

WEB解説3.1 **最小2乗法**

前回作成したファイルを開く

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	i	X_i	Y_i	$(X_i - \bar{X})$	$(Y_i - \bar{Y})$	$(X_i - \bar{X})^2$	$(Y_i - \bar{Y})^2$	$(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$			
2	1	10	6	-3	-2.75	9	7.5625		8.25		
3	2	12	9	-1	0.25	1	0.0625		-0.25		
4	3	14	10	1	1.25	1	1.5625		1.25		
5	4	16	10	3	1.25	9	1.5625		3.75		
6	和	52	35			20	10.75		13		
7	平均	13	8.75			Sxx	Syy	Sxy			
8		13	8.75	分散		6.666667	3.583333		4.333333333	共分散	
9						6.666667	3.583333		4.333333333		
10				標準偏差		2.581989	1.892969		0.886592641	相関係数	
11						2.581989	1.892969		0.886592641		
12											

βの推定

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	i	X_i	Y_i	$(X_i - \bar{X}_B)$	$(Y_i - \bar{Y}_B)$	$(X_i - \bar{X}_B)^2$	$(Y_i - \bar{Y}_B)^2$	$(X_i - \bar{X}_B)(Y_i - \bar{Y}_B)$		
2	1	10	6	-3	-2.75	9	7.5625		8.25	
3	2	12	9	-1	0.25	1	0.0625		-0.25	
4	3	14	10	1	1.25	1	1.5625		1.25	
5	4	16	10	3	1.25	9	1.5625		3.75	
6	和	52	35			20	10.75		13	
7	平均	13	8.75			Sxx	Syy	Sxy		
8		13	8.75	分散	6.666667	3.583333	4.333333333	共分散		
9					6.666667	3.583333	4.333333333			
10				標準偏差	2.581989	1.892969	0.886592641	相関係数		
11					2.581989	1.892969	0.886592641			
12										
13										
14			Beta hat =							
15			Alpha hat =	+						

Beta hat =
Alpha hat = +

①計算結果を示したいセルの
隣に名前を入力。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	i	X_i	Y_i	$(X_i - \bar{B}_i)$	$(Y_i - \bar{Y}_B)$	$(X_i - \bar{B}_i)^2$	$(Y_i - \bar{Y}_B)^2$	$(X_i - \bar{B}_i)(Y_i - \bar{Y}_B)$		
2	1	10	6	-3	-2.75	9	7.5625	8.25		
3	2	12	9	-1	0.25	1	0.0625	-0.25		
4	3	14	10	1	1.25	1	1.5625	1.25		
5	4	16	10	3	1.25	9	1.5625	3.75		
6	和	52	35			20	10.75	13		
7	平均	13	8.75			Sxx	Syy	Sxy		
8				分散	6.666667	3.583333	4.333333333	共分散		
9					6.666667	3.583333	4.333333333			
10				標準偏差	2.581989	1.892969	0.886592641	相関係数		
11					2.581989	1.892969	0.886592641			
12										
13				Beta hat=	=H6/F6					
14				Alpha hat=						
15										
16										
17										

Beta hat= =H6/F6
Alpha hat=

Sxyが計算されているH6 と
Sxxが入力されているF6 の比をとり,
『=H6/F6』と入力する。

α の推定

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	i	X_i	Y_i	$(X_i - \bar{X})$	$(Y_i - \bar{Y})$	$(X_i - \bar{X})^2$	$(Y_i - \bar{Y})^2$	$(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$		
2	1	10	6	-3	-2.75	9	7.5625	8.25		
3	2	12	9	-1	0.25	1	0.0625	-0.25		
4	3	14	10	1	1.25	1	1.5625	1.25		
5	4	16	10	3	1.25	9	1.5625	3.75		
6	和	52	35			20	10.75	13		
7	平均	13	8.75			Sxx	Syy	Sxy		
8				分散	6.666667	3.583333	4.333333333	共分散		
9					6.666667	3.583333	4.333333333			
10				標準偏差	2.581989	1.892969	0.886592641	相関係数		
11					2.581989	1.892969	0.886592641			
12										
13				Beta hat=	0.65					
14				Alpha hat=	=C7-D13*B7					
15										
16										

