入門 計量経済学 第 2 版　練習問題解答

山本拓 竹内明香

latest revised：2024 年 1 月 18 日

ここに与えられている問題の一部は，山本（2022）の練習問題と重複しています。

第 2 章　データの整理：平均，分散，単相関係数，ヒストグラム

1 (1) $\sum_{i=1}^{5} X_i = 15$　(2)$\sum_{i=1}^{5} X_i^2 = 55$　(3)$\sum_{i=1}^{5} Y_i^2 = 24$

(4)$\sum_{i=1}^{5} X_iY_i = 2\cdot 1 + 3(-1) + 1\cdot 3 + 4\cdot 2 + 5(-3) = -5$

(5)$\sum_{i=1}^{5} X_i/Y_i = (2/1)+3/(-1)+(1/3)+(4/2)+5/(-3) = -1/3$

(6)$\sum_{i=1}^{5} 5X_i = 5\sum_{i=1}^{5} X_i = 5\times 15 = 75$

(7)$\sum_{i=1}^{5}(X_i+Y_i)^2 = \sum_{i=1}^{5} X_i^2 + 2\sum_{i=1}^{5} X_iY_i + \sum_{i=1}^{5} Y_i^2 = 55 + 2(-5) + 24 = 69$

(8)$\sum_{i=1}^{5} 6 = 6\cdot 5 = 30$

2 (1) については，$r = -0.729$　(2) については，$r = 0.621$

3 平均値は，

$$\bar{X} = \frac{42}{4} = 10.5 \quad \bar{Y} = \frac{508}{4} = 127$$

分散は，

$$s_x^2 = \frac{1}{4-1}\sum_{i=1}^{4}(X_i - 10.5)^2 = \frac{53}{3} = 17.67$$

$$s_y^2 = \frac{1}{4-1}\sum_{i=1}^{4}(Y_i - 127)^2 = \frac{2198}{3} = 732.67$$

標準偏差は，分散の平方根をとり，

$$s_x = \sqrt{17.67} = 4.203 \quad s_y = \sqrt{732.67} = 27.068$$

4 （Excel 解答ファイルあり）$PPPB$ の平均，分散，標準偏差は，それぞれ，

$$P\bar{P}PB = 11.425, \quad s_{PPPB}^2 = 701.373, \quad s_{PPPB} = 26.483$$

$PPPL$ と $PPPB$ の共分散と相関係数は，

$$s_{PPPL,PPPB} = 899.828, \quad r_{PPPL,PPPB} = 0.999$$

5　本文中で $\sum(X_i-\bar{X})^2=\sum X_i^2-n\bar{X}^2$ を示したように進めればよい。

$$\begin{aligned}\sum(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y}) &= \sum(X_iY_i-X_i\bar{Y}-\bar{X}Y_i+\bar{X}\bar{Y}) \\ &= \sum X_iY_i-\sum X_i\bar{Y}-\sum\bar{X}Y_i+\sum\bar{X}\bar{Y} \qquad (Q.1)\end{aligned}$$

ここで，右辺の第 2 項は $\sum X_i\bar{Y}=\bar{Y}\sum X_i$ であり，さらに $\sum X_i=n\bar{X}$ であることに注意すれば，$\sum X_i\bar{Y}=n\bar{X}\bar{Y}$ となる。第 3 項も第 2 項の場合と同様に，$\sum\bar{X}Y_i=n\bar{X}\bar{Y}$ であることが示せる。 一方，第 4 項は $\sum\bar{X}\bar{Y}=n\bar{X}\bar{Y}$ なので，次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\sum(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y}) &= \sum X_iY_i-n\bar{X}\bar{Y}-n\bar{X}\bar{Y}+n\bar{X}\bar{Y} \\ &= \sum X_iY_i-n\bar{X}\bar{Y} \qquad (Q.2)\end{aligned}$$

第 3 章　最小 2 乗法

1　(1) のデータについて，正規方程式は，

$$\begin{aligned}5\hat{\alpha}+284\hat{\beta} &= 307 \\ 284\hat{\alpha}+18078\hat{\beta} &= 16293 \qquad (Q.3)\end{aligned}$$

で与えられる。ゆえに，$\hat{\alpha}=94.814$，$\hat{\beta}=-0.585$。そして，

$$\hat{Y}=94.814-0.585X \qquad (Q.4)$$

(2) のデータについて，正規方程式は，

$$\begin{aligned}4\hat{\alpha}+42\hat{\beta} &= 508 \\ 42\hat{\alpha}+494\hat{\beta} &= 5546 \qquad (Q.5)\end{aligned}$$

