

公共経済学

玉井 寿樹・菊池 悠矢 共著

練習問題解答

新 世 社

第 1 章練習問題 解答例

1. 完全競争市場の条件

- ・無数の売り手と買い手の存在：プライステイカー（価格受容者）である
- ・財の同質性：差別化がない
- ・市場への参入・退出：参入障壁がない
- ・完全情報：全ての市場参加者が財などについて全て把握していること、情報の非対称性などがない。

2. 政府の役割

- ・市場の失敗の是正
- ・市場の番人（市場のルールを守らせる）

3. 公共経済学と財政学

財政学は、財政の経済分析と制度や法律などの政府部門の経済活動を考察するのに対して、公共経済学は、財政の経済分析に限らず、市場の失敗と公共政策などを広くカバーしている。

第2章練習問題 解答例

1. 需要曲線の右シフト

消費者余剰：増加する
生産者余剰：増加する
社会的余剰：増加する

2. 供給曲線の左シフト

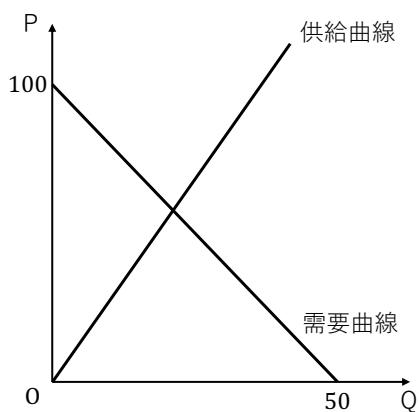
消費者余剰：減少する
生産者余剰：減少する
社会的余剰：減少する

3. 図表 2.10 (b) の確認

J まで生産したときの社会的余剰 = $AMJO - NJO = AEO - ENM$

4. 需要・供給と余剰に関する計算問題

(1) 作図



(2) 市場近郊価格・数量 : $p = 60, q = 20$

p を消去すると

$$100 - 2q = 3q$$

したがって,

$$q = 20$$

需要曲線あるいは供給曲線の式に代入すると

$$p = 60$$

(3) 消費者余剰 : 400 生産者余剰 : 600 社会的余剰 : 1000

<参考>

需要曲線の式： $p = b - aq$

供給曲線の式： $p = d + cq$

ただし、 p は価格、 q は数量、 $a > 0, c > 0, b > d \geq 0$ とする。

需要曲線と供給曲線の式を連立方程式として p と q について解くと、

$$p^* = \frac{ad + bc}{a + c}, q^* = \frac{b - d}{a + c}$$

これを用いると、

消費者余剰：

$$CS = \frac{1}{2} \times \left(b - \frac{ad + bc}{a + c} \right) \times \left(\frac{b - d}{a + c} \right) = \frac{a(b - d)^2}{2(a + c)^2}$$

生産者余剰：

$$PS = \frac{1}{2} \times \left(\frac{ad + bc}{a + c} - d \right) \times \left(\frac{b - d}{a + c} \right) = \frac{c(b - d)^2}{2(a + c)^2}$$

社会的余剰：

$$SS = \frac{(b - d)^2}{2(a + c)}$$

1： b の増加が需要曲線の右シフトなので、いずれの余剰も増加

2： d の増加が供給曲線の左シフトなので、いずれの余剰も減少

4：上記の一般的な手順に従えば数値を計算できる。

第3章練習問題 解答例

1. 制約条件付きの効用最大化問題

$$(1) p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq I$$

$$(2) x_1 = \frac{aI}{p_1}, x_2 = \frac{(1-a)I}{p_2}, V^h = \left(\frac{a}{p_1}\right)^a \left(\frac{1-a}{p_2}\right)^{1-a} I$$

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = \frac{ax_1^{a-1}x_2^{1-a}}{(1-a)x_1^a x_2^{-a}} = \frac{a}{1-a} \frac{x_2}{x_1}$$

なので

$$\begin{aligned} \frac{a}{1-a} \frac{x_2}{x_1} &= \frac{p_1}{p_2} \\ x_2 &= \frac{(1-a)p_1}{ap_2} x_1 \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

となる。(3.1.1)を予算制約式に代入すると第1財の需要関数

$$x_1 = \frac{aI}{p_1}$$

を得る。これを(3.1.1)に代入すると第2財の需要関数

$$x_2 = \frac{(1-a)I}{p_2}$$

を得る。求めた各財の需要関数を効用関数 U に代入すると、間接効用関数

$$V^h = \left(\frac{a}{p_1}\right)^a \left(\frac{1-a}{p_2}\right)^{1-a} I$$

を得る。

2. 利潤最大化問題

$$(1) pk^a l^b - wl - rk$$

$$(2) k = \left[\left(\frac{r}{ap}\right)^{1-b} \left(\frac{w}{bp}\right)^b\right]^{\frac{1}{a+b-1}}, l = \left[\left(\frac{r}{ap}\right)^a \left(\frac{w}{bp}\right)^{1-a}\right]^{\frac{1}{a+b-1}}$$

$$f(r, w, p) = \left[\left(\frac{r}{ap}\right)^a \left(\frac{w}{bp}\right)^b\right]^{\frac{1}{a+b-1}}$$