『=C7-D13*B7』と入力する。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	i	X_i	Y_i	$(X_i - \bar{X})$	$(Y_i - \bar{Y})$	$(X_i - \bar{X})^2$	$(Y_i - \bar{Y})^2$	$(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$		
2	1	10	6	-3	-2.75	9	7.5625	8.25		
3	2	12	9	-1	0.25	1	0.0625	-0.25		
4	3	14	10	1	1.25	1	1.5625	1.25		
5	4	16	10	3	1.25	9	1.5625	3.75		
6	和	52	35			20	10.75	13		
7	平均	13	8.75			Sxx	Syy	Sxy		
8		13	8.75		分散	6.666667	3.583333	4.333333333	共分散	
9						6.666667	3.583333	4.333333333		
10					標準偏差	2.581989	1.892969	0.886592641	相關係數	
11						2.581989	1.892969	0.886592641		
12										
13		Beta hat=	0.65							
14		Alpha hat=	0.3							
15										
16										

理論値を出すための準備

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	i	$(X_i - \bar{X})Y_i$		$(X_i - \bar{X})$	$(Y_i - \bar{Y})$	$(X_i - \bar{X})^2$	$(Y_i - \bar{Y})^2$	$(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$	=B1	
2	1	10	6	-3	-2.75	9	7.5625	8.25		
3	2	12	9	-1	0.25	1	0.0625	-0.25		
4	3	14	10	1	1.25	1	1.5625	1.25		
5	4	16	10	3	1.25	9	1.5625	3.75		
6	和	52	35			20	10.75	13		
7	平均	13	8.75			Sxx	Syy	Sxy		
8		13	8.75	分散	6.666667	3.583333	4.333333333	共分散		
9					6.666667	3.583333	4.333333333			
10				標準偏差	2.581989	1.892969	0.886592641	相関係数		
11					2.581989	1.892969	0.886592641			
12										
13			Beta hat=	0.65						
14			Alpha hat=	0.3						
15										

①『=B1』と入力。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	i	X_i	Y_i	$(X_i - \bar{X})$	$(Y_i - \bar{Y})$	$(X_i - \bar{X})^2$	$(Y_i - \bar{Y})^2$	$(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$	X_i		
2	1	10	6	-3	-2.75	9	7.5625	8.25	10		
3	2	12	9	-1	0.25	1	0.0625	-0.25	12		
4	3	14	10	1	1.25	1	1.5625	1.25	14		
5	4	16	10	3	1.25	9	1.5625	3.75	16		
6	和	52	35			20	10.75	13			
7	平均	13	8.75			Sxx	Syy	Sxy			
8		13	8.75	分散	6.666667	3.583333	4.333333333	共分散			
9					6.666667	3.583333	4.333333333				
10				標準偏差	2.581989	1.892969	0.886592641	相関			
11					2.581989	1.892969	0.886592641				
12											
13			Beta hat=	0.65							
14			Alpha hat=	0.3							
15											

②数式をコピーし、Xの数値を表示する。

- Yについても同様に

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
i	X_i	Y_i	$(X_i - \bar{X}_i)$	$(Y_i - \bar{Y}_i)$	$(X_i - \bar{X}_i)^2$	$(Y_i - \bar{Y}_i)^2$	$(X_i - \bar{X}_i)(Y_i - \bar{Y}_i)$	X_i	Y_i	
1	10	6	-3	-2.75	9	7.5625	8.25	10	6	
2	12	9	-1	0.25	1	0.0625	-0.25	12	9	
3	14	10	1	1.25	1	1.5625	1.25	14	10	
4	16	10	3	1.25	9	1.5625	3.75	16	10	
6 和	52	35			20	10.75	13			
7 平均	13	8.75			Sxx	Syy	Sxy			
8				分散	6.666667	3.583333	4.333333333	共分散		
9					6.666667	3.583333	4.333333333			
10				標準偏差	2.581989	1.892969	0.886592641	相関係数		
11					2.581989	1.892969	0.886592641			
12										
13		Beta hat=	0.65							
14		Alpha hat=	0.3							
15										
16										

