

2024年7月12日

過渡現象論 解答例 (Web 掲載用)

馬場吉弘 著

数理工学社

問題 1.1 初期値  $z(0) = z_0$  で, 図 1.2 の減衰振動と同じ周期の時間的変位を示す (図 1.2 の波形と横軸 ( $t$  軸)) について対称な波形となる).

問題 1.2 ばねと小物体を, 粘性減衰係数  $\gamma$  が大きい媒質 (液体など) の中に入れる.

問題 1.3 スイッチを閉じて, 直流電圧源とキャパシタンス  $C$  の間にある抵抗  $R$  とインダクタンス  $L$  に加わる電圧が  $0$  のままであるため, 電流は流れず, 過渡現象は生じない.

問題 2.1 (2.26)式に  $\theta = \varphi$  を代入することで, 電流  $i(t)$  が次のように求められる.

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \left[ \sin(\omega t + \theta - \varphi) - \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \right] = \frac{\sqrt{2}E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t)$$

したがって,  $\theta = \varphi$  の場合, 過渡解の項は  $0$  となり, 過渡現象は発生しない.

問題 2.2 過渡解は, (2.10)式で表される.

$$i_t(t) = K_t e^{-\frac{R}{L}t}$$

定常解については,  $i_s(t) = K_s$  と仮定し, (2.7)式に代入することで,

$$\frac{di_s(t)}{dt} + \frac{R}{L}i_s(t) = \frac{R}{L}K_s = \frac{1}{L}E_0$$

$i_s(t) = K_s = E_0/R$  と求められる. 以上より, 回路電流  $i(t)$  は次のように表される.

$$i(t) = i_t(t) + i_s(t) = K_t e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{R}$$

この式に, 鎖交磁束数の連続性に基づく初期条件  $i(0_+) = 0$  を代入すると, 未定係数が  $K_t = -E_0/R$  と求められ,  $i(t)$  は次のように求められる.

$$i(t) = K_t e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{R} = \frac{E_0}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

問題 2.3 過渡解は, (2.10)式で表される.

$$i_t(t) = K_t e^{-\frac{R}{L}t}$$

定常解については、未定係数を  $K_s$ 、遅れ位相角を  $\varphi$  とし、次のように仮定する。

$$i_s(t) = K_s \cos(\omega t - \varphi)$$

これを(2.7)式に代入すると、次のようになる。

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{di_s(t)}{dt} + \frac{R}{L}i_s(t) &= -\omega K_s \sin(\omega t - \varphi) + \frac{R}{L}K_s \cos(\omega t - \varphi) \\ &= K_s \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2} \left[ \cos(\omega t - \varphi) \frac{\frac{R}{L}}{\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2}} - \sin(\omega t - \varphi) \frac{\omega}{\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2}} \right] \\ &= K_s \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2} \cos(\omega t - \varphi + \varphi') \\ &= \frac{\sqrt{2}E}{L} \cos(\omega t), \quad \varphi' = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right) \end{aligned} \right.$$

上式が成立するためには、次式を満たす必要がある。

$$\left\{ \begin{aligned} K_s &= \frac{\sqrt{2}E}{L\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2}} = \frac{\sqrt{2}E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}, \quad \varphi = \varphi' = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right) \end{aligned} \right.$$

よって、 $e(t) = \sqrt{2}E \cos(\omega t)$  である場合における  $i_s$  は次のようになる。

$$i_s(t) = \frac{\sqrt{2}E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\omega t - \varphi)$$

以上より、回路電流  $i(t)$  は次のように表される。

$$i(t) = i_t(t) + i_s(t) = K_t e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\sqrt{2}E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\omega t - \varphi)$$

この式に、鎖交磁束数の連続性に基づく初期条件  $i(0_+) = 0$  を代入すると、未定

係数  $K_t$  が求められ、 $i(t)$  は次のように求められる。

$$\begin{cases} i(t) = i_i(t) + i_s(t) = \frac{\sqrt{2}E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \left[ \cos(\omega t - \varphi) - \cos(\varphi) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \right] \\ \varphi = \tan^{-1} \left( \frac{\omega L}{R} \right) \end{cases}$$

**問題 3.1**  $(R/L)^2 = 4/(CL)$  の関係があるとき、特性方程式は重解をもつ。このとき、(3.23)式および(3.32)式より、(3.4)式の一般解は、次のように表される。

$$q(t) = q_i(t) + q_s(t) = (K_{11} + K_{12}t)e^{-\alpha t} + \frac{E_0}{L \left( \lambda^2 - \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{CL} \right)} e^{-\lambda t}$$

この式を  $t$  で微分すると、回路電流  $i$  の一般解が得られる。

$$i(t) = -(\alpha K_{11} - K_{12})e^{-\alpha t} - \alpha K_{12}te^{-\alpha t} - \frac{\lambda E_0}{L \left( \lambda^2 - \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{CL} \right)} e^{-\lambda t}$$

電荷の連続性より、 $q(0_+) = 0$  であり、また、鎖交磁束数の連続性より、 $i(0_+) = 0$  であることから、これらの式の未定係数  $K_{11}$  および  $K_{12}$  は、次のように求められる。

$$\begin{cases} K_{11} = -\frac{E_0}{L \left( \lambda^2 - \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{CL} \right)}, & K_{12} = \frac{(\lambda - \alpha)E_0}{L \left( \lambda^2 - \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{CL} \right)} \end{cases}$$

したがって、回路電流  $i(t)$  は次のように求まる。

$$i(t) = \frac{[\lambda - \alpha(\lambda - \alpha)t]E_0}{L \left( \lambda^2 - \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{CL} \right)} e^{-\alpha t} - \frac{\lambda E_0}{L \left( \lambda^2 - \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{CL} \right)} e^{-\lambda t}$$

ただし、(3.15)式より、 $\alpha = R/(2L)$  である。

**問題 3.2**  $q_s(t) = K_s$  (定数) として仮定すると良い。

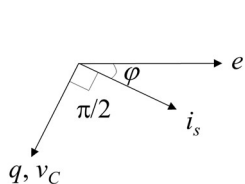
**問題 3.3** (3.9)式より、未知関数  $q_s$  とその 1 次導関数  $dq_s/dt$  および 2 次導関数

$d^2q_s/dt^2$  の定数倍の和が、 $\sqrt{2}E\sin(\omega t)/L$  に等しくなるためには、 $q_s$  も  $\sin(\omega t)$  の形をしていると考えられる。例えば、 $\omega L > 1/(\omega C)$  で、解答図 3.3 (a) に示すように、電流  $i_s$  の位相が電源電圧  $e$  の位相より  $\varphi$  遅れている場合、 $q_s$  (およびキャパシタンス電圧  $v_C$ ) の位相は  $i_s$  の位相よりさらに  $\pi/2$  遅れることから、未知定数を  $K_s$ 、電流  $i_s$  の電源電圧  $e$  に対する遅れ位相角を  $\varphi$  とし、解を次のように仮定すると良い。

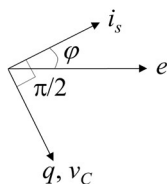
$$q_s(t) = K_s \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -K_s \cos(\omega t - \varphi)$$

また、 $\omega L < 1/(\omega C)$  で、解答図 3.3 (b) に示すように、電流  $i_s$  の位相が電源電圧  $e$  の位相より  $\varphi$  進んでいる場合、 $q_s$  (およびキャパシタンス電圧  $v_C$ ) の位相は  $i_s$  の位相より  $\pi/2$  遅れることから、未知定数を  $K_s$ 、電流  $i_s$  の電源電圧  $e$  に対する進み位相角を  $\varphi$  とし、解を次のように仮定すると良い。

$$q_s(t) = K_s \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -K_s \cos(\omega t + \varphi)$$



(a)  $\omega L > 1/(\omega C)$  の場合



(b)  $\omega L < 1/(\omega C)$  の場合

解答図 3.3 電源電圧  $e$ 、回路電流  $i_s$ 、キャパシタンス電荷  $q$  および電圧  $v_C$  のベクトル図

**問題 4.1**  $E_0$ 、閉じられた  $S$ 、 $R$  および  $L$  からなる閉路に、時計方向に電流  $i$  が流れると仮定して、キルヒホッフの電圧則を適用すると次式が得られる。

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = E_0 \quad (t \geq 0)$$

この微分方程式の一般解は、(4.11)式より、次のように与えられる。

$$\left\{ i(t) = K_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E_0}{R} \quad (t \geq 0), \quad \tau = \frac{L}{R} \right.$$

ここで、 $K_t$ は未定定数である。

鎖交磁束数の連続性より得られる次式で表される初期条件を上式に代入すると、 $K_t$ が求められる。

$$i(0_+) = i(0_-) = \frac{E_0}{R+r}$$
$$K_t = \frac{E_0}{R+r} - \frac{E_0}{R} = -\frac{r E_0}{R(R+r)}$$

したがって、 $i(t)$  は次のようになる。

$$\left\{ i(t) = \frac{E_0}{R} \left[ 1 - \frac{r}{R+r} e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \quad (t \geq 0), \quad \tau = \frac{L}{R} \right.$$

解答図 4.1 は、上式で与えられる  $i(t)$  を図示したものである。

**問題 4.2**  $E_0$ ,  $r$ ,  $R$  および  $L$  からなる閉路に、時計方向に電流  $i$  が流れると仮定して、キルヒホッフの電圧則を適用すると次式が得られる。

$$(R+r)i(t) + L \frac{di(t)}{dt} = E_0 \quad (t \geq 0)$$

この微分方程式の一般解は、(4.11)式より、次のように与えられる。

$$\left\{ i(t) = K_t e^{-\frac{t}{\tau'}} + \frac{E_0}{R+r} \quad (t \geq 0), \quad \tau' = \frac{L}{R+r} \right.$$

ここで、 $K_t$ は未定定数である。

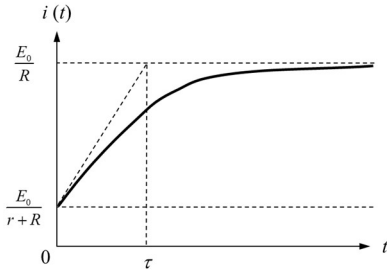
鎖交磁束数の連続性より得られる次式で表される初期条件を上式に代入すると、 $K_t$ が求められる。

$$i(0_+) = i(0_-) = \frac{E_0}{R}$$
$$K_t = \frac{E_0}{R} - \frac{E_0}{R+r} = \frac{r E_0}{R(R+r)}$$

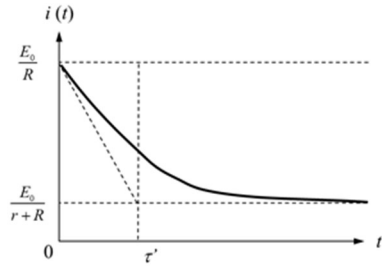
したがって、 $i(t)$  は次のようになる。

$$\left\{ i(t) = \frac{E_0}{R+r} \left[ 1 + \frac{r}{R} e^{-\frac{t}{\tau'}} \right] \quad (t \geq 0), \quad \tau' = \frac{L}{R+r} \right.$$

解答図 4.2 は、上式で与えられる  $i(t)$  を図示したものである。



解答図 4.1 回路電流  $i(t)$



解答図 4.2 回路電流  $i(t)$

**問題 4.3** S が閉じられている状態を状態 1, S が開いている状態を状態 2 とする. 状態 1 において, 閉路に時計方向に電流  $i_1$  が流れると仮定して, キルヒホッフの電圧則を適用すると次式が得られる.

$$Ri_1(t) + L \frac{di_1(t)}{dt} = E_0 \quad (0 \leq t < T)$$

この微分方程式の一般解は, (4.11)式より, 次のように与えられる.

$$\begin{cases} i_1(t) = K_{1t} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{E_0}{R} & (0 \leq t < T), \quad \tau_1 = \frac{L}{R} \end{cases}$$

ここで,  $K_{1t}$  は未定定数である.

状態 2 において, 閉路に時計方向に電流  $i_2$  が流れると仮定して, キルヒホッフの電圧則を適用すると次式が得られる.

$$(R+r)i_2(t') + L \frac{di_2(t')}{dt} = E_0 \quad (0 \leq t' < T)$$

この微分方程式の一般解は, (4.11)式より, 次のように与えられる.

$$\begin{cases} i_2(t') = K_{2t'} e^{-\frac{t'}{\tau_2}} + \frac{E_0}{R+r} & (0 \leq t' < T), \quad \tau_2 = \frac{L}{R+r} \end{cases}$$

ここで,  $K_{2t'}$  は未定定数である.