で与えられる．ゆえに，$\hat{\alpha}=85$，$\hat{\beta}=4$。そして，

$$\hat{Y}=85+4X \qquad (Q.6)$$

2　(1) のデータについては,

$$\hat{\beta} = Sxy/Sxx = -1138.4/1946.8 = -0.585 \tag{Q.7}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\alpha}\bar{X} = 61.6 - (-0.585)56.8 = 94.814 \tag{Q.8}$$

$$\hat{Y} = 94.795 - 0.588X, \quad R^2 = 0.543 \tag{Q.9}$$

$\hat{\beta} = -0.558 < 0$ より，$r = -\sqrt{R^2} = -0.737$。

(2) についても,

$$\hat{\beta} = Sxy/Sxx = 212/53 = 4 \tag{Q.10}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\alpha}\bar{X} = 127 - (4)10.5 = 85 \tag{Q.11}$$

$$\hat{Y} = 85 + 4X, \quad R^2 = 0.386 \tag{Q.12}$$

$\hat{\beta} = 4 > 0$ より，$r = \sqrt{R^2} = 0.621$。

3　$\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ の計算公式を用いるとわかりやすい。

(1)　$\hat{\beta}^* = \frac{1}{10}\hat{\beta}$,　　$\hat{\alpha}^* = \hat{\alpha}$,　$R^{*2} = R^2$

（導出）　まず

$$\bar{X}^* = \frac{1}{n}\Sigma X_i^* = \frac{1}{n}\Sigma 10X_i = \frac{10}{n}\Sigma X_i = 10\bar{X} \tag{Q.13}$$

計算公式より

$$\hat{\beta}^* = \frac{S_{X^*Y}}{S_{X^*X^*}} = \frac{\Sigma(X_i^* - \bar{X}^*)(Y_i - \bar{Y})}{\Sigma(X_i^* - \bar{X}^*)^2} \tag{Q.14}$$

$$= \frac{\Sigma(10X_i - 10\bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\Sigma(10X_i - 10\bar{X})^2}$$

$$= \frac{10\Sigma(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{10^2\Sigma(X_i - \bar{X})^2}$$

$$= \frac{1}{10}\frac{\Sigma(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\Sigma(X_i - \bar{X})^2}$$

$$= \frac{1}{10}\hat{\beta} \tag{Q.15}$$

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}^* &= \bar{Y}^* - \hat{\beta}^* \bar{X}^* && \text{(Q.16)}\\ &= \bar{Y} - \frac{1}{10}\hat{\beta}(10\bar{X}) \\ &= \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} = \hat{\alpha} && \text{(Q.17)}\end{aligned}$$

理論値 $\hat{Y}_i^*$ については，これまでの結果を用いて

$$\begin{aligned}\hat{Y}_i^* &= \hat{\alpha}^* + \hat{\beta}^* X_i^* && \text{(Q.18)}\\ &= \hat{\alpha} + \frac{1}{10}\hat{\beta}(10X_i) \\ &= \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i = \hat{Y}_i && \text{(Q.19)}\end{aligned}$$

したがって，決定係数の第 1 の定義より

$$R^{*2} = R^2 \qquad \text{(Q.20)}$$

(2)　$\hat{\beta}^* = \hat{\beta}$,　　$\hat{\alpha}^* = \hat{\alpha} - 3\hat{\beta}$,　$R^{*2} = R^2$

（導出省略。上記 (1) の導出のように計算公式に代入して導けばよい。）

4　(1)　（Excel 解答ファイルあり）推定結果は，

$$\hat{\alpha} = 1.5575, \quad \hat{\beta} = 1.1501, \quad R^2 = 0.9795$$

(2)　（Excel 解答ファイルあり）推定結果は，

$$\hat{\alpha} = 0.0084, \quad \hat{\beta} = 1.3772, \quad R^2 = 0.8455$$

5　決定係数の第 1 の定義を出発点とする。

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} \qquad \text{(Q.21)}$$

ここで，まず分子を書きかえる。$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i \quad (i = 1, 2 \cdots, n)$ と $\bar{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\bar{X}$ という関係（これは，$\hat{\alpha}$ の計算式より導かれる。）

$$\begin{aligned}\hat{Y}_i - \bar{Y} &= (\hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i) - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}\bar{X}) \\ &= \hat{\beta}(X_i - \bar{X}) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) && \text{(Q.22)}\end{aligned}$$

これを，決定係数の定義に代入すると

$$
\begin{aligned}
R^2 &= \frac{\hat{\beta}^2 \sum(\hat{X}_i - \bar{X})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} \\
&= \hat{\beta}^2 \frac{\sum(\hat{X}_i - \bar{X})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}
\end{aligned}
\tag{Q.23}
$$

ここで，$\hat{\beta}$ の計算公式を思いだすと

$$
\hat{\beta} = \frac{\Sigma(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\Sigma(X_i - \bar{X})^2}
\tag{Q.24}
$$

なので，この 2 乗を上の結果に代入すると

$$
\begin{aligned}
R^2 &= \frac{(\Sigma(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}))^2}{(\Sigma(X_i - \bar{X})^2)^2} \frac{\sum(\hat{X}_i - \bar{X})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} \\
&= \frac{(\Sigma(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}))^2}{\sum(\hat{X}_i - \bar{X})^2 \sum(Y_i - \bar{Y})^2} \\
&= r_{xy}^2
\end{aligned}
$$