理論値の計算

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
i		X_i	Y_i	$(X_i - \bar{X})$	$(Y_i - \bar{Y})$	$(X_i - \bar{X})^2$	$(Y_i - \bar{Y})^2$	$(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$	X_i	Y_i	Y_{iH}
1	1	10	6	-3	-2.75	9	7.5625	8.25	10	6	$=\$D\$14+\$D\$13*I2$
2	2	12	9	-1	0.25	1	0.0625	-0.25	12	9	
3	3	14	10	1	1.25	1	1.5625	1.25	14	10	
4	4	16	10	3	1.25	9	1.5625	3.75	16	10	
6	和	52	35			20	10.75	13			
7	平均	13	8.75			Sxx	Syy	Sxy			
8				分散	6.666667	3.583333	4.333333333				
9				標準偏差	6.666667	3.583333	4.333333333				
10					2.581989	1.892969	0.886592641				
11					2.581989	1.892969	0.886592641				
13	Beta hat=	0.65									
14	Alpha hat=	0.3									

①1つ目のデータの理論値を計算するために,
『=\$D\$14+\$D\$13*I2』
を入力。

H	I	J	K	L
$-(\bar{X}B)(Y_i - \bar{Y}B)$	X_i	Y_i	Y_{iH}	
8.25	10	6	6.8	
-0.25	12	9		
1.25	14	10		
3.75	16	10		
13				

②他のデータの理論値を計算するため、数式をコピー。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	i	X_i	Y_i	$(X_i - \bar{X}_B)$	$(Y_i - \bar{Y}_B)$	$(X_i - \bar{X}_B)^2$	$(Y_i - \bar{Y}_B)^2$	$(X_i - \bar{X}_B)(Y_i - \bar{Y}_B)$	X_i	Y_i	$Y_i H$	
2	1	10	6	-3	-2.75	9	7.5625		8.25	10	6.8	
3	2	12	9	-1	0.25	1	0.0625		-0.25	12	8.1	
4	3	14	10	1	1.25	1	1.5625		1.25	14	9.4	
5	4	16	10	3	1.25	9	1.5625		3.75	16	10.7	
6	和	52	35			20	10.75		13			
7	平均	13	8.75			Sxx	Syy	Sxy				
8		13	8.75	分散	6.666667	3.583333		4.333333333	共分散			
9					6.666667	3.583333		4.333333333				
10				標準偏差	2.581989	1.892969		0.886592641	相関係数			
11					2.581989	1.892969		0.886592641				
12												
13		Beta hat=	0.65									
14		Alpha hat=	0.3									
15												

理論値が計算された。

残差の計算

①『=J2-K2』を入力。

-YB)	Xi	Yi	YiH	uiH
8.25	10	6	6.8	=J2-K2
-0.25	12	9	8.1	
1.25	14	10	9.4	
3.75	16	10	10.7	
	13			
33333	共分散			

②数式をコピー。

K	L
YiH	uiH
6	6.8
9	8.1
10	9.4
10	10.7

J	K	L
1	YiH	uiH
6	6.8	-0.8
9	8.1	0.9
10	9.4	0.6
10	10.7	-0.7

③残差が計算された。

-YB)	I	J	K	L	M
Xi	Yi	YiH	uiH		
8.25	10	6	6.8	-0.8	
-0.25	12	9	8.1	0.9	
1.25	14	10	9.4	0.6	
3.75	16	10	10.7	-0.7	
13				=sum(L2:L5)	