周期的な開閉操作が定常状態にあるとき,

$$\begin{cases} i_1(t=0) = I_1 \\ i_2(t'=0) = I_2 \end{cases}$$

とおくと、未定定数  $K_{1t}$  および  $K_{2t}$  は次のように表される。

$$\begin{cases} K_{1t} = I_1 - \frac{E_0}{R} \\ K_{2t} = I_2 - \frac{E_0}{R+r} \end{cases}$$

したがって、 $i_1$  および  $i_2$  は次式のように表される。

$$\begin{cases} i_1(t) = \frac{E_0}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) + I_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} & (0 \leq t < T) \\ i_2(t') = \frac{E_0}{R+r} \left( 1 - e^{-\frac{t'}{\tau_2}} \right) + I_2 e^{-\frac{t'}{\tau_2}} & (0 \leq t' < T) \end{cases}$$

ここで、次の関係が成り立つ。

$$\begin{cases} i_1(t=T) = \frac{E_0}{R} \left( 1 - e^{-\frac{T}{\tau_1}} \right) + I_1 e^{-\frac{T}{\tau_1}} = I_2 \\ i_2(t'=T) = \frac{E_0}{R+r} \left( 1 - e^{-\frac{T}{\tau_2}} \right) + I_2 e^{-\frac{T}{\tau_2}} = I_1 \end{cases}$$

この関係から、 $I_1$  および  $I_2$  は次のように求まる。

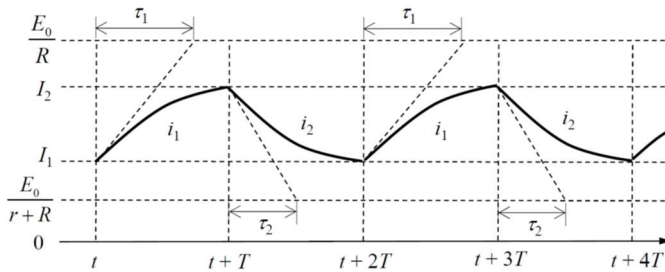
$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{1 - e^{-\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)T}} \left[ \left( 1 - e^{-\frac{T}{\tau_2}} \right) \frac{E_0}{R+r} + \left( 1 - e^{-\frac{T}{\tau_1}} \right) e^{-\frac{T}{\tau_2}} \frac{E_0}{R} \right] \\ I_2 = \frac{1}{1 - e^{-\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)T}} \left[ \left( 1 - e^{-\frac{T}{\tau_2}} \right) e^{-\frac{T}{\tau_1}} \frac{E_0}{R+r} + \left( 1 - e^{-\frac{T}{\tau_1}} \right) \frac{E_0}{R} \right] \end{cases}$$

以上より、 $i_1$  および  $i_2$  は次のように求まる。

$$\begin{cases} i_1(t) = \frac{E_0}{R} \left[ 1 - \frac{r}{R+r} \frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{1 - e^{-\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)T}} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right], & \tau_1 = \frac{L}{R} \\ i_2(t') = \frac{E_0}{R+r} \left[ 1 + \frac{r}{R} \frac{1 - e^{-\frac{t'}{\tau_1}}}{1 - e^{-\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)T}} e^{-\frac{t'}{\tau_2}} \right], & \tau_2 = \frac{L}{R+r} \end{cases}$$

解答図 4.3 は、上式で与えられる  $i_1(t)$  および  $i_2(t)$  を図示したものである。





解答図 4.3 回路電流  $i(t)$

問題 5.1  $E_0$ ,  $R_1$ ,  $C$  からなる閉路（時計方向を正とする）にキルヒホッフの電圧則を適用すると、次式が得られる.

$$R_1 i(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = E_0 \quad (t \geq 0)$$

ここで、 $i$  と  $C$  の蓄積電荷量  $q$  との関係は次のように表される.

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

この式を回路方程式に代入すると、次のようになる.

$$R_1 \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = E_0$$

この式は変数分離形であるので、次のように変形し、

$$\frac{dq(t)}{q(t) - CE_0} = -\frac{1}{R_1 C} dt$$

両辺を積分すると次式が得られる.

$$\ln[q(t) - CE_0] = -\frac{t}{R_1 C} + K_1'$$

ここで、 $K_1'$  は積分定数である. 両辺の指数をとり整理すると、次のような一般解が得られる.

$$q(t) = K_1 e^{-\frac{t}{R_1 C}} + CE_0$$

ここで、 $K_i$  は未定係数である。

キャパシタンスを含む回路においては、電荷の連続性により、 $S$  を閉じた直後のキャパシタンスの電荷量  $q(0_+)$  が求められる。  $t < 0$  において、 $C$  には  $R_2 E_0 / (R_1 + R_2)$  の電圧が加わっていることから、 $q(0_+)$  は次のように与えられる。

$$q(0_+) = q(0_-) = C \frac{R_2 E_0}{R_1 + R_2}$$

この初期条件から一般解の未定係数が次のように求められる。

$$K_i = \frac{R_2 C E_0}{R_1 + R_2} - C E_0 = -\frac{R_1 C E_0}{R_1 + R_2}$$

これより、 $q(t)$ 、 $v_C(t)$  および  $i(t)$  は次のように求められる。

$$\begin{cases} q(t) = C E_0 \left( 1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \\ v_C(t) = \frac{q(t)}{C} = E_0 \left( 1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \\ i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{R_1 C E_0}{R_1 + R_2} \frac{1}{R_1 C} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E_0}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ \tau = R_1 C \end{cases}$$

**問題 5.2**  $R$ 、 $C$ 、 $S_2$  からなる閉路（反時計方向を正とする）にキルヒホッフの電圧則を適用すると、次式が得られる。

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = 0 \quad (t \geq 0)$$

この直列回路において、 $i$  とキャパシタンス  $C$  における蓄積電荷量  $q$  の間には次の関係がある（正方向に電流  $i$  が流れると、 $C$  の蓄積電荷量  $q$  が減少するため）。

$$i(t) = -\frac{dq(t)}{dt}$$

この関係より、 $i$  の時間積分と  $q$  の関係は次式のように表される。

$$\int i(t) dt = -q(t)$$

これらを，回路方程式に代入すると，次式が得られる．

$$-R \frac{dq(t)}{dt} - \frac{1}{C} q(t) = 0 \quad (t \geq 0)$$

この式を次のように変形し，

$$\frac{dq(t)}{q(t)} = -\frac{1}{RC} dt$$

積分すると，次のようになる．

$$\ln q(t) = -\frac{1}{RC} t + K_t'$$

ここで， $K_t'$ は積分定数である．両辺の指数をとると，一般解が次のように得られる．

$$q(t) = e^{-\frac{1}{RC} t} e^{K_t'} = K_t e^{-\frac{1}{RC} t}$$

キャパシタンスを含む回路においては，電荷の連続性により， $S$ を閉じた直後のキャパシタンスの電荷量  $q(0_+)$ が求められる． $t < 0$ において， $C$ には  $E_0$ の電圧が加わっていることから， $q(0_+)$ は次のように与えられる．

$$q(0_+) = q(0_-) = CE_0$$

この初期条件より，未定係数が次のように定められる．

$$K_t = CE_0$$

これより， $q(t)$ ， $v_c(t)$  および  $i(t)$  は次のように求められる．

$$\begin{cases} q(t) = CE_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \\ v_c(t) = \frac{q(t)}{C} = E_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \\ i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = \frac{E_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ \tau = RC \end{cases}$$

問題 5.3 S を閉じた後の  $R_1$  に上側から流入する電流を  $i_1$ ,  $R_2$  に上側から流入する電流を  $i_2$ ,  $C_1$  の蓄積電荷量を  $q_1$  (上側を正),  $C_2$  の蓄積電荷量を  $q_2$  (上側を正) とすると, 次の関係が成立する.

$$\begin{cases} \frac{q_1(t)}{C_1} = R_1 i_1(t) \\ \frac{q_2(t)}{C_2} = R_2 i_2(t) \\ \frac{q_1(t)}{C_1} + \frac{q_2(t)}{C_2} = E_0 \\ i_1(t) + \frac{dq_1(t)}{dt} = i_2(t) + \frac{dq_2(t)}{dt} \end{cases} \quad (t \geq 0)$$

第 1 式と第 2 式を第 4 式に代入し,  $i_1, i_2$  を消去し整理すると, 次式が得られる.

$$\begin{cases} \frac{q_1(t)}{R_1 C_1} + \frac{dq_1(t)}{dt} = \frac{q_2(t)}{R_2 C_2} + \frac{dq_2(t)}{dt} \\ \frac{d}{dt} [q_2(t) - q_1(t)] = \frac{q_1(t)}{R_1 C_1} - \frac{q_2(t)}{R_2 C_2} \end{cases}$$

$q$  を次のように定義し,

$$q(t) \triangleq q_2(t) - q_1(t)$$

これを第 3 式に代入し,  $q_1, q_2$  それぞれを  $q$  で表すと, 次のようになる.

$$\begin{cases} q_1(t) = \left( E_0 - \frac{q(t)}{C_2} \right) \Big/ \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \\ q_2(t) = \left( E_0 + \frac{q(t)}{C_1} \right) \Big/ \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \end{cases}$$

これらを,  $d(q_2 - q_1)/dt$  の式に代入すると, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{dq(t)}{dt} &= \frac{q_1(t)}{R_1 C_1} - \frac{q_2(t)}{R_2 C_2} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \left( \frac{E}{R_1 C_1} - \frac{q(t)}{R_1 C_1 C_2} - \frac{E}{R_2 C_2} + \frac{q(t)}{R_2 C_1 C_2} \right) \\ &= -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} \left[ q(t) - \frac{R_2 C_2 - R_1 C_1}{R_1 + R_2} E_0 \right] \end{aligned}$$

この式を変形し積分すると, 次式が得られる.

$$\ln \left[ q(t) - \frac{R_2 C_2 - R_1 C_1}{R_1 + R_2} E_0 \right] = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} t + K_t'$$

ここで、 $K_t'$ は積分定数である。両辺の指数をとると、一般解が次のように得られる。

$$q(t) = \frac{R_2 C_2 - R_1 C_1}{R_1 + R_2} E_0 + e^{K_t'} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} t} = \frac{R_2 C_2 - R_1 C_1}{R_1 + R_2} E_0 + K_t e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} t}$$

初期電荷量  $q_1(0_+)$ ,  $q_2(0_+)$  および  $q(0_+) = q_2(0_+) - q_1(0_+)$  が 0 であるとき、 $q(t)$ ,  $q_1(t)$  および  $q_2(t)$  は次のように表される。

$$\left\{ \begin{array}{l} q(t) = \frac{R_2 C_2 - R_1 C_1}{R_1 + R_2} E_0 \left[ 1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} t} \right] \\ q_1(t) = \left( E_0 - \frac{q(t)}{C_2} \right) \Big/ \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \\ \quad = \frac{C_1 E_0}{(R_1 + R_2)(C_1 + C_2)} \left[ R_1 (C_1 + C_2) + (R_2 C_2 - R_1 C_1) e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} t} \right] \\ q_2(t) = \left( E_0 + \frac{q(t)}{C_1} \right) \Big/ \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \\ \quad = \frac{C_2 E_0}{(R_1 + R_2)(C_1 + C_2)} \left[ R_2 (C_1 + C_2) - (R_2 C_2 - R_1 C_1) e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} t} \right] \end{array} \right.$$

したがって、 $C_1$  および  $C_2$  両端の電圧は次のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{C_1}(t) = \frac{q_1(t)}{C_1} = \frac{E_0}{(R_1 + R_2)(C_1 + C_2)} \left[ R_1 (C_1 + C_2) + (R_2 C_2 - R_1 C_1) e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} t} \right] \\ v_{C_2}(t) = \frac{q_2(t)}{C_2} = \frac{E_0}{(R_1 + R_2)(C_1 + C_2)} \left[ R_2 (C_1 + C_2) - (R_2 C_2 - R_1 C_1) e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} t} \right] \end{array} \right.$$

**問題 6.1** 初期条件  $q(0_+) = CV_0$  を(6.53)式に代入すると、 $K_{t1}$ が求まる。

$$K_{t1} = -C(E_0 - V_0)$$

また、初期条件  $i(0_+) = 0$  と  $K_{t1}$  を(6.56)式に代入すると、 $K_{t2}$ が求まる。

$$K_{t_2} = \alpha K_{t_1} = -\alpha C(E_0 - V_0)$$

これらより,  $q(t)$ ,  $v_C(t)$  および  $i(t)$  は次のようになる.

$$\begin{cases} q(t) = (K_{t_1} + K_{t_2}t)e^{-\alpha t} + CE_0 = -C(E_0 - V_0)(1 + \alpha t)e^{-\alpha t} + CE_0 \\ v_C(t) = \frac{q(t)}{C} = -(E_0 - V_0)(1 + \alpha t)e^{-\alpha t} + E_0 \\ i(t) = (-\alpha K_{t_1} + K_{t_2})e^{-\alpha t} - \alpha K_{t_2}t e^{-\alpha t} = \alpha^2 C(E_0 - V_0)t e^{-\alpha t} \\ \alpha = \frac{R}{2L} \end{cases}$$

**問題 6.2**  $C$ ,  $S_2$  および  $L$  からなる閉路に, 時計方向に電流  $i$  が流れるものとして, キルヒホッフの電圧則を適用すると, 次式が得られる.

$$L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = 0 \quad (t \geq 0)$$

この直列回路において,  $i$  とキャパシタンス  $C$  における蓄積電荷量  $q$  の間には次の関係がある (正電流が流れると, 蓄積電荷量が減少するため).

$$i(t) = -\frac{dq(t)}{dt}$$

したがって,  $i$  の時間微分および積分は次のように表される.

$$\begin{cases} \frac{di(t)}{dt} = -\frac{d^2q(t)}{dt^2} \\ \int i(t) dt = -q(t) \end{cases}$$

これらを回路方程式に代入すると, 次式のようになる.