第 4 章　単回帰分析

1　(1)　推定された回帰直線 $\hat{Y} = 85 + 4X$ を用いて，

$$
\begin{aligned}
\hat{u}_1 &= Y_1 - \hat{Y}_1 = 120 - (85 + 4 \times 5) = 15 \\
\hat{u}_2 &= Y_2 - \hat{Y}_2 = 133 - (85 + 4 \times 12) = 0 \\
\hat{u}_3 &= Y_3 - \hat{Y}_3 = 160 - (85 + 4 \times 15) = 15 \\
\hat{u}_4 &= Y_4 - \hat{Y}_4 = 95 - (85 + 4 \times 10) = -30
\end{aligned}
$$

ゆえに s^2 は

$$
s^2 = \{15^2 + 0^2 + 15^2 + (-30)^2\}/(4 - 2) = 675 \tag{Q.25}
$$

(2)　$\sum(X_i-\bar{X})^2=53$。ゆえに，$s_{\hat{\beta}}=\sqrt{675/53}=3.569$ である。巻末の付表表 2 より $t_{2,0.025}=4.303$ である。

$$\frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}}=\frac{4.0}{3.269}=1.121<4.303=t_{2,0.025} \tag{Q.26}$$

ゆえに，$H_0:\beta=0,\ H_1:\beta\neq 0$ なる仮説は，有意水準 5% で採択される。

2　(1)　（Excel 解答ファイルあり）自由度 $10-2=8$ の t 分布の片側 2.5% の臨海値は $t_{8,0.025}=2.306$.。推定結果から t 値 $=0.0126$。ここで $0.0126<t_{8,0.025}$ より，有意水準 5% で帰無仮説は棄却されない。したがって α は有意ではない。

もしくは，推定結果から p 値 $=0.990>0.05$ より，α は有意水準 5% で有意ではない。

(2)　推定結果から t 値 $=6.617$。ここで $6.617>t_{8,0.025}$ より，有意水準 5% で帰無仮説は棄却される。したがって β は有意である。

もしくは，推定結果から p 値 $=0.00017<0.05$ より，β は有意水準 5% で有意。

(3)　検定統計量は，

$$t^*=\frac{1.377-1}{0.208}=1.8124$$

したがって，$t^*=1.8124<t_{8,0.025}$ より，有意水準 5% で帰無仮説は受容される。以上から，$\beta\neq 1$ とはいえない。

3　（Excel 解答ファイルあり）推定結果は，以下の通りとなる。

$$\underset{}{\hat{RC}_i}=\underset{(-2.00)}{-25273.6}+\underset{(24.42)}{0.61RYD_i}\quad R^2=0.974,\ s=3015.10 \tag{Q.27}$$

ここで，カッコ内の数値は t 値。

自由度 $18-2=16$ の t 分布の 2.5% 点は，$t_{8,0.025}=2.120$ より, 有意水準 5% で α は有意ではなく，β は有意である。

第 5 章　多重回帰分析の基礎

1　R^2 をモデルの選択基準とすると，説明変数が多いほど好ましいモデルということになる。これは，追加する説明変数がたいした説明力を持たなくても成立するので，あまり望ましい性質とは言えない。そのような弱点を補うためによく用いられるのが自由度修正済み決定係数である。

2　過少定式化の誤りとは，本来回帰モデルの説明変数として含まれるべき変数を含めずに分析をしたときに生じる誤りのことである。この場合には推定結果については，まったく信頼性がおけず，何を推定しているか判然としない。（統計学的には，推定量の不偏性，一致性も満たされない。）

　過剰定式化の誤りとは，本来回帰モデルの説明変数として含まれるべき変数に加えて，余分な説明変数を含めて分析をしたときに生じる誤りのことである。この場合には，推定結果が本来よりも精度の悪いもの，すなわちバラツキ（分散）が大きいものとなる。したがって，過少定式化の誤りよりも被害は小さい。（統計学的には，推定量の不偏性，一致性も満たされている。）

3　（Excel 解答ファイルあり）推定結果は，以下の通りとなる。

$$\begin{array}{lll} \hat{RC}_i = \underset{(1.525)}{39186.112} + \underset{(5.355)}{0.408} RYD_i + \underset{(2.756)}{0.028} RMA_i & R^2 = 0.983 & s = 2537.124 \\ & \bar{R}^2 = 0.980 & \end{array}$$

ここで，カッコ内の数値は t 値。

　自由度 $18-3=15$ の t 分布の片側 2.5% の臨海値は，$t_{15.0.025}=2.131$ であり, 有意水準 5% で β_1 は有意ではなく，β_2 と β_3 は有意である。