33333	共分散				

①残差の和を
計算する。

I	J	K	L	M
Xi	Yi	YiH	uiH	
10	6	6.8	-0.8	
12	9	8.1	0.9	
14	10	9.4	0.6	
16	10	10.7	-0.7	

共分散			3.55271E-15	

相関係数				

②0に近い値が
得られた。

残差の性質の確認2

I-YB)	I	J	K	L	M
Xi	10	6	6.8	uiH	uiH*X
Yi	12	9	8.1	-0.8	=I2*L2
8.25	12	9	8.1	0.9	
-0.25	14	10	9.4	0.6	
1.25	16	10	10.7	-0.7	
3.75				3.55271 E-15	
13					

① 残差とXの積を
計算する。

L	M	N
uiH	uiH*X	-8
-0.8		
0.9		
0.6		
-0.7		
3.55271 E-15		

② 数式を
コピー。

YiH	uiH	uiH*X
6.8	-0.8	-8
8.1	0.9	10.8
9.4	0.6	8.4
10.7	-0.7	-11.2
3.55271 E-15		

③ 計算された
値を確認。

I	J	K	L	M	N
X_i	Y_i	Y_iH	uiH	$uiH \times X$	
10	6	6.8	-0.8	-8	
12	9	8.1	0.9	10.8	
14	10	9.4	0.6	8.4	
16	10	10.7	-0.7	-11.2	
			3.55271E-15	=SUM(M2:M5)	
共分散					

①和を計算する。

I	J	K	L	M	
$-YB$)	X_i	Y_i	Y_iH	uiH	$uiH \times X$
8.25	10	6	6.8	-0.8	-8
-0.25	12	9	8.1	0.9	10.8
1.25	14	10	9.4	0.6	8.4
3.75	16	10	10.7	-0.7	-11.2
13				3.55271E-15	4.61853E-14
33333	共分散				
33333					
92641	相関係数				
80000					