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{1}{CL}q(t) = 0$$

この微分方程式の一般解は, (6.13)式で与えられる.

$$\begin{cases} q(t) = K'_1 \cos(\beta' t) + K'_2 \sin(\beta' t) \\ \beta' = \frac{1}{\sqrt{CL}} \end{cases}$$

電流  $i(t)$  の一般解は、次のようになる。

$$i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = \beta' K'_1 \sin(\beta' t) - \beta' K'_2 \cos(\beta' t)$$

上式に初期条件  $q(0_+) = CE_0$  および  $i(0_+) = 0$  を代入すると、未定係数が次のように定まり、

$$\{K'_1 = CE_0, \quad K'_2 = 0$$

$i(t)$  は次のように求められる。

$$\left\{ \begin{aligned} i(t) &= \beta' CE_0 \sin(\beta' t) = \frac{CE_0}{\sqrt{CL}} \sin(\beta' t) = \frac{E_0}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \sin(\beta' t), & \beta' &= \frac{1}{\sqrt{CL}} \end{aligned} \right.$$

**問題 6.3**  $R_2$ ,  $L$  および  $C$  での電圧降下は等しいため、次式が成立する。

$$R_2 i_1(t) = L \frac{di_2(t)}{dt} = \frac{1}{C} \int i_3(t) dt$$

この関係から、次式が導かれる。

$$\left\{ \begin{aligned} i_1(t) &= \frac{L}{R_2} \frac{di_2(t)}{dt} \\ i_3(t) &= CL \frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} \end{aligned} \right.$$

$E_0$ ,  $S$ ,  $R_1$  および  $R_2$  からなる閉路に、キルヒホッフの電圧則を適用すると、次式が得られる。

$$\left\{ \begin{aligned} &R_1 [i_1(t) + i_2(t) + i_3(t)] + R_2 i_1(t) \\ &= (R_1 + R_2) \frac{L}{R_2} \frac{di_2(t)}{dt} + R_1 i_2(t) + R_1 CL \frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} = E_0 \end{aligned} \right. \quad (t \geq 0)$$

この式を整理すると、次のようになる。

$$\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} \frac{di_2(t)}{dt} + \frac{1}{CL} i_2(t) = \frac{E_0}{R_1 CL}$$

これは、定係数 2 階線形常微分方程式である。この微分方程式の一般解  $i_2$  は、

同次形微分方程式の一般解（過渡解） $i_{2t}$  と非同次形微分方程式の特殊解（定常解） $i_{2s}$  の和として、次のように表される。

$$\begin{cases} \frac{d^2 i_{2t}(t)}{dt^2} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} \frac{di_{2t}(t)}{dt} + \frac{1}{CL} i_{2t}(t) = 0 \\ \frac{d^2 i_{2s}(t)}{dt^2} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} \frac{di_{2s}(t)}{dt} + \frac{1}{CL} i_{2s}(t) = \frac{E_0}{R_1 CL} \\ i_2(t) = i_{2t}(t) + i_{2s}(t) \end{cases}$$

同次形微分方程式の特性方程式は次式のようにになる。

$$m^2 + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} m + \frac{1}{CL} = 0$$

この2次方程式の解は、解の公式より、次のように求められる（重解）。

$$m = \frac{1}{2} \left[ -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} \pm \sqrt{\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}\right)^2 - \frac{4}{CL}} \right] = -\frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2 C}$$

ここで、

$$m = -\alpha = -\frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2 C} \quad (m < 0, 0 < \alpha)$$

とおくと、同次形微分方程式の一般解は次のように表される。

$$i_{2t}(t) = K_{t1} e^{-\alpha t} + K_{t2} t e^{-\alpha t} = (K_{t1} + K_{t2} t) e^{-\alpha t}$$

ここで、 $K_{t1}$  および  $K_{t2}$  は未定係数である。

次に、非同次形微分方程式の特殊解  $i_{2s}$  を求める。未知関数  $i_{2s}$  とその1次導関数  $di_{2s}/dt$  および2次導関数  $d^2 i_{2s}/dt^2$  の定数倍の和が、定数  $E_0/(R_1 CL)$  に等しくなるためには、 $i_{2s}$  も定数であると予想される。このことから、解を次のような定数と仮定する。

$$i_{2s}(t) = K_s$$

この仮定した解を(6.80)式に代入すると、次のようになる。



$$\frac{d^2 i_{2s}(t)}{dt^2} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} \frac{di_{2s}(t)}{dt} + \frac{1}{CL} i_{2s}(t) = 0 + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} 0 + \frac{1}{CL} K_s = \frac{E_0}{R_1 CL}$$

これより、 $K_s$ は次のように求められる。

$$i_{2s}(t) = K_s = \frac{E_0}{R_1}$$

以上より、 $i_2(t)$ は次のようになる。

$$i_2(t) = i_{2r}(t) + i_{2s}(t) = (K_{r1} + K_{r2}t)e^{-\alpha t} + \frac{E_0}{R_1}$$

また、 $i_1(t)$ 、 $i_3(t)$ は次のようになる。

$$\begin{cases} i_1(t) = \frac{L}{R_2} \frac{di_2(t)}{dt} = \frac{L}{R_2} [-\alpha K_{r1} + K_{r2} - \alpha K_{r2}t] e^{-\alpha t} \\ i_3(t) = CL \frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} = CL [\alpha^2 K_{r1} - 2\alpha K_{r2} + \alpha^2 K_{r2}t] e^{-\alpha t} \end{cases}$$

未定係数  $K_{r1}$  および  $K_{r2}$  は、次の初期条件を代入することで求められる。

$$\begin{cases} i_2(0_+) = 0 \\ i_3(0_+) = \frac{E_0}{R_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_{r1} = -\frac{E_0}{R_1} \\ K_{r2} = \frac{\alpha K_{r1}}{2} - \frac{E_0}{2\alpha R_1 CL} = -\frac{\alpha E_0}{2R_1} - \frac{E_0}{2\alpha R_1 CL} = -\frac{E_0}{2R_1} \left( \alpha + \frac{1}{\alpha CL} \right) \\ = -\frac{E_0}{2R_1} \left[ \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2 C} + \frac{2R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} \right] \end{cases}$$

したがって、 $i_2(t)$ は次のようになる。

$$\begin{cases} i_2(t) = (K_{r1} + K_{r2}t)e^{-\alpha t} + \frac{E_0}{R_1} \\ = \frac{E_0}{R_1} (1 - e^{-\alpha t}) - \frac{E_0}{2R_1} \left[ \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2 C} + \frac{2R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} \right] t e^{-\alpha t} \quad (t \geq 0), \quad \alpha = \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2 C} \end{cases}$$

$i_1(t)$  および  $i_3(t)$  は,  $i_2(t)$  の 1 階微分および 2 階微分から求められる.

$$\begin{cases} i_1(t) = \frac{L}{R_2} \frac{di_2(t)}{dt} \\ i_3(t) = CL \frac{d^2i_2(t)}{dt^2} \end{cases}$$

**問題 7.1** 時間  $t=0$  において,  $S$  を閉じた後, 時計方向に電流  $i$  が流れるものと仮定し, この電流が流れる閉路にキルヒホッフの電圧則を適用すると, 次式が得られる.

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = \sqrt{2} E \sin(\omega t) \quad (t \geq 0)$$

この式を整理すると, 次のようになる.

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = \frac{1}{L} \sqrt{2} E \sin(\omega t) \quad (t \geq 0)$$

上式において, 右辺を 0 とおいた同次形微分方程式を次に示す.

$$\frac{di_t(t)}{dt} + \frac{R}{L} i_t(t) = 0 \quad (t \geq 0)$$

この式は変数分離形であるので, 次のように変形し,

$$\frac{di_t(t)}{i_t(t)} = -\frac{R}{L} dt$$

両辺を積分すると, 次のようになる.

$$\ln i_t(t) = -\frac{R}{L} t + K_t'$$

ここで,  $K_t'$  は積分定数である. 両辺の指数をとると, 同次形方程式の一般解が次のように得られる.

$$\begin{cases} i_t(t) = e^{-\frac{R}{L} t} e^{K_t'} = K_t e^{-\frac{t}{\tau}}, & \tau = \frac{L}{R} \end{cases}$$

ここで,  $K_t$  は未定係数,  $\tau$  は時定数である.

次に, 非同次形微分方程式の特殊解 (定常解)  $i_s$  を次のように仮定する.

$$i_s(t) = K_s \sin(\omega t - \varphi)$$

この仮定した解を非同次形微分方程式に代入すると、次のようになる。

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{di_s(t)}{dt} + \frac{R}{L} i_s(t) &= \omega K_s \cos(\omega t - \varphi) + \frac{R}{L} K_s \sin(\omega t - \varphi) \\ &= K_s \sqrt{(R/L)^2 + \omega^2} \left[ \begin{aligned} &\sin(\omega t - \varphi) \frac{(R/L)}{\sqrt{(R/L)^2 + \omega^2}} \\ &+ \cos(\omega t - \varphi) \frac{\omega}{\sqrt{(R/L)^2 + \omega^2}} \end{aligned} \right] \\ &= K_s \sqrt{(R/L)^2 + \omega^2} \sin(\omega t - \varphi + \varphi') = \frac{1}{L} \sqrt{2} E \sin(\omega t) \\ \varphi' &= \tan^{-1} \left( \frac{\omega L}{R} \right) \end{aligned} \right.$$

上式が成立するためには、次式を満たす必要がある。

$$\left\{ \begin{aligned} K_s &= \frac{\sqrt{2} E}{L \sqrt{(R/L)^2 + \omega^2}} = \frac{\sqrt{2} E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}, & \varphi = \varphi' &= \tan^{-1} \left( \frac{\omega L}{R} \right) \end{aligned} \right.$$

よって、 $e(t) = \sqrt{2} E \sin(\omega t)$  である場合における特殊解  $i_s$  は次のようになる。

$$\left\{ \begin{aligned} i_s(t) &= \frac{\sqrt{2} E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \varphi), & \varphi &= \tan^{-1} \left( \frac{\omega L}{R} \right) \end{aligned} \right.$$

一般解は次のように表される。

$$i(t) = i_r(t) + i_s(t) = K_r e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\sqrt{2} E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \varphi)$$

この式の未定係数  $K_r$  は、 $t = 0_+$  における  $i(0_+)$  の値（初期条件）を代入することで求められる。図 7.4 の回路において、 $t < 0$  においては S が開放されているため、 $i(t) = 0$  であり、S を閉じる直前における電流（これを  $i(0_-)$  とおく）も 0 である。鎖交磁束数の連続性を、S を閉じる前後に適用すると、次式が得られる。

$$Li(0_+) = Li(0_-) = 0$$

この初期条件を代入すると、未定係数が次のように求められる。

$$K_t = \frac{\sqrt{2} E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin \varphi$$

これより、回路方程式の解は次のように定まる。

$$\left\{ i(t) = \frac{\sqrt{2} E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \left[ \sin(\omega t - \varphi) + \sin \varphi e^{-\frac{t}{\tau}} \right], \quad \varphi = \tan^{-1} \left( \frac{\omega L}{R} \right) \right.$$

**問題 7.2**  $R_1$ ,  $R_2$  および  $L$  が接続されている節点にキルヒホッフの電流則を適用すると、次式が得られる。

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)$$

次に、 $e(t)$ ,  $R_1$  および  $R_2$  からなる閉路（時計方向を正とする）と  $L$  および  $R_2$  からなる閉路（時計方向を正とする）にキルヒホッフの電圧則を適用すると、次式が得られる。

$$R_1 i_1(t) + R_2 i_2(t) = \sqrt{2} E \sin(\omega t) \quad (t \geq 0)$$

$$-R_2 i_2(t) + L \frac{di_3(t)}{dt} = 0 \quad (t \geq 0)$$

以上の式から、 $i_1$  および  $i_2$  を消去し整理すると次式が得られる。

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{di_3(t)}{dt} + \frac{R'}{L} i_3(t) &= \frac{\sqrt{2} E R_2}{(R_1 + R_2) L} \sin(\omega t) \quad (t \geq 0) \\ R' &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \end{aligned} \right.$$

上式において、右辺を 0 とおいた同次形微分方程式を次に示す。

$$\frac{di_{3t}(t)}{dt} + \frac{R'}{L} i_{3t}(t) = 0 \quad (t \geq 0)$$

この同次形方程式の一般解は次のように与えられる。

$$\left\{ i_{3t}(t) = K_t e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = \frac{L}{R'} = \frac{(R_1 + R_2) L}{R_1 R_2} \right.$$

ここで、 $K_t$  は未定係数、 $\tau$  は時定数である。

次に、非同次形微分方程式の特殊解（定常解） $i_{3s}$  を次のように仮定する。

$$i_{3s}(t) = K_s \sin(\omega t - \varphi)$$

この仮定した解を非同次形微分方程式に代入すると、次のようになる。

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{di_{3s}(t)}{dt} + \frac{R'}{L} i_{3s}(t) &= \omega K_s \cos(\omega t - \varphi) + \frac{R'}{L} K_s \sin(\omega t - \varphi) \\ &= K_s \sqrt{(R'/L)^2 + \omega^2} \left[ \sin(\omega t - \varphi) \frac{(R'/L)}{\sqrt{(R'/L)^2 + \omega^2}} + \cos(\omega t - \varphi) \frac{\omega}{\sqrt{(R'/L)^2 + \omega^2}} \right] \\ &= K_s \sqrt{(R'/L)^2 + \omega^2} \sin(\omega t - \varphi + \varphi') \\ &= \frac{\sqrt{2}ER_2}{(R_1 + R_2)L} \sin(\omega t), \quad \varphi' = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R'}\right) \end{aligned} \right.$$