第 6 章　価格指数，デフレーター，名目変数と実質変数

1　　(1)　基準年を 2010 年とした 2015 年および 2020 年のラスパイレス

指数は，

$$P_{L,2010,2015} = \frac{60 \cdot 100 + 150 \cdot 250 + 140 \cdot 110}{50 \cdot 100 + 100 \cdot 250 + 100 \cdot 110} = 1.437$$

$$P_{L,2010,2020} = \frac{70 \cdot 100 + 150 \cdot 250 + 120 \cdot 110}{50 \cdot 100 + 100 \cdot 250 + 100 \cdot 110} = 1.407$$

したがって，ラスパイレス指数によると，物価は下落している。

(2)　基準年を 2015 年とすると，

$$P_{L,2015,2020} = \frac{70 \cdot 90 + 150 \cdot 180 + 120 \cdot 70}{60 \cdot 90 + 150 \cdot 180 + 140 \cdot 70} = 0.988$$

$$P_{L,2015,2015} = 1$$

やはり，物価は下落している。

2　(1)　基準年を 2010 年とした 2015 年および 2020 年のパーシェ指数は，

$$P_{P,2010,2015} = \frac{60 \cdot 90 + 150 \cdot 180 + 140 \cdot 70}{50 \cdot 90 + 100 \cdot 180 + 100 \cdot 70} = 1.430$$

$$P_{P,2010,2020} = \frac{70 \cdot 110 + 150 \cdot 120 + 120 \cdot 100}{50 \cdot 110 + 100 \cdot 120 + 100 \cdot 100} = 1.371$$

したがって，パーシェ指数から見ても物価は下落している。

(2)　基準年を 2015 年とすると，

$$P_{P,2015,2020} = \frac{70 \cdot 110 + 150 \cdot 120 + 120 \cdot 100}{60 \cdot 110 + 150 \cdot 120 + 140 \cdot 100} = 0.977$$

$$P_{P,2015,2015} = 1$$

やはり，物価は下落している。

第 7 章　多重回帰分析の拡張

1　（略解）多重共線性は多重回帰モデルの推定において，説明変数間にお

ける高い線型関係によって生じる。結果として，本来重要と思われる説明変数の係数が有意に推定されなかったり，符号条件が満たされなかったりする。また他の変数を加えたり，データ数を少し増やすと大幅に係数値が変化したりという不安定な結果をもたらす。

簡便な解決方法としては，線型関係にあると思われる変数をモデルから除くという方法がある。またモデルの係数間に事前にある線型関係があることが知られていれば，それを用いて説明変数の線型結合によって新しい説明変数を作ることにより，多重共線性を回避できる場合もある。

2 （略解）たとえば，労働者の年齢別の賃金を考えると，一般に年齢とともに賃金は上昇するが，やがて 50 歳過ぎでピークを迎え，その後は低下することが知られている。これは，経験を通じて技術が向上し生産性が高まるが，やがてはその技術も陳腐化して生産性が落ちるためであると言われている。このようないったん上昇しやがて下降する賃金のカーブは，簡単な線型モデルで捉えることはきわめて難しい。その場合の当てはまりは，かなり悪いものにならざるを得ない。この場合には，上に凸の 2 次関数でかなりうまく近似できる。したがって，説明変数に「年齢」と「年齢の 2 乗」という 2 つの変数を加えることにより，単に「年齢」のみを説明変数とするモデルよりも，よりよい当てはまりを得ることができる。

3 例えば，以下のようなモデルにおいて

$$\log Y_i = \alpha + \beta \log X_i + u_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{Q.28}$$

説明変数が X_i から $3X_i$ になると，以下のように書き直される。

$$\begin{aligned} \log Y_i &= \alpha + \beta \log 3X_i + u_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n \\ &= \alpha + \beta \log 3 + \beta \log X_i + u_i \\ &= \alpha' + \beta \log X_i + u_i \qquad\qquad (\text{Q.29}) \end{aligned}$$

ここで，$\alpha' = \alpha + \beta \log 3$ である。すなわち，定数項は $\beta \log 3$ の分だけ

変化するが，$\log X_i$ の係数は不変である。この結果は，純粋な線型モデルの場合（第 3 章練習問題 3(1)）と異なる。

4　経済の時系列データには，時々予期できない大きな変動が生じる。例えば，2008 年のリーマン・ショック，1973 年の第 1 次石油ショックなどが典型的なものである。このような時期のデータは他の時期のからみると突出しており，異常値と考えることができる。このようなデータをそのまま回帰分析に用いると，その異常値の影響で推定結果は大きな影響を受ける。直接的な方法は，そのデータを除いて回帰分析をする方法であるが，できればその方法は避けたい。異常値ダミー変数は，推定からそのデータを除くことなく，同様の効果をもたらすことができる。具体的には，異常値ダミー変数は，その期は 1 で，他のすべての期は 0 という変数である。