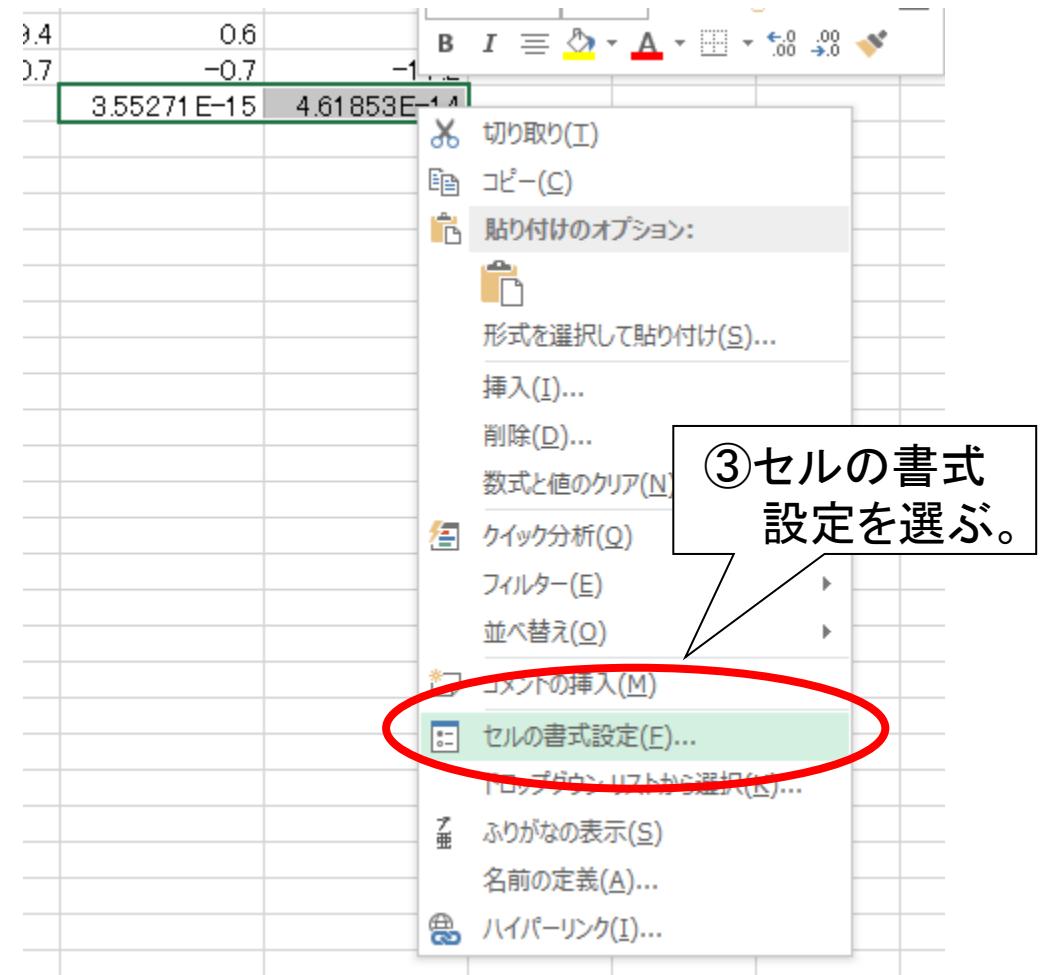
②0に近い値で計算される。

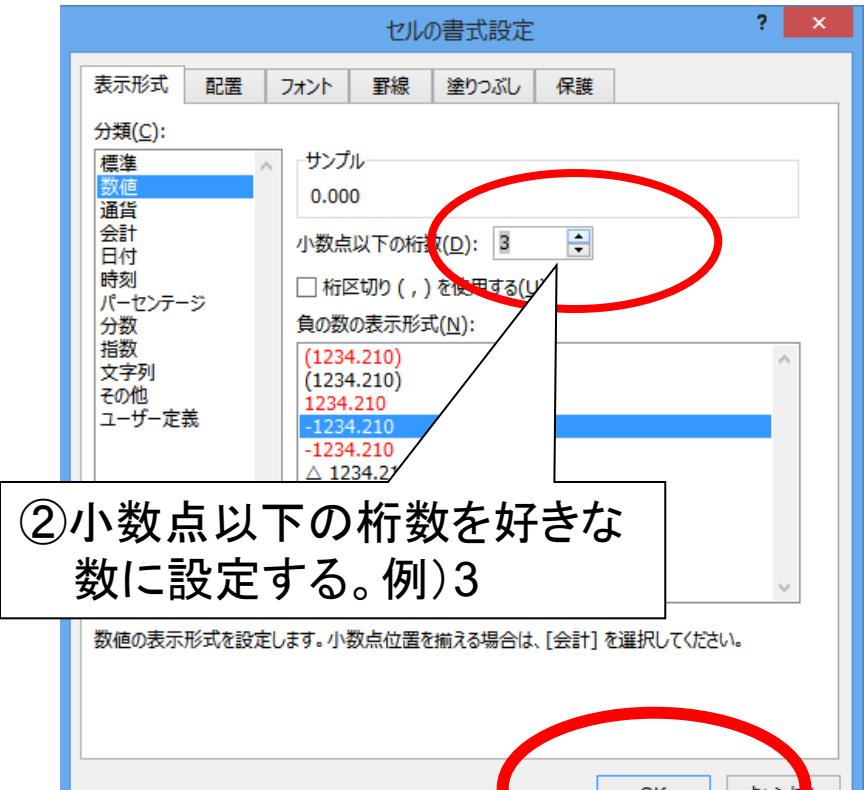
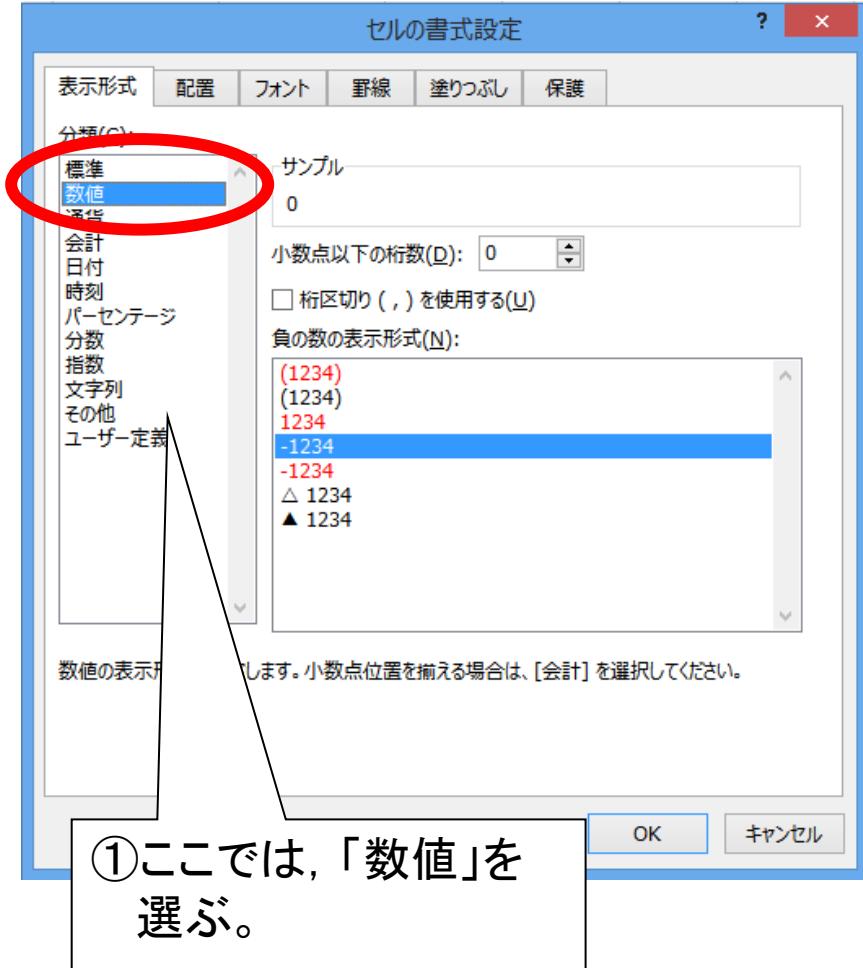
(参考)セルの表示形式