上式が成立するためには、次式を満たす必要がある。

$$\left\{ \begin{aligned} K_s &= \frac{\sqrt{2}ER_2}{(R_1 + R_2)L\sqrt{(R'/L)^2 + \omega^2}} = \frac{\sqrt{2}ER_2}{(R_1 + R_2)\sqrt{R'^2 + (\omega L)^2}}, \quad \varphi = \varphi' = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R'}\right) \end{aligned} \right.$$

よって、 $e(t) = \sqrt{2}E \sin(\omega t)$  である場合における特殊解  $i_{3s}$  は次のようになる。

$$\left\{ \begin{aligned} i_{3s}(t) &= \frac{\sqrt{2}ER_2}{(R_1 + R_2)\sqrt{R'^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \varphi), \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R'}\right) \end{aligned} \right.$$

これらから、一般解は次のように表される。

$$\left\{ \begin{aligned} i_3(t) = i_{3i}(t) + i_{3s}(t) &= K_i e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\sqrt{2}ER_2}{(R_1 + R_2)\sqrt{R'^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \varphi) \\ \varphi &= \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R'}\right) \end{aligned} \right.$$

この式の未定係数  $K_i$  は、 $t=0+$  における  $i_3(0+)$  の値（初期条件）を代入することで求められる。図 7.5 の回路において、 $t < 0$  においては S が開放されているため、 $i_3(t) = 0$  であり、S を閉じる直前における電流（これを  $i_3(0-)$  とおく）も 0 である。鎖交磁束数の連続性を、S を閉じる前後に適用すると、次式が得られる。

$$Li_3(0_+) = Li_3(0_-) = 0$$

この初期条件を代入すると、未定係数が次のように求められる。

$$K_1 = -\frac{\sqrt{2}ER_2}{(R_1 + R_2)\sqrt{R'^2 + (\omega L)^2}} \sin(-\varphi) = \frac{\sqrt{2}ER_2}{(R_1 + R_2)\sqrt{R'^2 + (\omega L)^2}} \sin\varphi$$

これより、 $i_3(t)$  は次のように定まる。

$$\begin{cases} i_3(t) = \frac{\sqrt{2}ER_2}{(R_1 + R_2)\sqrt{R'^2 + (\omega L)^2}} \left[ \sin(\omega t - \varphi) + \sin\varphi e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \\ \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R'}\right), \quad R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \end{cases}$$

また、 $i_2(t)$  は次のように求まる。

$$\begin{cases} i_2(t) = \frac{L}{R_2} \frac{di_3(t)}{dt} = \frac{L}{R_2} \frac{\sqrt{2}ER_2}{(R_1 + R_2)\sqrt{R'^2 + (\omega L)^2}} \left[ \omega \cos(\omega t - \varphi) - \frac{1}{\tau} \sin\varphi e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \\ = \frac{\sqrt{2}E}{(R_1 + R_2)\sqrt{R'^2 + (\omega L)^2}} \left[ \omega L \cos(\omega t - \varphi) - R' \sin\varphi e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \end{cases}$$

$i_1(t)$  は  $i_2(t)$  と  $i_3(t)$  の和で求まる。

**問題 7.3**  $L$ ,  $R_2$  および  $R_1$  からなる閉路（時計方向を正とする）にキルヒホッフの電圧則を適用すると、次式が得られる。

$$L \frac{di_2(t)}{dt} + R_2 i_2(t) - R_1 i_1(t) = 0 \quad (t \geq 0)$$

また、

$$i_1(t) = -i_2(t) \quad (t \geq 0)$$

であることから、回路方程式は次のように表される。

$$L \frac{di_2(t)}{dt} + (R_1 + R_2) i_2(t) = 0 \quad (t \geq 0)$$

この同次形微分方程式の一般解は次のように与えられる。

$$\left\{ i_2(t) = K e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = \frac{L}{R_1 + R_2} \right.$$

ここで、 $K$  は未定係数、 $\tau$  は時定数である。

この式の未定係数  $K$  は、 $t=0+$  における  $i_2(0+)$  の値 (初期条件) が必要になる。

図 7.6 の回路において、 $t < 0$  においては  $S$  が閉じられているため、 $e$ 、 $S$ 、 $L$  および  $R_2$  からなる閉路に定常交流電流  $i_{2s}$  が流れているものとし、この閉路 (時計方向を正とする) にキルヒホッフの電圧則を適用すると、次の回路方程式が得られる。

$$L \frac{di_{2s}'(t)}{dt} + R_2 i_{2s}'(t) = \sqrt{2} E \cos(\omega t) \quad (t < 0)$$

特殊解 (定常解) を次のように仮定し、

$$i_{2s}'(t) = K_s \cos(\omega t - \varphi) \quad (t < 0)$$

回路方程式に代入すると、次式が得られる。

$$\begin{cases} -K_s \omega L \sin(\omega t - \varphi) + K_s R_2 \cos(\omega t - \varphi) \\ = K_s \sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2} \left[ \cos(\omega t - \varphi) \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2}} - \sin(\omega t - \varphi) \frac{\omega L}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2}} \right] \\ = K_s \sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2} \cos(\omega t - \varphi + \varphi') = \sqrt{2} E \cos(\omega t) \quad (t < 0) \\ \varphi' = \tan^{-1} \left( \frac{\omega L}{R_2} \right) \end{cases}$$

上式が成立するためには、次式を満たす必要がある。

$$\begin{cases} K_s = \frac{\sqrt{2} E}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2}}, & \varphi = \varphi' = \tan^{-1} \left( \frac{\omega L}{R_2} \right) \end{cases}$$

よって、 $t < 0$  における定常電流  $i_{2s}$  は次のようになる。

$$\left\{ i_{2s}'(t) = \frac{\sqrt{2} E}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2}} \cos(\omega t - \varphi), \quad \varphi = \tan^{-1} \left( \frac{\omega L}{R_2} \right) \right.$$

これより、 $S$  が開かれる直前の  $i_{2s}$  は次のようになる。

$$i_{2s}'(0_-) = \frac{\sqrt{2} E}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2}} \cos(-\varphi) = \frac{\sqrt{2} E}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2}} \cos \varphi$$

鎖交磁束数の連続性より、 $t = 0$  において、次式が成立する。

$$i_2(0_+) = i_{2s}'(0_-) = \frac{\sqrt{2} E}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2}} \cos \varphi$$

これより、未定係数  $K$  は次のように定まり、

$$K = \frac{\sqrt{2} E}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2}} \cos \varphi$$

回路電流  $i_2(t)$  および  $i_1(t)$  は次のように求まる。

$$\begin{cases} i_2(t) = -i_1(t) = K e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{\sqrt{2} E}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2}} \cos \varphi e^{-\frac{t}{\tau}} & (t \geq 0) \\ \tau = \frac{L}{R_1 + R_2}, & \varphi = \tan^{-1} \left( \frac{\omega L}{R_2} \right) \end{cases}$$

**問題 8.1** 時間  $t = 0$  において、 $S$  を閉じた後、時計方向に電流  $i$  が流れるものと仮定し、この電流が流れる閉路にキルヒホッフの電圧則を適用すると、次の回路方程式が得られる。

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = \sqrt{2} E \sin(\omega t) \quad (t \geq 0)$$

この直列回路において、 $i$  とキャパシタンス  $C$  における蓄積電荷量  $q$  の間には次の関係がある。

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

この式を回路方程式に代入し整理すると、次のようになる。

$$\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{RC} q(t) = \frac{1}{R} \sqrt{2} E \sin(\omega t) \quad (t \geq 0)$$

上式において、右辺を 0 とおいた同次形微分方程式を次に示す。

$$\frac{dq_t(t)}{dt} + \frac{1}{RC} q_t(t) = 0 \quad (t \geq 0)$$



この式は変数分離形であるので、次のように変形し、

$$\frac{dq_i(t)}{q_i(t)} = -\frac{1}{RC} dt$$

両辺を積分すると、次のようになる。

$$\ln q_i(t) = -\frac{1}{RC}t + K_i'$$

ここで、 $K_i'$ は積分定数である。両辺の指数をとると、同次形微分方程式の一般解が次のように得られる。

$$\left\{ q_i(t) = e^{-\frac{1}{RC}t} e^{K_i'} = K_i e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = RC \right.$$

ここで、 $K_i$ は未定係数、 $\tau$ は時定数である。

次に、非同次形微分方程式の特殊解（定常解） $q_s$ を、未知定数を $K_s$ 、電流 $i_s$ の電源電圧 $e$ に対する進み位相角を $\varphi$ とし、次のように仮定する（電流 $i_s$ の位相は電源電圧 $e$ の位相より進んでいると考えられるが、 $q_s$ の位相は $i_s$ の位相より $\pi/2$ 遅れるため）。

$$q_s(t) = K_s \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -K_s \cos(\omega t + \varphi)$$

この仮定した解を非同次形微分方程式に代入すると、次のようになる。

$$\left\{ \begin{aligned} & \omega K_s \sin(\omega t + \varphi) - \frac{1}{RC} K_s \cos(\omega t + \varphi) \\ & = K_s \frac{\omega}{R} \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2} \left[ \begin{aligned} & \frac{R}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \sin(\omega t + \varphi) \\ & - \frac{(1/\omega C)}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \right] \\ & = K_s \frac{\omega}{R} \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2} \sin(\omega t + \varphi - \varphi') \\ & = \frac{1}{R} \sqrt{2} E \sin(\omega t) \quad (t \geq 0), \quad \varphi' = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega CR}\right) \end{aligned} \right.$$

したがって、上式が成立するためには、次式を満たす必要がある。

$$\left\{ \begin{aligned} K_s &= \frac{\sqrt{2}E}{\omega\sqrt{R^2+(1/\omega C)^2}}, & \varphi &= \varphi' = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega CR}\right) \end{aligned} \right.$$

よって、 $e(t) = \sqrt{2}E \sin(\omega t)$  である場合における非同次形微分方程式の特殊解  $q_s$  は次のようになる。

$$\left\{ \begin{aligned} q_s(t) &= -\frac{\sqrt{2}E}{\omega\sqrt{R^2+(1/\omega C)^2}} \cos(\omega t + \varphi), & \varphi &= \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega CR}\right) \end{aligned} \right.$$

一般解は次のように表される。

$$q(t) = q_t(t) + q_s(t) = K_t e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{\sqrt{2}E}{\omega\sqrt{R^2+(1/\omega C)^2}} \cos(\omega t + \varphi)$$

キャパシタンスを含む回路においては、電荷の連続性(保存性)により、 $S$  を閉じた直後のキャパシタンスの電荷量  $q(0_+)$  が求められる。図 8.5 の回路において、 $t < 0$  では、キャパシタンスに蓄積されている電荷量が 0 であるため (これを  $q(0_-)$  とおく)、 $q(0_+)$  も 0 となる。

$$q(0_+) = q(0_-) = 0$$

この初期条件を代入すると、未定係数  $K_t$  が次のように求められる。

$$K_t = \frac{\sqrt{2}E}{\omega\sqrt{R^2+(1/\omega C)^2}} \cos \varphi$$

これより、 $q(t)$  および  $v_C(t)$  が次のように定まる。

$$\left\{ \begin{aligned} q(t) &= -\frac{\sqrt{2}E}{\omega\sqrt{R^2+(1/\omega C)^2}} \left[ \cos(\omega t + \varphi) - \cos \varphi e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \\ v_C(t) &= \frac{q(t)}{C} = -\frac{\sqrt{2}E}{\omega C \sqrt{R^2+(1/\omega C)^2}} \left[ \cos(\omega t + \varphi) - \cos \varphi e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \end{aligned} \right.$$

$q(t)$  を時間微分すると、次式が得られる。

$$\left\{ \begin{aligned}
 i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} = \frac{\sqrt{2}E}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \left[ \sin(\omega t + \varphi) - \frac{1}{\omega CR} \cos \varphi e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \\
 &= \frac{\sqrt{2}E}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \left[ \sin(\omega t + \varphi) - \tan \varphi \cos \varphi e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \\
 &= \frac{\sqrt{2}E}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \left[ \sin(\omega t + \varphi) - \sin \varphi e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \\
 \tau &= RC, \quad \varphi = \tan^{-1} \left( \frac{1}{\omega CR} \right)
 \end{aligned} \right.$$

問題 8.2  $R$ ,  $C$ ,  $S_2$  からなる閉路（反時計方向を正とする）にキルヒホッフの電圧則を適用すると、次式が得られる。

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = 0 \quad (t \geq 0)$$

この直列回路において、 $i$  とキャパシタンス  $C$  における蓄積電荷量  $q$  の間には次の関係がある（正方向に電流  $i$  が流れると、 $C$  の蓄積電荷量  $q$  が減少するため）。

$$i(t) = -\frac{dq(t)}{dt}$$

この関係より、 $i$  の時間積分は次式のように表される。

$$\int i(t) dt = -q(t)$$

これらを、回路方程式に代入すると、次式が得られる。

$$-R \frac{dq(t)}{dt} - \frac{1}{C} q(t) = 0 \quad (t \geq 0)$$

この同次形微分方程式の一般解は次のように与えられる。

$$q(t) = K_t e^{-\frac{1}{RC}t}$$

キャパシタンスを含む回路においては、電荷の連続性により、 $S$  を閉じた直

後のキャパシタンスの電荷量  $q(0_+)$  が次のように求められる。

$$q(0_+) = q(0_-) = C\sqrt{2}E \sin\left(0 + \frac{\pi}{4}\right) = CE$$

この初期条件より、未定係数が次のように定められる。

$$K_1 = CE$$

これより、 $q(t)$ 、 $v_C(t)$  および  $i(t)$  は次のようになる。

$$\begin{cases} q(t) = CE e^{-\frac{t}{\tau}}, & v_C(t) = \frac{q(t)}{C} = E e^{-\frac{t}{\tau}}, & i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = RC \end{cases}$$