クロスセクション・データでも異常値の問題は生じる。全体のデータ中で，特定のデータのみが異常に大きい（あるいは小さい）ということはありうる。たとえば，3.3 節のスターバックスのトール・ラテの価格費による購買力平価の推定においては，日本やタイのデータは他の国のデータに比べて異常に大きく，安定的な結果を得るためにはそれらの国を除く必要があった。これらのデータの影響を受けないようするためには，異常値ダミー変数が有用となる。

5　(1)　短期の効果，0.6，長期の効果，2.0

(2)　短期の効果，1.24，長期の効果，$1.24/(1-0.75) = 4.96$

(3)　ラグ付内生変数を 2 つ以上説明変数として含む場合は代入による計算は難しい。均衡状態 $(\bar{X}, \bar{Y})$ を考えて，モデルを，

$$\bar{Y} = 4.2 + 0.60\bar{Y} + 0.15\bar{Y} + 1.24\bar{X}$$

と書き直す。したがって，

$$(1 - 0.60 - 0.15)\bar{Y} = 4.2 + 1.24\bar{X}$$

ゆえに，$\Delta\bar{Y}/\Delta\bar{X} = 1.24/(1-0.60-0.15) = 4.96$ となる。したがって，短期の効果，1.24，長期の効果，4.96。この場合，（2）と（3）は短期，長期の効果は同一であるが，途中経路が（3）のほうが，やや複雑ということになる。

6 （Excel 解答ファイルあり）日本とタイのダミー変数を，それぞれ以下の

$$D_{thai,i} = \begin{cases} 1 & \text{タイ} \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \qquad D_{Japan,i} = \begin{cases} 1 & \text{日本} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

として定義すると，推定するモデルは，

$$EXC_i = \beta_1 + \beta_2 PPPB_i + \beta_3 D_{thai,i} + \beta_4 D_{Japan,i} + u_i$$

となる。推定結果は，

$$\begin{aligned} E\hat{X}C_i = \underset{(0.013)}{0.0084} + \underset{(6.62)}{1.38PPPB_i} + \underset{(2.37)}{9.98D_{thai,i}} \underset{(-1.18)}{-22.52D_{Japan,i}} \\ R^2 = 0.998, \quad \bar{R}^2 = 0.998, \quad s = 1.481 \end{aligned} \tag{Q.30}$$

となった。$\hat{\beta}_1$ と $\hat{\beta}_2$ の推定値が，第 3 章練習問題 4(2) と同じ値になっていることが確認できる。

7 (1) ダミー変数が 2 つ入っているので，それぞれの場合のモデルを書き下してみると，$D_i^F = 0, D_i^U = 0$（男性で大卒以外のとき），$D_i^F = 1, D_i^U = 0$（女性で大卒以外のとき），$D_i^F = 0, D_i^U = 1$（男性で大卒以上のとき），$D_i^F = 1, D_i^U = 1$（女性で大卒以上のとき）の 4 種類となる。モデルは，

$$W_i = \beta_1 + (\beta_2)\, Age_i + \beta_5 Age_i^2 + u_i$$

$$W_i = \beta_1 + \left(\beta_2 + \beta_3 D_i^F\right) Age_i + \beta_5 Age_i^2 + u_i$$

$$W_i = \beta_1 + \left(\beta_2 + \beta_4 D_i^U\right) Age_i + \beta_5 Age_i^2 + u_i$$

$$W_i = \beta_1 + \left(\beta_2 + \beta_3 D_i^F + \beta_4 D_i^U\right) Age_i + \beta_5 Age_i^2 + u_i$$

(2)　（Excel 解答あり）OLS での推定結果は以下のようになった。カッコ内の数値は t 値である。

$$\hat{W}_i = \underset{(-4.02)}{-1801.94} + \left(\underset{(5.70)}{127.58} + \underset{(-5.86)}{-9.65}\ D_i^F + \underset{(11.59)}{20.24}\ D_i^U \right) Age_i$$
$$\underset{(-4.84)}{-1.26}\ Age_i^2$$

$$R^2 = 0.711, \bar{R}^2 = 0.700. s = 379.984$$

(3)　有意性の検定は，標準正規分布を用いて行うことができ，すべての t 値が有意水準 5% の棄却域の臨界点 1.96 を超えていることから，有意に推定されていることがわかる。

大卒以上のダミー変数は正の値になっていることから，大卒以上の学歴をもっていると賃金が上昇することが確認できた。また，女性のダミーもマイナスで有意であることから，賃金が男性より低いことがわかった。次に，2 つのダミー変数の推定値の大きさを比較すると，学歴による賃金差のほうが，性別による賃金差よりも大きいことがわかった。

第 8 章　F 検定

1　(1)　帰無仮説のもとでの残差 2 乗和は，$\sum \hat{v}_i^2 = \sum y_i^2 = 275$ である。対立仮説のもとでの残差 2 乗和は $\sum \hat{u}_i^2 = s^2(n-k) = 1.094^2(25-3) = 26.33$ である。ゆえに

$$F^* = \frac{(275 - 26.33)/2}{26.33/22} = 103.9 \tag{Q.31}$$

これは，巻末の付表表 4 から得られる $F_{2,22,0.05} = 3.44$ より大きい。したがって，帰無仮説は有意水準 5% で棄却される。

(2)　帰無仮説の下での残差 2 乗和は，$\sum \hat{v}_i^2 = 1.32^2 \cdot (25-2) = 40.075$。対立仮説のもとでの残差 2 乗和はすでに求められている

