} - d_1$  であり、円筒部内側の土部分の外側と内側の半径は、それぞれ、 $r_{\text{in}} = \frac{D}{2} - d_1$ ,  $r_{\text{ground}} = \frac{D}{2} - d_1 - d_2$  である。

本章の問題6で求めた円筒および球殻の慣性モーメントの式を用いると、アルミ外壁の慣性モーメントは以下で求められる。

$$I_1 = \frac{\pi}{2} \rho_1 (r_{\text{out}}^4 - r_{\text{in}}^4) l + \frac{8\pi}{15} \rho_1 (r_{\text{out}}^5 - r_{\text{in}}^5)$$

同じく、円筒部の土の層の慣性モーメントは

$$I_2 = \frac{\pi}{2} \rho_2 (r_{\text{in}}^4 - r_{\text{ground}}^4) l$$

また、植民島内部を満たす空気の慣性モーメントは

$$I_3 = \frac{\pi}{2} \rho_3 r_{\text{ground}}^4 l + \frac{8\pi}{15} \rho_3 r_{\text{in}}^5$$

である。

指定された値を代入すると  $I_1 = 4.20 \times 10^{19} \text{ kg m}^2$ ,  $I_2 = 3.47 \times 10^{19} \text{ kg m}^2$ ,  $I_3 = 1.88 \times 10^{19} \text{ kg m}^2$  となり、全体では  $I = 9.55 \times 10^{19} \text{ kg m}^2$  である。

(3) 外周に力  $f$  を加えると、植民島に加わるトルクは  $N = f \frac{D}{2}$  である。これによって植民島が受ける角加速度を  $\dot{\omega}$  とすると、 $N = I \dot{\omega}$  である。

一方、一定の角加速度で  $\omega = 0$  から先ほど求めた  $\omega_0 = 4.95 \times 10^{-2} \text{ rad s}^{-1}$  まで時間  $t$  で加速するのに必要な角加速度は  $\dot{\omega} = \frac{\omega_0}{t}$  である。 $t = 60 \text{ 日} = 5.184 \times 10^6 \text{ s}$  とすると、 $\dot{\omega} = 9.55 \times 10^{-9} \text{ rad s}^{-2}$  となる。

以上で求めた結果をまとめると

$$f = \frac{2N}{D} = \frac{2I\dot{\omega}}{D} = 2.28 \times 10^8 \text{ N}$$

である。

ちなみに、アポロ宇宙船打ち上げに使われたサターンVロケット1段目の推力は  $3.4 \times 10^7 \text{ N}$  なので、その6.7倍の力が必要という計算結果である。しかし、同ロケットは2000 t 近い推進剤を150 s で使い尽くすことで実現できる推力なので、このロケットエンジンを使うとしても膨大な量の推進剤が必要となる上に、推進剤自体も

円筒部と同様に回転させなければならないので、その運動のためにさらにトルクが必要となる。つまり、現在の人間のロケットエンジンの能力では、これだけのことを実現するのは未だ無理だといえよう。

(4) ロケットによる自転では推進剤が必要となり、これを地上などから輸送する必要がある。しかしながら、2基の植民島を連結して一方を自転させれば、その反作用で他方の植民島も逆向きに同じ角運動量の回転を生じさせることができる。自転させるためにロケット推進剤を使う必要もない。さらに、日照の都合などからその向きを変える場合でも、2基全体での角運動量は0となるので、角運動量ベクトルを変更する必要がなく、そうでない場合よりも作業が容易にできる。

[問題 8]

円板の密度は、質量を  $m$ 、厚さを  $b$ 、半径を  $a$  とすれば、

$$\rho = \frac{m}{\pi a^2 b}$$

なので、与えられた数値を代入すると  $\rho = 7.744 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ 。

一様密度の円柱の場合の計算結果を利用すると、円板の慣性モーメントは、

$$I = \frac{\pi}{2} \rho a^4 b$$

だったので、与えられた数値を代入すると、 $I = 3.625 \times 10^3 \text{ kg m}^2$  である。

蓄えられるエネルギーは  $E = 25 \times 10^3 \times 3600 = 9.0 \times 10^7 \text{ J}$  なので、これが、角速度  $\omega$  で回転する慣性モーメント  $I$  の物体が持つ運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

と等しい。これを  $\omega$  について解いた式に、ここまでに求めた値を代入すれば、 $\omega = \sqrt{\frac{2K}{I}} = 2.23 \times 10^2 \text{ rad s}^{-1}$  となり、1分間の回転数に換算すると  $\frac{\omega}{2\pi} \times 60 = 2130 \text{ rpm}$  である。