**問題 8.3**  $e(t)$ ,  $R_1$ ,  $C$  からなる閉路（時計方向を正とする）にキルヒホッフの電圧則を適用すると、次式が得られる。

$$R_1 i(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = \sqrt{2}E \sin(\omega t) \quad (t \geq 0)$$

ここで、 $i$  と  $C$  の蓄積電荷量  $q$  との関係は次のように表される。

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

この式を回路方程式に代入すると、次のようになる。

$$R_1 \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = \sqrt{2}E \sin(\omega t)$$

上式において、右辺を 0 とおいた同次形微分方程式を次に示す。

$$\frac{dq_t(t)}{dt} + \frac{1}{R_1 C} q_t(t) = 0 \quad (t \geq 0)$$

この同次形微分方程式の一般解は次のように与えられる。

$$\begin{cases} q_t(t) = K_1 e^{-\frac{t}{\tau}}, & \tau = R_1 C \end{cases}$$

ここで、 $K_1$  は未定係数、 $\tau$  は時定数である。

次に、非同次形微分方程式の特殊解（定常解） $q_s$  を次のように仮定する（電流  $i_s$  の位相は電源電圧  $e$  の位相より進んでいると考えられるが、 $q_s$  の位相は  $i_s$  の位相より  $\pi/2$  遅れるため）。

$$q_s(t) = K_s \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -K_s \cos(\omega t + \varphi)$$

この仮定した解を非同次形微分方程式に代入すると、次のようになる。

$$\left\{ \begin{aligned} & \omega K_s \sin(\omega t + \varphi) - \frac{1}{R_1 C} K_s \cos(\omega t + \varphi) \\ & = K_s \frac{\omega}{R_1} \sqrt{R_1^2 + (1/\omega C)^2} \left[ \begin{aligned} & \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + (1/\omega C)^2}} \sin(\omega t + \varphi) \\ & - \frac{(1/\omega C)}{\sqrt{R_1^2 + (1/\omega C)^2}} \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \right] \\ & = K_s \frac{\omega}{R_1} \sqrt{R_1^2 + (1/\omega C)^2} \sin(\omega t + \varphi - \varphi') \\ & = \frac{1}{R_1} \sqrt{2} E \sin(\omega t) \quad (t \geq 0), \quad \varphi' = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega C R_1}\right) \end{aligned} \right.$$

したがって、上式が成立するためには、次式を満たす必要がある。

$$\left\{ \begin{aligned} & K_s = \frac{\sqrt{2} E}{\omega \sqrt{R_1^2 + (1/\omega C)^2}}, \quad \varphi = \varphi' = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega C R_1}\right) \end{aligned} \right.$$

よって、非同次形微分方程式の特殊解  $q_s$  は次のようになる。

$$\left\{ q_s(t) = -\frac{\sqrt{2} E}{\omega \sqrt{R_1^2 + (1/\omega C)^2}} \cos(\omega t + \varphi), \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega C R_1}\right) \right.$$

一般解は次のように表される。

$$q(t) = q_i(t) + q_s(t) = K_i e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{\sqrt{2} E}{\omega \sqrt{R_1^2 + (1/\omega C)^2}} \cos(\omega t + \varphi)$$

キャパシタンスを含む回路においては、電荷の連続性(保存性)により、Sを閉じた直後のキャパシタンスの電荷量  $q(0_+)$  が求められる。図 8.7 の回路において、 $t < 0$  における定常状態において、C に蓄積されている電荷量を  $q(t)$ 、 $R_1$  を右向き流れる電流を  $i_1(t)$ 、 $R_2$  を下向きに流れる電流を  $i_2(t)$ 、C を下向きに流れる電流

を  $i_3(t)$  とおくと、キルヒホッフの電流則およびキルヒホッフの電圧則より、次に示す関係が成立する。

$$\begin{cases} i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) \\ R_2 i_2(t) = \frac{1}{C} \int i_3(t) dt = \frac{q(t)}{C} \\ R_1 i_1(t) + R_2 i_2(t) = \sqrt{2} E \sin(\omega t) \end{cases}$$

上式から、 $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$  および  $i_3(t)$  を消去して、 $q(t)$  のみで回路方程式を表すと、次のようになる。

$$\left\{ \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{R'C} q(t) = \frac{\sqrt{2} E \sin(\omega t)}{R_1}, \quad R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right.$$

$t < 0$  における定常解  $q(t)$  を次のように仮定する。

$$q(t) = K \sin\left(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}\right) = -K \cos(\omega t + \phi)$$

この仮定した解を上式に代入すると、次のようになる。

$$\begin{cases} \omega K \sin(\omega t + \phi) - \frac{1}{R'C} K \cos(\omega t + \phi) \\ = K \frac{\omega}{R'} \sqrt{R'^2 + (1/\omega C)^2} \left[ \begin{array}{l} \frac{R'}{\sqrt{R'^2 + (1/\omega C)^2}} \sin(\omega t + \phi) \\ - \frac{(1/\omega C)}{\sqrt{R'^2 + (1/\omega C)^2}} \cos(\omega t + \phi) \end{array} \right] \\ = K \frac{\omega}{R'} \sqrt{R'^2 + (1/\omega C)^2} \sin(\omega t + \phi - \phi') \\ = \frac{1}{R_1} \sqrt{2} E \sin(\omega t) \quad (t < 0), \quad \phi' = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega C R'}\right) \end{cases}$$

したがって、上式が成立するためには、次式を満たす必要がある。

$$\left\{ K = \frac{\sqrt{2} E R'}{\omega R_1 \sqrt{R'^2 + (1/\omega C)^2}}, \quad \phi = \phi' = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega C R'}\right) \right.$$

よって、 $e(t) = \sqrt{2} E \sin(\omega t)$  である場合における非同次形微分方程式の特殊解  $q_s$  は次のようになる。

$$\left\{ q(t) = -\frac{\sqrt{2}ER'}{\omega R_1 \sqrt{R'^2 + (1/\omega C)^2}} \cos(\omega t + \phi) \quad (t < 0), \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega CR'}\right) \right.$$

よって、 $q(0_+)$  は次のようになる。

$$\left\{ q(0_+) = q(0_-) = -\frac{\sqrt{2}ER'}{\omega R_1 \sqrt{R'^2 + (1/\omega C)^2}} \cos \phi \quad (t < 0), \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega CR'}\right) \right.$$

この初期条件を代入すると、未定係数  $K_i$  が次のように求められる。

$$\left\{ \begin{aligned} K_i &= \frac{\sqrt{2}E}{\omega \sqrt{R_1^2 + (1/\omega C)^2}} \cos \phi - \frac{\sqrt{2}ER'}{\omega R_1 \sqrt{R'^2 + (1/\omega C)^2}} \cos \phi \\ &= \frac{\sqrt{2}E}{\omega} \left[ \frac{\cos \phi}{\sqrt{R_1^2 + (1/\omega C)^2}} - \frac{R' \cos \phi}{R_1 \sqrt{R'^2 + (1/\omega C)^2}} \right] \end{aligned} \right.$$

これより、 $q(t)$  および  $v_C(t)$  が次のように定まる。

$$\left\{ \begin{aligned} q(t) &= K_i e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{\sqrt{2}E}{\omega \sqrt{R_1^2 + (1/\omega C)^2}} \cos(\omega t + \phi) \\ &= \frac{\sqrt{2}E}{\omega} \left[ \frac{\cos \phi}{\sqrt{R_1^2 + (1/\omega C)^2}} - \frac{R' \cos \phi}{R_1 \sqrt{R'^2 + (1/\omega C)^2}} \right] e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{\sqrt{2}E}{\omega \sqrt{R_1^2 + (1/\omega C)^2}} \cos(\omega t + \phi) \\ v_C(t) &= \frac{q(t)}{C} = \frac{\sqrt{2}E}{\omega C} \left[ \frac{\cos \phi}{\sqrt{R_1^2 + (1/\omega C)^2}} - \frac{R' \cos \phi}{R_1 \sqrt{R'^2 + (1/\omega C)^2}} \right] e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &\quad - \frac{\sqrt{2}E}{\omega C \sqrt{R_1^2 + (1/\omega C)^2}} \cos(\omega t + \phi) \quad (t \geq 0) \\ \phi &= \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega CR_1}\right), \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega CR'}\right), \quad R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad \tau = R_1 C \end{aligned} \right.$$

**問題 9.1** 時間  $t = 0$  において、 $S$  を閉じた場合、時計方向に電流  $i$  が流れるものと仮定して、キルヒホッフの電圧則を適用すると、次の回路方程式が得られる。

$$L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = \sqrt{2}E \cos(\omega t) \quad (t \geq 0)$$

この直列回路において、 $i$  とキャパシタンス  $C$  における蓄積電荷量  $q$  の間には次の関係がある。

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

この関係を回路方程式に代入すると、次式が得られる。

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \frac{1}{CL} q(t) = \frac{1}{L} \sqrt{2}E \cos(\omega t) \quad (t \geq 0)$$

この微分方程式の一般解  $q$  は、同次形微分方程式の一般解（過渡解） $q_t$  と非同次形微分方程式の特殊解（定常解） $q_s$  の和として、次のように表される。

$$\begin{cases} \frac{d^2 q_t(t)}{dt^2} + \frac{1}{CL} q_t(t) = 0 \\ \frac{d^2 q_s(t)}{dt^2} + \frac{1}{CL} q_s(t) = \frac{1}{L} \sqrt{2}E \cos(\omega t) \\ q(t) = q_t(t) + q_s(t) \end{cases}$$

同次形微分方程式の特性方程式は次式で与えられる。

$$K_t \left( m^2 + \frac{1}{CL} \right) e^{mt} = 0$$

この 2 次方程式の解は、解の公式より、次のように求められる。

$$\begin{cases} m_1 = j\beta' = j \frac{1}{\sqrt{CL}} \\ m_2 = -j\beta' = -j \frac{1}{\sqrt{CL}} \end{cases}$$

したがって、同次形微分方程式の一般解は次のように表される。



$$q_t(t) = K_{t1} e^{m_1 t} + K_{t2} e^{m_2 t} = K_{t1} e^{j\beta' t} + K_{t2} e^{-j\beta' t}$$

ここで、 $K_{t1}$  および  $K_{t2}$  は未定係数である。

オイラーの公式より、次の関係が成立する。

$$\begin{cases} q_t(t) = K_{t1} \cos(\beta' t) + j K_{t1} \sin(\beta' t) + K_{t2} \cos(\beta' t) - j K_{t2} \sin(\beta' t) \\ \quad = (K_{t1} + K_{t2}) \cos(\beta' t) + j (K_{t1} - K_{t2}) \sin(\beta' t) \end{cases}$$

ここで、 $K'_{t1} = K_{t1} + K_{t2}$ 、 $K'_{t2} = j(K_{t1} - K_{t2})$  とおくと、次式のようになる。

$$q_t(t) = K'_{t1} \cos(\beta' t) + K'_{t2} \sin(\beta' t)$$

ここで、 $K'_{t1}$  および  $K'_{t2}$  は未定係数である。

未知関数  $q_s$  とその 2 次導関数  $d^2 q_s / dt^2$  の定数倍の和が、 $\sqrt{2} E \cos(\omega t) / L$  に等しくなるためには、 $q_s$  も  $\cos(\omega t)$  の形をしており、電源電圧  $e$  と同位相（電流は  $\pi/2$  進み位相）か逆位相（電流は  $\pi/2$  遅れ位相）であると予想される。このことから、未知定数を  $K_s$  とし、非同次形微分方程式の解を次のように仮定する。

$$q_s(t) = K_s \cos(\omega t)$$

この仮定した解を非同次形微分方程式に代入すると、次のようになる。

$$\begin{cases} \frac{d^2 q_s(t)}{dt^2} + \frac{1}{CL} q_s(t) = -\omega^2 K_s \cos(\omega t) + \frac{1}{CL} K_s \cos(\omega t) = K_s \left( -\omega^2 + \frac{1}{CL} \right) \cos(\omega t) \\ \quad = \frac{1}{L} \sqrt{2} E \cos(\omega t) \end{cases}$$

これより、 $K_s$  は次のように求められる。

$$K_s = \frac{\sqrt{2} CE}{1 - \omega^2 LC}$$

以上より、回路方程式の一般解は、次のように表される。

$$q(t) = q_t(t) + q_s(t) = K'_{t1} \cos(\beta' t) + K'_{t2} \sin(\beta' t) + \frac{\sqrt{2} CE}{1 - \omega^2 LC} \cos(\omega t)$$

この式を  $t$  で微分すると、回路電流  $i$  の一般解が得られる。

$$i(t) = \beta' \left[ -K'_{t1} \sin(\beta' t) + K'_{t2} \cos(\beta' t) \right] - \frac{\sqrt{2} \omega CE}{1 - \omega^2 LC} \sin(\omega t)$$

この式の未定係数  $K_{t1}'$  および  $K_{t2}'$  は、 $t=0+$  における  $q(0+)$  および  $i(0+)$  の値（初