ので，

$$F^* = \frac{(40.075 - 26.33)/1}{26.33/22} = 11.48 \qquad \text{(Q.32)}$$

2 (1) H_1 モデルの残差 2 乗和は，元のモデルを OLS で推定し，$\Sigma\hat{u}_i^2$ として求めることができる。H_0 モデルの残差 2 乗和を求めるためには，制約を満たすモデルを作る必要がある。制約を β_2 について解くと，

$$\beta_2 = 1 - \beta_3 - \beta_4 \qquad \text{(Q.33)}$$

これを元のモデルに代入すると，H_0 モデルが得られる。

$$\begin{aligned} Y_i = \beta_1 + (1 - \beta_3 - \beta_4)X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \beta_4 X_{4i} \\ +\beta_5 X_{5i} + v_i \end{aligned} \qquad \text{(Q.34)}$$

これをまとめ直すと

$$\begin{aligned} \underbrace{Y_i - X_{2i}}_{Y_i'\text{とする}} = \beta_1 + \beta_3 \underbrace{(X_{3i} - X_{2i})}_{Z_{1i}\text{とする}} + \underbrace{\beta_4(X_{4i} - X_{2i})}_{Z_{2i}\text{とする}} \\ +\beta_5 X_{5i} + v_i \end{aligned} \qquad \text{(Q.35)}$$

したがって

$$Y_i' = \beta_1 + \beta_3 Z_{1i} + \beta_4 Z_{2i} + \beta_5 X_{5i} + v_i \qquad \text{(Q.36)}$$

を OLS で推定し H_0 モデルの残差 2 乗和 $\Sigma\hat{v}_i^2$ を求めることができる。これより F 値を

$$F^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \hat{v}_i^2 - \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2\right)/1}{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2/(25-1)} \qquad \text{(Q.37)}$$

として求め，臨界値 $F_{1,24,0.05}$ と比較すればよい。

(2) まず 2 つの制約を以下のように書き直す。

$$\beta_2 = 1 - \beta_3 - \beta_4, \quad \beta_5 = 0.5 - 0.5\beta_3 - 0.5\beta_4$$

これを元のモデルに代入すると

$$
\begin{aligned}
Y_i = \beta_1 + (1-\beta_3-\beta_4)X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \beta_4 X_{4i} \\
+(0.5-0.5\beta_3-0.5\beta_4)X_{5i} + v_i
\end{aligned} \tag{Q.38}
$$

これをまとめ直すと

$$
\begin{aligned}
\underbrace{Y_i - X_{2i} - 0.5X_{5i}}_{Y_i'\text{とする}} = \beta_1 + \beta_3 \underbrace{(X_{3i} - X_{2i} - 0.5X5i)}_{Z_{1i}\text{とする}} \\
+\beta_4 \underbrace{(X_{4i} - X_{2i} - 0.5X_{5i})}_{Z_{2i}\text{とする}} + v_i
\end{aligned} \tag{Q.39}
$$

したがって，H_0 モデルとして，以下のモデルを推定すればよい。

$$
Y_i' = \beta_1 + \beta_3 Z_{1i} + \beta_4 Z_{2i} + v_i \tag{Q.40}
$$

3　（Excel 解答ファイルあり）検定する仮説は，1990 年より以前のモデルを，

$$
RC_i = \beta_1^* + \beta_2^* RYD_i + \beta_3^* RYD_{i-1} + \beta_4^* RMA_i + v_i \tag{Q.41}
$$

とし，1991 年以降のモデルを

$$
RC_i = \beta_1' + \beta_2' RYD_i + \beta_3' RYD_{i-1} + \beta_4' RMA_i + v_i \tag{Q.42}
$$

とすると，$H_0 : \beta_i^* = \beta_i' \quad (i = 1, 2, 3, 4)$, $H_1 : H_0$ ではない，となる。H_0 のもとでのモデルを，

$$
RC_i = \beta_1 + \beta_2 RYD_i + \beta_3 RYD_{i-1} + \beta_4 RMA_i + u_i \tag{Q.43}
$$

とする。Excel を用いて計算すると，

$$
SSE_0 = \sum \hat{u}_i^2 = 109437024.4
$$

H_1 モデルの残差 2 乗和は，前半のデータを用いた OLS の残差 2 乗和を SSE_{11}，後半のデータを用いた残差 2 乗和を SSE_{12} とすると，

$$
SSE_1 = SSE_{11} + SSE_{12} = 18266284.55 + 78987478 = 97253762.55
$$

制約の数は $G = 4$，推定するパラメータの数は $k = 4$, データの数 $n = 27$ より，F 値は,

$$F^* = \frac{(109437024.4 - 97253762.55)/4}{97253762.55/(27-4)} = 0.720319234 \qquad \text{(Q.44)}$$

この値は，帰無仮説のもとで，自由度 $(4, 23)$ の F 分布に従い，その上側 5% 点は $F_{0.05,4.23} = 2.796$ となる。したがって，$F^* < 2.796$ より，有意水準 5% で帰無仮説は棄却されない。以上から，有意な構造変化は確認されなかった.