L	M	N
uiH	uiH*X	
1.8	-0.8	-8
3.1	0.9	10.8
3.4	0.6	8.4
3.7	-0.7	-11.2
	3.55271E-15	4.61853E-14

①2つのセルを
同時に選択。

②右クリックすると、
右側の図のようになる。





	I	J	K	L	M	N	O
-YB)	Xi	Yi	YiH	uiH	uiH*X		
8.25	10	6	6.8	-0.8	-8		
-0.25	12	9	8.1	0.9	10.8		
1.25	14	10	9.4	0.6	8.4		
3.75	16	10	10.7	0.7	11.2		
13				0.000	0.000		
33333	共分散						
33333							
92641	相関係数						
92641							

先ほどの数字が、0と
表示されているのがわかる。

決定係数の計算1

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	i	X_i	Y_i	$(X_i - \bar{X})$	$(Y_i - \bar{Y})$	$(X_i - \bar{X})^2$	$(Y_i - \bar{Y})^2$	$(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$	X_i	Y_i	$\bar{Y}_i H$	$u_i H$	$u_i H * X$	$(Y_i H - \bar{Y} H)^2$
2	1	10	6	-3	-2.75	9	7.5625	8.25	10	6	6.8	-0.8	-8	$=(K2 - \$C\$7)^2$
3	2	12	9	-1	0.25	1	0.0625	-0.25	12	9	8.1	0.9	10.8	
4	3	14	10	1	1.25	1	1.5625	1.25	14	10	9.4	0.6	8	
5	4	16	10	3	1.25	9	1.5625	3.75	16	10	10.7	-0.7	0.000	
6	和	52	35		20	10.75	13							
7	平均	13	8.75											
				Sxx	Syy	Sxy								
			分散	6.666667	3.583333	4.333333333	共分散							
				6.666667	3.583333	4.333333333								
			標準偏差	2.581989	1.892969	0.886592641	相関係数							
				2.581989	1.892969	0.886592641								
13	Beta hat=	0.65												
14	Alpha hat=	0.3												