期条件) を代入することで求められる。

キャパシタンスを含む回路においては、電荷の連続性(保存性)により、S を閉じた直後のキャパシタンスの電荷量  $q(0_+)$  が求められる。図 9.3 の回路において、 $t < 0$  において、キャパシタンスに蓄積されている電荷量が 0 である場合 (これを  $q(0_-)$  とおく)、 $q(0_+)$  も 0 となる。

$$q(0_+) = q(0_-) = 0$$

また、インダクタンスを含む回路においては、鎖交磁束数の連続性(保存性)により、S を閉じた直後の電流  $i(0_+)$  が求められる。図 9.3 の回路において、 $t < 0$  においては S が開放されているため、 $i(t) = 0$  であり、S を閉じる直前における電流 (これを  $i(0_-)$  とおく) も 0 である。鎖交磁束数の連続性を、S を閉じる前後に適用すると、次式が得られる。

$$i(0_+) = i(0_-) = 0$$

これらの初期条件を  $q(t)$  および  $i(t)$  に代入すると、未定係数が次のように求められる。

$$\begin{cases} K_{t1} = -\frac{\sqrt{2}CE}{1-\omega^2LC}, & K_{t2} = 0 \end{cases}$$

したがって、 $v_c(t)$  および  $i(t)$  は次のように定まる。

$$\begin{cases} v_c(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{\sqrt{2}E}{1-\omega^2LC} [\cos(\omega t) - \cos(\beta' t)] \\ i(t) = \frac{\sqrt{2}CE}{1-\omega^2LC} [\beta' \sin(\beta' t) - \omega \sin(\omega t)] \end{cases} \quad (t \geq 0), \quad \beta' = \frac{1}{\sqrt{CL}}$$

**問題 9.2** 時間  $t = 0$  において、S を閉じた場合、時計方向に電流  $i$  が流れるものとして、キルヒホッフの電圧則を適用すると、次の回路方程式が得られる。

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = \sqrt{2}E \cos(\omega t) \quad (t \geq 0)$$

この直列回路において、 $i$  とキャパシタンス  $C$  における蓄積電荷量  $q$  の間に

は次の関係がある。

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

この関係を回路方程式に代入すると、次式ようになる。

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{CL} q(t) = \frac{1}{L} \sqrt{2} E \cos(\omega t) \quad (t \geq 0)$$

この微分方程式の一般解  $q$  は、同次形微分方程式の一般解 (過渡解)  $q_t$  と非同次形微分方程式の特殊解 (定常解)  $q_s$  の和として、次のように表される。

$$\begin{cases} \frac{d^2 q_t(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq_t(t)}{dt} + \frac{1}{CL} q_t(t) = 0 \\ \frac{d^2 q_s(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq_s(t)}{dt} + \frac{1}{CL} q_s(t) = \frac{1}{L} \sqrt{2} E \cos(\omega t) \\ q(t) = q_t(t) + q_s(t) \end{cases}$$

同次形微分方程式の特性方程式は次式ようになる。

$$m^2 + \frac{R}{L} m + \frac{1}{CL} = 0$$

この2次方程式の解は、解の公式より、次のように求められる。

$$m = \frac{1}{2} \left[ -\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{CL}} \right]$$

問題より、 $R > 2(L/C)^{1/2}$  であるため、 $m$  は次のような異なる2つの実数解をもつ。

$$\begin{cases} m_1 = -\frac{R}{2L} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{CL}} & (m_1 < 0) \\ m_2 = -\frac{R}{2L} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{CL}} & (m_2 < 0) \end{cases}$$

ここで、正の実数  $\alpha$ 、 $\beta$  を次のようにおくと、

$$\left\{ \alpha = \frac{R}{2L} \quad (0 < \alpha), \quad \beta = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{CL}} \quad (0 < \beta < \alpha) \right.$$

同次形微分方程式の一般解は次のように表される。

$$q_t(t) = K_{t1} e^{m_1 t} + K_{t2} e^{m_2 t} = K_{t1} e^{-(\alpha-\beta)t} + K_{t2} e^{-(\alpha+\beta)t}$$

ここで、 $K_{t1}$  および  $K_{t2}$  は未定係数である。

未知関数  $q_s$  とその 1 次導関数  $dq_s/dt$  および 2 次導関数  $d^2q_s/dt^2$  の定数倍の和が、 $\sqrt{2} E \cos(\omega t)/L$  に等しくなるためには、 $q_s$  も  $\cos(\omega t)$  の形をしていると考えられる。例えば、 $\omega L > 1/(\omega C)$  で、電流  $i_s$  の位相が電源電圧  $e$  の位相より  $\varphi$  遅れている場合、 $q_s$  の位相は  $i_s$  の位相よりさらに  $\pi/2$  遅れることから、未知定数を  $K_s$ 、遅れ位相角を  $\varphi$  とし、非同次形微分方程式の解を次のように仮定する。

$$q_s(t) = K_s \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = K_s \sin(\omega t - \varphi)$$

この仮定した解を非同次形微分方程式に代入すると、次のようになる。

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{d^2 q_s(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq_s(t)}{dt} + \frac{1}{CL} q_s(t) \\ &= -\omega^2 K_s \sin(\omega t - \varphi) + \frac{\omega R}{L} K_s \cos(\omega t - \varphi) + \frac{1}{CL} K_s \sin(\omega t - \varphi) \\ &= -\frac{\omega^2 CL - 1}{CL} K_s \sin(\omega t - \varphi) + \frac{\omega R}{L} K_s \cos(\omega t - \varphi) \\ &= K_s \frac{\omega}{L} \left[ R \cos(\omega t - \varphi) - \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \sin(\omega t - \varphi) \right] \\ &= K_s \frac{\omega}{L} \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \left[ \begin{aligned} & \cos(\omega t - \varphi) \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \\ & - \sin(\omega t - \varphi) \frac{\left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \end{aligned} \right] \\ &= K_s \frac{\omega}{L} \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \cos(\omega t - \varphi + \varphi') \\ &= \frac{1}{L} \sqrt{2} E \cos(\omega t), \quad \varphi' = \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \end{aligned} \right.$$

これより、 $K_s$  および  $\varphi$  は、次のように定められる。

$$\left\{ \begin{array}{l} K_s = \frac{\sqrt{2}E}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad \varphi = \varphi' = \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \end{array} \right.$$

以上より、 $q_s$  は、次のように求められる。

$$\left\{ \begin{array}{l} q_s(t) = \frac{\sqrt{2}E}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t - \varphi), \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \end{array} \right.$$

また、回路方程式の一般解は、次のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{l} q(t) = q_t(t) + q_s(t) \\ = K_{t1} e^{-(\alpha-\beta)t} + K_{t2} e^{-(\alpha+\beta)t} + \frac{\sqrt{2}E}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t - \varphi) \end{array} \right.$$

電流  $i$  は、上式を  $t$  で微分することにより、次のように求められる。

$$\left\{ \begin{array}{l} i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -(\alpha-\beta)K_{t1} e^{-(\alpha-\beta)t} - (\alpha+\beta)K_{t2} e^{-(\alpha+\beta)t} \\ + \frac{\sqrt{2}E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos(\omega t - \varphi) \end{array} \right.$$

未定係数  $K_{t1}$  および  $K_{t2}$  は、 $q$  と  $i$  の一般解に、 $t = 0_+$  における  $q(0_+)$  および  $i(0_+)$  の値（初期条件）を代入することで求められる。

キャパシタンスを含む回路においては、電荷の連続性により、 $S$  を閉じた直後のキャパシタンスの電荷量  $q(0_+)$  が求められる。図 9.4 の回路において、 $t < 0$  において、キャパシタンスに蓄積されている電荷量が 0 である場合（これを  $q(0_-)$  とおく）、 $q(0_+)$  も 0 となる。

$$q(0_+) = q(0_-) = 0$$

また、インダクタンスを含む回路においては、鎖交磁束数の連続性により、S を閉じた直後の電流  $i(0_+)$  が求められる。図 9.4 の回路において、 $t < 0$  においては S が開放されているため、 $i(t) = 0$  であり、S を閉じる直前における電流（これを  $i(0_-)$  とおく）も 0 である。鎖交磁束数の連続性を、S を閉じる前後に適用すると、次式が得られる。

$$Li(0_+) = Li(0_-) = 0$$

これらの初期条件を  $q$  および  $i$  の式に代入することで、未定係数  $K_{11}$  および  $K_{12}$  が次のように求められる。

$$\begin{cases} K_{11} = \frac{\sqrt{2}E}{2\beta\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \left[ -\omega \cos\varphi + (\alpha + \beta) \sin\varphi \right] \\ K_{12} = \frac{\sqrt{2}E}{2\beta\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \left[ \omega \cos\varphi - (\alpha - \beta) \sin\varphi \right] \end{cases}$$

したがって、 $q$  および  $i$  は次のようになる。

$$\begin{cases} q(t) = \frac{\sqrt{2}E}{2\beta\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \begin{bmatrix} (-\omega \cos\varphi + \alpha \sin\varphi) e^{-\alpha t} (e^{\beta t} - e^{-\beta t}) \\ + \beta \sin\varphi \cdot e^{-\alpha t} (e^{\beta t} + e^{-\beta t}) \\ + 2\beta \sin(\omega t - \varphi) \end{bmatrix} \\ = \frac{\sqrt{2}E}{\beta\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \begin{bmatrix} (-\omega \cos\varphi + \alpha \sin\varphi) e^{-\alpha t} \sinh(\beta t) \\ + \beta \sin\varphi \cdot e^{-\alpha t} \cosh(\beta t) \\ + \beta \sin(\omega t - \varphi) \end{bmatrix} \quad (t \geq 0) \\ \alpha = \frac{R}{2L} \quad (0 < \alpha), \quad \beta = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{CL}}, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
i(t) &= \frac{\sqrt{2}E}{2\beta\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \left[ \begin{aligned} &(\alpha - \beta)\omega \cos\varphi \cdot e^{-(\alpha-\beta)t} \\ &-(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)\sin\varphi \cdot e^{-(\alpha-\beta)t} \\ &-(\alpha + \beta)\omega \cos\varphi \cdot e^{-(\alpha+\beta)t} \\ &+(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)\sin\varphi \cdot e^{-(\alpha+\beta)t} \\ &+2\beta\omega \cos(\omega t - \varphi) \end{aligned} \right] \\
&= \frac{\sqrt{2}E}{2\beta\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \left[ \begin{aligned} &\{\alpha\omega \cos\varphi - (\alpha^2 - \beta^2)\sin\varphi\} e^{-\alpha t} (e^{\beta t} - e^{-\beta t}) \\ &-\beta\omega \cos\varphi \cdot e^{-\alpha t} (e^{\beta t} + e^{-\beta t}) \\ &+2\beta\omega \cos(\omega t - \varphi) \end{aligned} \right] \\
&= \frac{\sqrt{2}E}{2\beta\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \left[ \begin{aligned} &2\left(\frac{R}{2L}\omega \cos\varphi - \frac{1}{CL}\sin\varphi\right) e^{-\alpha t} \sinh(\beta t) \\ &-2\beta\omega \cos\varphi \cdot e^{-\alpha t} \cosh(\beta t) \\ &+2\beta\omega \cos(\omega t - \varphi) \end{aligned} \right] \\
&= \frac{\sqrt{2}E}{\beta\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \left[ \begin{aligned} &\frac{\omega}{L}\left(\frac{R}{2}\cos\varphi - \frac{1}{\omega C}\sin\varphi\right) e^{-\alpha t} \sinh(\beta t) \\ &-\beta\omega \cos\varphi \cdot e^{-\alpha t} \cosh(\beta t) \\ &+\beta\omega \cos(\omega t - \varphi) \end{aligned} \right] \quad (t \geq 0)
\end{aligned}$$

**問題 9.3** 問題 9.2 の解より，回路方程式の一般解  $q$  は，同次形微分方程式の一般解（過渡解） $q_t$  と非同次形微分方程式の特殊解（定常解） $q_s$  の和として，次のように表される。

$$\begin{cases} \frac{d^2 q_t(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq_t(t)}{dt} + \frac{1}{CL} q_t(t) = 0 \\ \frac{d^2 q_s(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq_s(t)}{dt} + \frac{1}{CL} q_s(t) = \frac{1}{L} \sqrt{2} E \cos(\omega t) \\ q(t) = q_t(t) + q_s(t) \end{cases}$$

同次形微分方程式の特性方程式は次式のようになる。

$$m^2 + \frac{R}{L}m + \frac{1}{CL} = 0$$

この2次方程式の解は、解の公式より、次のように求められる。

$$m = \frac{1}{2} \left[ -\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{CL}} \right]$$

問題より、 $R = 2(L/C)^{1/2}$ であるため、 $m$ は次のように重解となる。それを

$$m = -\alpha = -\frac{R}{2L} = -\frac{1}{\sqrt{CL}} \quad (m < 0, 0 < \alpha)$$

とおくと、同次形微分方程式の一般解は次のように表される。

$$q_t(t) = K_{t1} e^{-\alpha t} + K_{t2} t e^{-\alpha t} = (K_{t1} + K_{t2} t) e^{-\alpha t}$$

ここで、 $K_{t1}$ および $K_{t2}$ は未定係数である。

問題9.2の解より、非同次形微分方程式の解は次のように与えられる。

$$\left\{ q_s(t) = \frac{\sqrt{2}E}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t - \varphi), \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right.$$

したがって、回路方程式の一般解は、次のようになる。

$$q(t) = q_t(t) + q_s(t) = (K_{t1} + K_{t2} t) e^{-\alpha t} + \frac{\sqrt{2}E}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t - \varphi)$$