第 9 章　撹乱項の系列相関

1　（Excel 解答ファイルあり）Excel による推定結果は以下で与えられる。

$$\underset{}{\hat{Y}_i} = \underset{(5.78)}{88.06} - \underset{(-2.19)}{0.54X_i} \quad \underset{(-0.130)}{\hat{\rho} = -0.0557} \quad R^2 = 0.705, \quad \bar{R}^2 = 0.558 \quad s = 10.94 \qquad \text{(Q.45)}$$

2　（Excel 解答ファイルあり）最小 2 乗推定したモデル

$$\hat{RC}_i = \underset{(5.37)}{44776.26} + \underset{(9.06)}{0.40RYD_i} + \underset{(2.06)}{0.02RMA_i} \quad R^2 = 0.996, \quad \bar{R}^2 = 0.995 \quad s = 2339.48 \qquad \text{(Q.46)}$$

の残差を用いて，DW 検定を行うと,

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^{n}(\hat{u}_i - \hat{u}_{i-1})^2}{\sum_{i=2}^{n}\hat{u}_i^2} = \frac{58674756.53}{71151012.08} = 0.82 \qquad \text{(Q.47)}$$

ここで，データの数 $n = 16$, 定数項を含まない説明変数の数 $m = 2$ より，下限の分布と上限の分布の下側 5% 点は,

$$d_{16,2}^{L} = 0.86 \quad d_{16,2}^{U} = 1.73$$

である．したがって，有意水準 5% で，帰無仮説 $\rho = 0$ は棄却され，誤差項の系列相関が確認された。

コックラン=オーカット法を用いて，系列相関の影響を取り除いた推定を行う。前出の残差を用いて ρ を推定すると，

$$\hat{u}_i = 0.607\hat{u}_{i-1} + \hat{\epsilon}_i \tag{Q.48}$$

より，$\hat{\rho} = 0.607$。この値を用いて変換した変数を用い，モデルを推定すると，

$$\underset{}{\hat{RC}_i^*} = \underset{(3.86)}{17369.68} + \underset{(8.21)}{0.41RYD_i^*} + \underset{(1.75)}{0.02RMA_i^*} \quad R^2 = 0.978, \quad \bar{R}^2 = 0.975, \quad s = 2025.81 \tag{Q.49}$$

$\hat{\alpha}$ については，

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}^*/(1-\hat{\rho}) = 17369.68/(1-0.607) = 44178.88 \tag{Q.50}$$

第 10 章　撹乱項の不均一分散

1　変換後のデータは次のように求められる。

$Y_i' = Y_i/X_i$	$ZI_i' = 1/X_i$	X_i'
24	0.2	1
11.083	0.0833	1
10.667	0.0667	1
9.5	0.1	1

これより，通常の単純回帰分析の手続きより，

$$\hat{Y} = 111.176 + 1.155X \tag{Q.51}$$

を得る。

2　変換後のデータは次のように求められる。

$Y_i' = Y_i/\sqrt{X_i}$	$ZI_i' = 1/\sqrt{X_i}$	$X_i' = \sqrt{X_i}$
53.666	0.447	2.236
38.394	0.289	3.464
41.312	0.258	3.873
30.042	0.316	3.162

これより，以下の結果を得る。

$$\hat{Y} = 99.482 + 2.621X \tag{Q.52}$$

3　（Excel 解答ファイルあり）モデルの推定結果は，

$$\underset{}{\hat{NoS_i}} = \underset{(-2.16)}{-1.12} \underset{(36.50)}{+0.07Pop_i} \quad R^2 = 0.969, \quad \underset{s=2.127}{\bar{R}^2 = 0.969} \tag{Q.53}$$

不均一分散の検定のために，残差を用いて，以下の推定を行った。

$$\hat{u}_i^2 = \underset{(-1.62)}{-6.05} \underset{(2.66)}{+0.08Pop_i} + \underset{(-2.22)}{-0.00009Pop_i^2} \quad R^2 = 0.189, \quad \underset{s=7.640}{\bar{R}^2 = 0.150} \tag{Q.54}$$