①計算のための、理論値の偏差2乗を計算する。

『 $=(K2 - \$C\$7)^2$ 』を入力する。

②数式をコピー。

J	K	L	M	N
Y_i	$\bar{Y}_i H$	$u_i H$	$u_i H * X$	$(Y_i H - \bar{Y} H)^2$
6	6.8	-0.8	-8	3.8025
9	8.1	0.9	10.8	0.4225
10	9.4	0.6	8.4	0.4225
10	10.7	-0.7	-11.2	3.8025
		0.000	0.000	

③理論値の偏差2乗が計算された。

L	M	N	O
	uiH*X	$(Y_iH - Y_B)^2$	
-0.8	-8	3.8025	
0.9	10.8	0.4225	
0.6	8.4	0.4225	
-0.7	-11.2	3.8025	
0.000	0.000	=SUM(N2:N5)	

①偏差2乗の和を計算する。
『=sum(N2:N5)』と入力。

F	G	H	I	J	K	L	M	N	C
$(X_i - B_i)^2$	$(Y_i - Y_B)^2$	$(X_i - X_B)(Y_i - Y_B)$	X_i	Y_i	Y_iH	u_iH	$u_iH * X$	$(Y_iH - Y_B)^2$	
5	9	7.5625	8.25	10	6	6.8	-0.8	-8	3.8025
5	1	0.0625	-0.25	12	9	8.1	0.9	10.8	0.4225
5	1	1.5625	1.25	14	10	9.4	0.6	8.4	0.4225
5	9	1.5625	3.75	16	10	10.7	-0.7	-11.2	3.8025
20	10.75		13				0.000	0.000	8.45
Sxx	Syy	Sxy							
6.666667	3.583333	4.333333333	共分散						
6.666667	3.583333	4.333333333							
2.581989	1.892969	0.886592641	相関係数						
2.581989	1.892969	0.886592641							

R2=

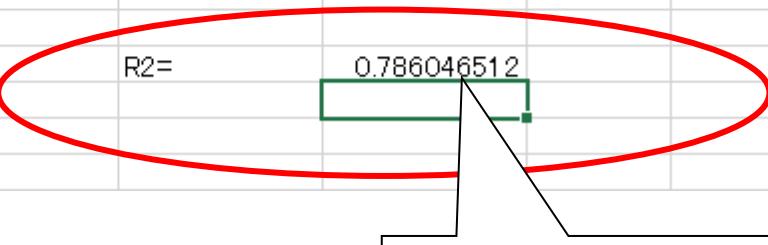
=N6/G6

②決定係数を計算するために
『=N6/G6』を入力する。

	I	J	K	L	M	N	O
-YB)	Xi	Yi	YiH	uiH	uiH*X	(YiH-YB)^2	
8.25	10	6	6.8	-0.8	-8	3.8025	
-0.25	12	9	8.1	0.9	10.8	0.4225	
1.25	14	10	9.4	0.6	8.4	0.4225	
3.75	16	10	10.7	-0.7	-11.2	3.8025	
13				0.000	0.000	8.45	

33333 共分散
 33333
 32641 相関係数
 32641

R2= 0.786046512



0.786と計算された。

決定係数の計算2

L	M	N	O
uiH	uiH*X	$(YiH - YB)^2$	uiH^2
-0.8		3.8025	=L2^2
0.9	10.8	0.4225	
0.6	8.4	0.4225	
-0.7		3.8025	
0.000		0.000	8.45