電流*i*は、上式を*t*で微分することにより、次のように求められる。

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = (-\alpha K_{t1} + K_{t2}) e^{-\alpha t} - \alpha K_{t2} t e^{-\alpha t} + \frac{\sqrt{2}E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos(\omega t - \varphi)$$

未定係数  $K_{t1}$  および  $K_{t2}$  は、 $q$  と  $i$  の一般解に、次の初期条件を代入することで求められる。

$$\left\{ q(0_+) = q(0_-) = 0, \quad i(0_+) = i(0_-) = 0 \right.$$



$$\left\{ \begin{aligned} K_{i1} &= \frac{\sqrt{2}E}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin\varphi \\ K_{i2} &= \frac{\sqrt{2}E}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} (\alpha \sin\varphi - \omega \cos\varphi) \end{aligned} \right.$$

これらを代入して、 $q$  および  $i$  は次のように求められる。

$$\left\{ \begin{aligned} q(t) &= \frac{\sqrt{2}E}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \left[ \begin{aligned} &\sin\varphi \cdot e^{-\alpha t} \\ &+ (\alpha \sin\varphi - \omega \cos\varphi) \cdot t e^{-\alpha t} \\ &+ \sin(\omega t - \varphi) \end{aligned} \right] \\ i(t) &= \frac{\sqrt{2}E}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \left[ \begin{aligned} &-\omega \cos\varphi \cdot e^{-\alpha t} \\ &-\alpha (\alpha \sin\varphi - \omega \cos\varphi) \cdot t e^{-\alpha t} \\ &+ \omega \cos(\omega t - \varphi) \end{aligned} \right] \quad (t \geq 0) \\ \alpha &= \frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{CL}}, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \end{aligned} \right.$$

### 問題 10.1

$$(1) \quad \cos^2(\omega t) = \frac{\cos(2\omega t) + 1}{2}, \quad \mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

および 相似則  $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$  より、次式のように求められる。

$$\mathcal{L}\left[\frac{\cos(2\omega t) + 1}{2}\right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \frac{\frac{s}{2}}{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \omega^2} + \frac{1}{s} \right] = \frac{1}{4} \left[ \frac{2s}{s^2 + 4\omega^2} + \frac{2}{s} \right] = \frac{s^2 + 2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)}$$

(2)  $\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$  および  $s$  領域の微分則  $\mathcal{L}[-t f(t)] = \frac{dF(s)}{ds}$  より, 次式のように求められる。

$$\mathcal{L}[t \sin(\omega t)] = -\frac{d}{ds} \left[ \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right] = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

(3)  $\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$  および  $s$  領域の推移則  $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s+a)$  より, 次式のように求められる。

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cos(\omega t)] = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

(4)  $\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$  および  $s$  領域の微分則  $\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$  より, 次式のように求められる。

$$\mathcal{L}[t^n e^{-at}] = (-1)^n \frac{(-1)^n n!}{(s+a)^{n+1}} = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$$

(5)  $\mathcal{L}[e^{-at} - e^{-bt}] = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}$  および  $s$  領域の積分則  $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(s) ds$  より, 次式のように求められる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\right] &= \int_s^\infty \left( \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b} \right) ds = [\ln(s+a) - \ln(s+b)]_s^\infty \\ &= \left[ \ln \frac{s+a}{s+b} \right]_s^\infty = 0 - \ln \frac{s+a}{s+b} = \ln \frac{s+b}{s+a} \end{aligned}$$

## 問題 10.2

$$\begin{aligned} (1) \quad f(t) &= \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)[u(t) - u(t-T)] = \sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)u(t) - \sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)u(t-T) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)u(t) + \sin\left[\frac{\pi}{T}(t-T)\right]u(t-T) \quad \left(\because \sin \frac{\pi t}{T} = -\sin \frac{\pi(t-T)}{T}\right) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\left[\sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)\right] = \frac{\frac{\pi}{T}}{s^2 + \left(\frac{\pi}{T}\right)^2} \quad \text{および} \quad \text{推移則} \quad \mathcal{L}[f(t-T)u(t-T)] = e^{-Ts}F(s)$$

より、次式のように求められる。

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\frac{\pi}{T}}{s^2 + \left(\frac{\pi}{T}\right)^2} + \frac{\frac{\pi}{T}}{s^2 + \left(\frac{\pi}{T}\right)^2} e^{-Ts} = \frac{\frac{\pi}{T}}{s^2 + \left(\frac{\pi}{T}\right)^2} (1 + e^{-Ts})$$

$$\begin{aligned} (2) \quad f(t) &= \frac{1}{T/2} t \left[ u(t) - u\left(t - \frac{T}{2}\right) \right] - \frac{1}{T/2} (t-T) \left[ u\left(t - \frac{T}{2}\right) - u(t-T) \right] \\ &= \frac{2}{T} t u(t) - \frac{4}{T} \left(t - \frac{T}{2}\right) u\left(t - \frac{T}{2}\right) + \frac{2}{T} (t-T) u(t-T) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2} \quad \text{および} \quad \text{推移則} \quad \mathcal{L}[f(t-T)u(t-T)] = e^{-Ts} F(s)$$

より、次式のように求められる。

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{2}{T} \frac{1}{s^2} - \frac{4}{T} \frac{1}{s^2} e^{-\frac{Ts}{2}} + \frac{2}{T} \frac{1}{s^2} e^{-Ts} = \frac{2}{T} \left( \frac{1 - e^{-\frac{Ts}{2}}}{s} \right)^2$$

### 問題 10.3

$$(1) \quad F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s+7}{s^2+5s+6} = \frac{s+7}{(s+2)(s+3)} = \frac{c_1}{s+2} + \frac{c_2}{s+3}$$

$$(10.56) \text{式より, } c_1 = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2) \frac{s+7}{(s+2)(s+3)} = 5, \quad c_2 = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{s+7}{s+2} = -4$$

または, (10.58)式より,  $D'(s) = 2s+5$ ,

$$c_1 = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{N(s)}{D'(s)} = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{s+7}{2s+5} = 5, \quad c_2 = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{N(s)}{D'(s)} = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{s+7}{2s+5} = -4$$

$$F(s) = \frac{5}{s+2} - \frac{4}{s+3}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{5}{s+2} - \frac{4}{s+3} \right] = 5e^{-2t} - 4e^{-3t}$$

$$(2) F(s) = \frac{s^2 + 6s + 5}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24} = \frac{(s+1)(s+5)}{(s+2)(s+3)(s+4)} = \frac{c_1}{s+2} + \frac{c_2}{s+3} + \frac{c_3}{s+4}$$

$$(10.56) \text{式より, } c_1 = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{(s+1)(s+5)}{(s+3)(s+4)} = -\frac{3}{2}, \quad c_2 = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{(s+1)(s+5)}{(s+2)(s+4)} = 4,$$

$$c_3 = \lim_{s \rightarrow -4} \frac{(s+1)(s+5)}{(s+2)(s+3)} = -\frac{3}{2}$$

または, (10.58)式より,  $D'(s) = 3s^2 + 18s + 26$ ,

$$c_1 = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{N(s)}{D'(s)} = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{(s+1)(s+5)}{3s^2 + 18s + 26} = -\frac{3}{2}, \quad c_2 = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{N(s)}{D'(s)} = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{(s+1)(s+5)}{3s^2 + 18s + 26} = 4$$

$$c_3 = \lim_{s \rightarrow -4} \frac{(s+1)(s+5)}{3s^2 + 18s + 26} = -\frac{3}{2}$$

$$F(s) = -\frac{3}{2} \frac{1}{s+2} + \frac{4}{s+3} - \frac{3}{2} \frac{1}{s+4}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{3}{2} \frac{1}{s+2} + \frac{4}{s+3} - \frac{3}{2} \frac{1}{s+4}\right] = -\frac{3}{2} e^{-2t} + 4e^{-3t} - \frac{3}{2} e^{-4t}$$

(3) (10.60)式および(10.73)式より,

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 4s + 5)} = \frac{1}{s^2[(s+2)^2 + 1]} = \frac{c_2}{s^2} + \frac{c_1}{s} + \frac{b_3 s + c_3}{(s+2)^2 + 1}$$

$$(10.61) \text{式より, } c_2 = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 + 4s + 5} = \frac{1}{5}$$

$$(10.62) \text{式または(10.63)式より, } c_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} [s^2 F(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-(2s+4)}{(s^2 + 4s + 5)^2} = -\frac{4}{25}$$

$$(10.74) \text{式より, } \lim_{s \rightarrow -2-j} [(s+2)^2 + 1] F(s) = \lim_{s \rightarrow -2-j} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{3+4j} = \frac{3}{25} - j \frac{4}{25} = b_3(-2-j) + c_3$$

$$b_3 = \frac{4}{25}, \quad c_3 = \frac{11}{25}$$

$$F(s) = \frac{1}{25} \left[ \frac{5}{s^2} - \frac{4}{s} + \frac{4s+11}{(s+2)^2 + 1} \right] = \frac{1}{25} \left[ \frac{5}{s^2} - \frac{4}{s} + \frac{4(s+2)}{(s+2)^2 + 1} + \frac{3}{(s+2)^2 + 1} \right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{5} t - \frac{4}{25} + \frac{4}{25} e^{-2t} \cos(t) + \frac{3}{25} e^{-2t} \sin(t)$$

$$(4) \quad F(s) = \frac{1}{s(s^2+9)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{3} \frac{3}{s^2+3^2} = \mathcal{L}[u(t)] \mathcal{L}\left[\frac{1}{3}\sin(3t)\right] = \mathcal{L}\left[1 * \frac{1}{3}\sin(3t)\right]$$

畳み込み積分のラプラス変換より,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= \frac{1}{3} \int_0^t 1 \cdot \sin 3(t-\tau) d\tau = -\frac{1}{3} \int_0^t \sin 3(\tau-t) d\tau = -\frac{1}{3} \left[ -\frac{1}{3} \cos 3(\tau-t) \right]_0^t \\ &= \frac{1}{9} [\cos 3(\tau-t)]_0^t = \frac{1}{9} [1 - \cos(3t)] \end{aligned}$$

**問題 11.1**  $C$ ,  $S_2$  および  $L$  からなる閉路に, 時計方向に電流  $i$  が流れるものとして, キルヒホッフの電圧則を適用すると, 次式が得られる.

$$L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = 0 \quad (t \geq 0)$$

(10.34)式(微分則) および(10.37)式(積分則)より, 回路方程式をラプラス変換すると, 次式が得られる.

$$L[sI(s) - i(0_+)] + \frac{1}{C} \left[ \frac{1}{s} I(s) + \frac{1}{s} i^{(-1)}(0_+) \right] = 0$$

ここで,  $I(s) = \mathcal{L}[i(t)]$  であり,  $i(0_+)$  は  $S_2$  を開いた直後の電流である.  $t < 0$  においては  $S$  が開かれているため,  $t = 0$  において, 回路電流は  $0$  である. また,  $i^{(-1)}(0_+)$  は  $S_2$  を開いた直後の  $C$  の蓄積電荷量である.  $t < 0$  においては  $S_1$  は閉じられており,  $S_2$  は開かれているため,  $t = 0$  において, 蓄積電荷量は  $-CE_0$  である. したがって, 初期条件は次のように表される.

$$\left\{ i(0_+) = i(0_-) = 0, \quad i^{(-1)}(0_+) = \int_{-\infty}^0 i(\tau) d\tau = -CE_0 \right.$$

これらの初期条件を代入し, 整理すると次式が得られる.

$$I(s) = \frac{E_0}{s \left( sL + \frac{1}{sC} \right)} = \frac{E_0}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \frac{1}{s^2 + \left( \frac{1}{\sqrt{LC}} \right)^2}$$

(10.22)式あるいは表 10.1 より,  $\sin(\omega t)$  のラプラス変換は次のように表される

ため,

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$I(s)$ を逆ラプラス変換すると,  $i(t)$  が次式のように得られる.

$$i(t) = \frac{E_0}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

この結果は, 直接解法により求めた問題 6.2 の解に等しい.

**問題 11.2** S を閉じた後の閉路に, 時計方向に電流  $i$  が流れると仮定し, キルヒホッフの電圧則を適用すると, 次式が得られる.

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E_0 e^{-\lambda t} \quad (t \geq 0)$$

(10.20)式あるいは表 10.1 より,  $e^{-\lambda t}$  のラプラス変換は次のように表される.

$$\mathcal{L}[e^{-\lambda t}] = \frac{1}{s + \lambda}$$

この式と(10.34)式(微分則)より, 回路方程式をラプラス変換すると, 次式が得られる.

$$L[sI(s) - i(0_+)] + RI(s) = E_0 \frac{1}{s + \lambda}$$

ここで,  $I(s) = \mathcal{L}[i(t)]$  であり,  $i(0_+)$  は S を開いた直後の電流である.