LM 検定は

$$nR^2 = 44 \times 0.189 = 8.335 \tag{Q.55}$$

自由度 2 の χ^2 分布の 5% 点は，$\chi^2_{2,0.05} = 5.991$ より，帰無仮説は棄却され，不均一分散が確認された。

第 11 章　AR(1) モデルと予測

1　$Y_t = 1.2 + 0.8Y_{t-1} + u_t$ の 1 期先から 3 期先予測は，$Y_T = 100$ のとき

$$\hat{Y}_{T+1} = 1.2 + 0.8 \times Y_T = 1.2 + 80 = 81.2$$

$$\hat{Y}_{T+2} = 1.2 + 0.8 \times \hat{Y}_{T+1} = 1.2 + 0.8 \times 81.2 = 66.16$$

$$\hat{Y}_{T+2} = 1.2 + 0.8 \times \hat{Y}_{T+2} = 54.128$$

2　$Y_t=(0.8+0.1)Y_{t-1}+u_t$ の 1 期先から 3 期先のインパルス応答関数は，1 期先が $(0.8+0.1)=0.9$, 2 期先が $(0.9)^2=0.81$, 3 期先が 0.729 である。$Y_t=0.8Y_{t-1}+u_t$ のとき，$0.8, 0.64, 0.512$ となる。それぞれの差をとると，前者のモデルのほうが $0.1, 0.17, 0.217$ と効果が大きくなっている。

3　$Y_t=0.1+1.2Y_{t-1}+u_t$ の 1 期先から 3 期先予測は，$Y_T=100$ のとき

$$\hat{Y}_{T+1}=0.1+1.2\times Y_T=0.1+1.2\times 100=120.1$$

$$\hat{Y}_{T+2}=0.1+1.2\times \hat{Y}_{T+1}=0.1+1.2\times 120.1=144.22$$

$$\hat{Y}_{T+2}=0.1+0.8\times \hat{Y}_{T+2}=173.164$$

予測値が大きくなっていくことが確認できた。

第 12 章　パネル・データ分析

1　個別効果とは，モデルから除かれた説明変数のうち，時間で変化しない個体 i 固有の要因のことである。

2　モデルから除かれた説明変数である個別効果 α_i が存在する場合，その影響を取り除くことは難しく，OLS では一致性が得られない。一方，パネルデータのように各個体に複数時点のデータがあるときは，最小 2 乗ダミー変数推定量や固定効果推定量が適用可能であり，個別効果 α_i の影響を排除して β の一致推定量を得ることが可能となる。

3　（Excel 解答ファイルあり）推定したい 2015 年から 2019 年（$T=5$）の日本の地方別 $(n=10)$ の消費関数モデルは,

$$C_{it}=\beta Y_{it}+\Sigma_{k=1}^{10}\alpha_k D_{kt}+u_{it} \tag{Q.56}$$

である。

(1)　LSDV 推定の推定結果は以下となる。カッコ内の値は t 値である。

$$\hat{C}_{it} = \underset{(4.58)}{0.22Y_{it}} + \underset{(9.90)}{202550.44D_{1t}} + \cdots \underset{(10.57)}{165991.07D_{8t}} \quad \text{(Q.57)}$$

$$R^2 = 0.9996, \quad \bar{R}^2 = 0.9738, \quad s = 6924.460$$

推定結果から，ダミー変数の係数は有意に推定されたことがわかる。

(2)　固定効果推定の推定結果は，次となる。前例と同様に，カッコ内の値は t 値である。

$$\hat{C}_{it} - \bar{C}_i = \underset{(5.13)}{0.22(\hat{Y}_{it} - \bar{Y}_i)} \quad \text{(Q.58)}$$

$$R^2 = 0.350, \quad \bar{R}^2 = 0.329, \quad s = 6177.606$$

β の推定値は LSDV 推定量と等しいことが確認できた。t 値については変化している。また，決定係数は，LSDV と比較し，大きく下落したことが確認された。

(3)　固定効果の有無の検定をするために，POOL されたモデルの推定を行う。推定結果は，以下となる。

$$\hat{C}_{it} = \underset{(7.22)}{98292.43} + \underset{(15.10)}{0.48\hat{Y}_{it}} \quad \text{(Q.59)}$$

$$R^2 = 0.826, \quad \bar{R}^2 = 0.822, \quad s = 11014.037$$

β の推定値が LSDV 推定量と固定効果推定量と大きく異なることが確認できた。

次に，以下の仮説の検証を有意水準 5% で行う。

$$\begin{cases} H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{10} \\ H_1 : H_0 \text{ではない} \end{cases} \quad \text{(Q.60)}$$

制約の数は 9 個である。検定統計量は，$n = 10, T = 5$ より自由度 $(9, 39)$ の F 分布に従う。上側 5% の棄却域の臨界点は $F_{0.05} = 2.13$ となる。

LSDV 推定量の残差 2 乗和と固定効果推定量の残差 2 乗和は同じ値となる。それぞれの残差 2 乗和から，

$$F = \frac{(5822833035.67 - 1869977780.52)/(10-1)}{1869977780.52/(50-10-1)} = 9.16 > 2.13$$

有意水準 5% で，H_0 を棄却する。固定効果が存在しているといえる。