①残差2乗を計算する。
『=L2^2』を入力。

②コピー。

N	O	P
$(YiH - YB)^2$	uiH^2	
3.8025	0.64	
0.4225		
0.4225		
3.8025		
0.000	8.45	

L	M	N	O	P
uiH	uiH*X	$(YiH - YB)^2$	uiH^2	
6.8	-0.8	3.8025	0.64	
8.1	0.9	0.4225	0.81	
9.4	0.6	0.4225	0.36	
10.7	-0.7	3.8025	0.49	
0.000	0.000	0.45	=sum(O2:O5)	

R2= 0.786046512

③合計を計算する。
『=sum(O2:O5)』と入力。

O	P
uiH^2	
025	0.64
225	0.81
225	0.36
025	0.49
0.45	2.3

④残差2乗和が
計算された。

F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
$(X_i - Bi)^2$	$(Y_i - YB)^2$	$(Xi - XB)(Yi - YB)$	X_i	Y_i	YiH	uiH	$uiH * X$	$(YiH - YB)^2$	uiH^2	
9	7.5625	8.25	10	6	6.8	-0.8	-8	3.8025	0.64	
1	0.0625	-0.25	12	9	8.1	0.9	10.8	0.4225	0.81	
1	1.5625	1.25	14	10	9.4	0.6	8.4	0.4225	0.36	
9	1.5625	3.75	16	10	10.7	-0.7	-11.2	3.8025	0.49	
20	10.75	13				0.000	0.000	8.45	2.3	
Sxx	Syy	Sxy	共分散							
6.666667	3.583333	4.333333333	R2= 0.786046512							
6.666667	3.583333	4.333333333	相関係数							
2.581989	1.892969	0.886592641	R2= =1-O6/G6							
2.581989	1.892969	0.886592641								

残差2乗和を使う方法で決定係数を計算する。
『=1-O6/G6』を入力する。

K	L	M	N
H	uiH	$uiH*X$	$(YiH - Y)$
6.8	-0.8	-8	3.80
8.1	0.9	10.8	0.42
9.4	0.6	8.4	0.42
10.7	-0.7	-11.2	3.80
	0.000	0.000	8.

$R^2 =$	0.786046512
$R^2 =$	0.786046512

どちらの計算方法
を使っても、同じ値
の決定係数が計算
できる。

(参考)Yのデータを変更し 同様の計算をしてみる

Yのデータを、4,3,4,6に変更。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	i	X_i	Y_i	$(X_i - \bar{X})$	$(Y_i - \bar{Y})$	$(X_i - \bar{X})^2$	$(Y_i - \bar{Y})^2$	$(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$	X_i	Y_i	$Y_i \bar{H}$	$\bar{H} Y_i$	$\bar{H} X_i$	$(Y_i - \bar{Y})^2$	\bar{H}^2
2	1	10	4	-3	-0.25	9	0.0625	0.75	10	4	3.2	0.8	8	1.1025	0.64
3	2	12	3	-1	-1.25	1	1.5625	1.25	12	3	3.9	-0.9	-10.8	0.1225	0.81
4	3	14	4	1	-0.25	1	0.0625	-0.25	14	4	4.6	-0.6	-8.4	0.1225	0.36
5	4	16	6	3	1.75	9	3.0625	5.25	16	6	5.3	0.7	11.2	1.1025	0.49
6	和	52	17			20	4.75	7			0.000	0.000	2.45	2.3	
7	平均	13	4.25			Sxx	Syy	Sxy							
8				分散		6.666667	1.583333	2.3333333333	共分散						
9						6.666667	1.583333	2.3333333333							
10				標準偏差		2.581989	1.258306	0.718184846	相関係数						
11						2.581989	1.258306	0.718184846							
12															
13				Beta hat=		0.35									
14				Alpha hat=		-0.3									
15															

R2= 0.515789474

R2= 0.515789474

前の結果と比較すると、
変わっているか？
同じか？