$t < 0$  においては S が開かれているため,  $t = 0$  において, 回路電流は 0 である.

$$i(0_+) = i(0_-) = 0$$

この初期条件を代入し, 整理すると次式が得られる.

$$I(s) = \frac{E_0}{L} \frac{1}{(s + \lambda)\left(s + \frac{R}{L}\right)} = \frac{E_0}{R - \lambda L} \left[ \frac{1}{s + \lambda} - \frac{1}{s + \frac{R}{L}} \right]$$

この式を逆ラプラス変換すると,  $i(t)$  が次式のように得られる.

$$\left\{ i(t) = \frac{E_0}{R - \lambda L} \left( e^{-\lambda t} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad \tau = \frac{L}{R} \right.$$

この結果は、直接解法により求めた(2.23)式に等しい。

**問題 11.3** S を閉じた後の閉路に、時計方向に電流  $i$  が流れるものと仮定して、キルヒホッフの電圧則を適用すると、次式が得られる。

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = \sqrt{2}E \sin(\omega t) \quad (t \geq 0)$$

(10.22)式あるいは表 10.1 より、 $\sin(\omega t)$  のラプラス変換は次のように表される。

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

この式と(10.37)式(積分則)より、回路方程式をラプラス変換すると、次式が得られる。

$$\begin{cases} RI(s) + \frac{1}{C} \left[ \frac{1}{s} I(s) + \frac{1}{s} i^{(-1)}(0_+) \right] = \sqrt{2}E \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ i^{(-1)}(0_+) = \int_{-\infty}^0 i(\tau) d\tau = 0 \end{cases}$$

ここで、 $I(s) = \mathcal{L}[i(t)]$  である。この式を整理すると、次のようになる。

$$I(s) = \frac{\sqrt{2}E}{R} \frac{s}{\left( s + \frac{1}{RC} \right) s^2 + \omega^2}$$

この式を部分分数に展開し、(10.56)式および(10.74)式より、未知定数  $c_1$ 、 $c_2$  および  $b_2$  を求めると、次のようになる。

$$\left\{ \begin{aligned}
I(s) &= \frac{\sqrt{2}\omega E}{R} \frac{s}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)(s^2 + \omega^2)} = \frac{c_1}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{b_2 s + c_2}{s^2 + \omega^2} \\
c_1 &= \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{RC}} \left(s + \frac{1}{RC}\right) \frac{\sqrt{2}\omega E s}{R \left(s + \frac{1}{RC}\right)(s^2 + \omega^2)} = -\frac{\sqrt{2}\omega CE}{1 + (\omega RC)^2} = -\frac{\sqrt{2}E}{\omega C \left[R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right]} \\
\lim_{s \rightarrow j\omega} b_2 s + c_2 &= c_2 + j\omega b_2 \\
&= \lim_{s \rightarrow j\omega} (s^2 + \omega^2) \frac{\sqrt{2}\omega E s}{R \left(s + \frac{1}{RC}\right)(s^2 + \omega^2)} = \frac{\sqrt{2}\omega E}{\left(R - j\frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{\sqrt{2}\omega E \left(R + j\frac{1}{\omega C}\right)}{\left(R - j\frac{1}{\omega C}\right)\left(R + j\frac{1}{\omega C}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{2}\omega E \left(R + j\frac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}\omega E (\omega^2 C^2 R)}{(\omega C)^2 \left[R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right]} + j \frac{\sqrt{2}\omega E (\omega C)}{(\omega C)^2 \left[R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right]} \\
b_2 &= \frac{\sqrt{2}E (\omega C)}{(\omega C)^2 \left[R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right]}, \quad c_2 = \frac{\sqrt{2}\omega E (\omega^2 C^2 R)}{(\omega C)^2 \left[R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right]}
\end{aligned} \right.$$

これより， $I(s)$ は次式のように表される．

$$\left\{ \begin{aligned}
I(s) &= \frac{\sqrt{2}\omega E}{R} \frac{s}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)(s^2 + \omega^2)} = \frac{c_1}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{b_2 s + c_2}{s^2 + \omega^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}E}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \left[ -\frac{1}{\omega C} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{1}{\omega C} \frac{s}{s^2 + \omega^2} + R \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right]
\end{aligned} \right.$$

(10.20)式，(10.22)式および(10.24)式あるいは表 10.1 より，次の関係があるので，

$$\left\{ \begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s-a} \right] &= e^{at}, & \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right] &= \sin(\omega t), & \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right] &= \cos(\omega t)
\end{aligned} \right.$$

$I(s)$ を逆ラプラス変換すると，次式が得られる．



$$\left\{ \begin{aligned}
 i(t) &= \frac{\sqrt{2}E}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \left[ -\frac{1}{\omega C} e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{\omega C} \cos(\omega t) + R \sin(\omega t) \right] \\
 &= \frac{\sqrt{2}E}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \left[ R \sin(\omega t) + \frac{1}{\omega C} \cos(\omega t) \right] - \frac{\sqrt{2}E}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \frac{1}{\omega C} e^{-\frac{t}{RC}} \\
 &= \frac{\sqrt{2}E}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \left[ \sin(\omega t) \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} + \cos(\omega t) \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} - \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{-\frac{t}{RC}} \right] \\
 &= \frac{\sqrt{2}E}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \left[ \sin(\omega t + \varphi) - \sin \varphi e^{-\frac{t}{RC}} \right], \quad \varphi = \tan^{-1} \left( \frac{1}{\omega CR} \right)
 \end{aligned} \right.$$

上式は、直接解法で求めた問題 8.1 の解に一致する。

**問題 12.1** 比誘電率 $\epsilon_r$ 、比透磁率 $\mu_r$ の媒質中にある 2 本の平行導線間のインダクタンス $L$ およびキャパシタンス $C$ は、(12.29)式および(12.32)式を参考にして、次式のように求められる。

$$\left\{ \begin{aligned}
 L &= \frac{\mu_r \mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{r} \quad [\text{H/m}], & C &= \frac{\pi \epsilon_r \epsilon_0}{\ln \frac{d}{r}} \quad [\text{F/m}]
 \end{aligned} \right.$$

これらを、(12.26)式に代入し、さらに、 $\epsilon_r=2.5$ 、 $d=0.2$  m、 $r=2$  mm を代入すると、サージインピーダンス $Z_0$ と伝搬速度 $c_0$ は次のように求められる。

$$\left\{ \begin{aligned}
 Z_0 &= \sqrt{\frac{L}{C}} \approx \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} \ln \frac{d}{r} \approx 120 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \ln \frac{d}{r} = 120 \sqrt{\frac{1}{2.5}} \ln \frac{0.2}{0.002} \approx 350 \quad [\Omega] \\
 c_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0}} \approx \frac{3.0 \times 10^8}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \approx 1.9 \times 10^8 \quad [\text{m/s}]
 \end{aligned} \right.$$

**問題 12.2** 中心導体に電流 $I$  [A]が流れ、外側導体に $-I$  [A]が流れているとすると、中心導体と外側導体の間で、中心導体の中心から $r$  [m]離れた点の磁束密度 $B$  [T]は次のように表される。

$$B(r) = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r}$$

この式で表される磁束密度を、 $r = a$  (中心導体半径) から  $r = b$  (外側導体内側半径) までの範囲で積分すると、軸方向に 1 m 当たりの中心導体と外側導体間の鎖交磁束  $\phi$  [Wb] が次のように求められる。

$$\phi = \int_a^b B(r) dr = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi} \int_a^b \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

この式より、中心導体の半径が  $a$  [m] で、外側導体の内側半径が  $b$  [m] で、中心導体と外側導体の間が比誘電率  $\epsilon_r$ 、比透磁率  $\mu_r$  の絶縁体で満たされた同軸ケーブルのインダクタンス  $L$  [H/m] は次のように求められる。

$$L = \frac{\phi}{I} \approx \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad [\text{H/m}]$$

中心導体の半径が  $a$  [m] で、外側導体の内側半径が  $b$  [m] で、中心導体と外側導体の間が比誘電率  $\epsilon_r$ 、比透磁率  $\mu_r$  の絶縁体で満たされた同軸ケーブルの中心導体に単位長当たり正電荷  $q$  [C/m] が分布しており、外側導体に  $-q$  [C/m] が分布しているとする、中心導体と外側導体の間で、中心導体の中心から  $r$  [m] 離れた点の電界  $E$  [V/m] は次のように表される。

$$E(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r}$$

この式で表される電界を、 $r = b$  (外側導体内側半径) から  $r = a$  (中心導体半径) までの範囲で積分すると、軸方向に 1 m 当たりの中心導体と外側導体間の電位差  $V$  [V] が次のように求められる。

$$V = -\int_b^a E(r) dr = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_b^a \frac{1}{r} dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln \frac{b}{a}$$

この式より、中心導体の半径が  $a$  [m] で、外側導体の内側半径が  $b$  [m] で、中心導体と外側導体の間が比誘電率  $\epsilon_r$ 、比透磁率  $\mu_r$  の絶縁体で満たされた同軸ケーブルの単位長当たりのキャパシタンス  $C$  [F/m] は次のように求められる。

$$C = \frac{q}{V} \approx \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln \frac{b}{a}} \quad [\text{F/m}]$$

求めた  $L$  と  $C$  を(11.25)式に代入すると、 $Z_0$  と  $c_0$  が次式のように得られる。

$$\begin{cases} Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}} \ln \frac{b}{a} \approx 60 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \ln \frac{b}{a} \quad [\Omega] \\ c_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx \frac{3.0 \times 10^8}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \quad [\text{m/s}] \end{cases}$$

問題 12.3  $a = 10 \text{ mm}$ ,  $b = 35 \text{ mm}$ ,  $\mu_r = 1$ ,  $Z_0 = 50 \Omega$  を問題 12.2 で導出した  $Z_0$  の式に代入することで、次のように  $\epsilon_r$  が求められる。

$$\begin{cases} Z_0 \approx 60 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \ln \frac{b}{a} \text{ より, } \epsilon_r = \mu_r \left( \frac{60}{Z_0} \ln \frac{b}{a} \right)^2 = 1 \cdot \left( \frac{60}{50} \ln \frac{35 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{-3}} \right)^2 \approx 2.3 \end{cases}$$

問題 13.1 サージインピーダンス  $Z_{01}$  の線路に沿って、左側から右向きに伝搬する進行波電圧  $v_a$  には、右側のインピーダンスは  $R + Z_{02}$  に見える。また、実際にサージインピーダンス  $Z_{02}$  の線路に透過する進行波電圧  $v_b$  は、 $R$  での電圧降下分を除いた電圧であることから、次のようになる。

$$v_b = \frac{2(R + Z_{02})}{(R + Z_{02}) + Z_{01}} v_a \cdot \frac{Z_{02}}{R + Z_{02}} = \frac{2Z_{02}}{Z_{01} + R + Z_{02}} v_a$$

この式に、 $Z_{01} = 450 \Omega$ ,  $Z_{02} = 300 \Omega$ ,  $v_b = v_a/2$  を代入すると、 $R = 450 \Omega$  となる。

問題 13.2 テブナンの定理を点 P に適用した等価回路に、キルヒホッフの電圧則を適用すると、次の回路方程式が得られる。

$$\frac{1}{C} \int i_b dt + Z_0 i_b = 2v_a$$

$C$  の蓄積電荷量を  $q$  とすると、この回路方程式は次のように表される。

$$\frac{q}{C} + Z_0 \frac{dq}{dt} = 2v_a$$

入射進行波電圧  $v_a$  が波高値  $E_0$  のステップ波である場合、 $v_a$  が点 P に到達した時点を  $t = 0$  とし、初期値  $q(0^+) = q(0^-) = 0$  として、この微分方程式を解くと、 $q$  は次のようになる。

$$q(t) = 2CE_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{CZ_0}} \right)$$

点 P の電位 (C での電圧降下)  $v_b$ , 反射進行波電圧  $v_a'$  および反射進行波電流  $i_a'$  は次のように求まる.

$$\begin{cases} v_b(t) = \frac{q(t)}{C} = 2E_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{CZ_0}} \right) \\ v_a'(t) = v_b(t) - v_a(t) = E_0 \left( 1 - 2e^{-\frac{t}{CZ_0}} \right) \\ i_b(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{2E_0}{Z_0} e^{-\frac{t}{CZ_0}} \\ i_a'(t) = i_a(t) - i_b(t) = \frac{E_0}{Z_0} - \frac{2E_0}{Z_0} e^{-\frac{t}{CZ_0}} = \frac{E_0}{Z_0} \left( 1 - 2e^{-\frac{t}{CZ_0}} \right) \end{cases}$$

**問題 13.3** 接続点 P<sub>1</sub> の電圧は, 図 13.6 および(13.15)式より, 次式で与えられる.

$$\begin{cases} 0 \leq t < 2\tau & : v_{P1}(t) = \eta_{v12} v_a(t) \\ 2\tau \leq t < 4\tau & : v_{P1}(t) = \eta_{v12} v_a(t) + \eta_{v21} \rho_{v23} \eta_{v12} v_a(t - 2\tau) \\ 4\tau \leq t < 5\tau & : v_{P1}(t) = \eta_{v12} v_a(t) + \eta_{v21} \rho_{v23} \eta_{v12} v_a(t - 2\tau) \\ & \quad + \eta_{v21} \rho_{v21} \rho_{v23}^2 \eta_{v12} v_a(t - 4\tau) \end{cases}$$

また, 接続点 P<sub>2</sub> の電圧は, 図 13.6 より, 次式で与えられる.

$$\begin{cases} 0 \leq t < \tau & : v_{P2}(t) = 0 \\ \tau \leq t < 3\tau & : v_{P2}(t) = \eta_{v23} \eta_{v12} v_a(t - \tau) \\ 3\tau \leq t < 5\tau & : v_{P2}(t) = \eta_{v23} \eta_{v12} v_a(t - \tau) + \eta_{v23} \rho_{v21} \rho_{v23} \eta_{v12} v_a(t - 3\tau) \end{cases}$$

$Z_{01} = 450 \Omega$ ,  $Z_{02} = 300 \Omega$ ,  $R = 150 \Omega$  を用いて, 各接続点での電圧透過係数と電圧反射係数を求めると, 次のようになる.