利潤 π とすると、利潤最大化条件は

$$\frac{\partial \pi}{\partial k} = apk^{a-1}l^b - r = 0 \quad (3.2.1)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial l} = bpk^a l^{b-1} - w = 0 \quad (3.2.2)$$

である。(3.2.1)を整理すると

$$l = \left(\frac{r}{ap}\right)^{\frac{1}{b}} k^{\frac{1-a}{b}} \quad (3.2.3)$$

となる。(3.2.3)を(3.2.2)に代入して、 k の要素需要関数

$$k = \left[\left(\frac{r}{ap}\right)^{1-b} \left(\frac{w}{bp}\right)^b \right]^{\frac{1}{a+b-1}}$$

を得る。これを(3.2.3)に代入して、 l の要素需要関数

$$l = \left[\left(\frac{r}{ap}\right)^a \left(\frac{w}{bp}\right)^{1-a} \right]^{\frac{1}{a+b-1}}$$

を得る。求めた k 、 l の要素需要関数を生産関数 $f(k, l)$ に代入して、生産物供給関数

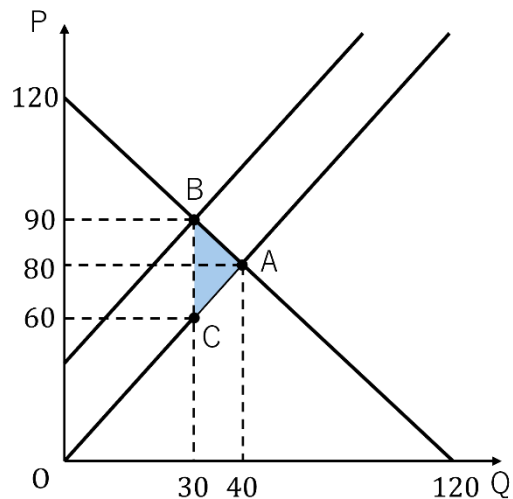
$$f(r, w, p) = \left[\left(\frac{r}{ap}\right)^a \left(\frac{w}{ap}\right)^b \right]^{\frac{1}{a+b-1}}$$

を得る。

第4章練習問題 解答例

1. 従量税

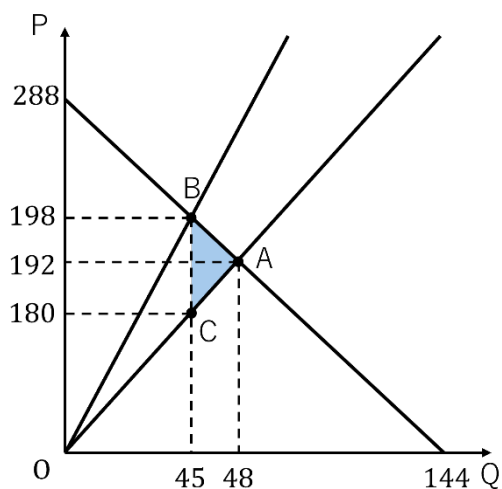
(1) 課税前の均衡における価格は $p = 80$ ，数量は $q = 40$ 。課税により供給関数は上に移動し， $P = 2Q + 30$ となる。課税後の均衡における価格は $p = 90$ ，数量は $q = 30$ 。したがって，グラフは図のようになる。死荷重は三角形 ABC の面積であり，150 となる。



(2) 消費者： $\frac{1}{3}$ ，生産者： $\frac{2}{3}$ （消費者：生産者＝1：3）

2. 従価税

(1) 課税前の均衡における価格は $p = 192$ ，数量は $q = 48$ 。課税により供給関数は原点を中心、に左回転し， $P = 4.4Q$ となる。これと需要関数から課税後の均衡における価格 $p = 198$ ，数量 $q = 45$ を得る。死荷重は三角形 ABC の面積であり，27 となる。



(2) (1)での税収は 810。従量税 t とすると、課税後の供給関数は $P = 4Q + t$ と表される。したがって、課税後の均衡点を求めると

$$P = 192 + \frac{1}{3}t, Q = 48 - \frac{1}{6}t$$

となるから、

$$t\left(48 - \frac{1}{6}t\right) = 810$$

が成り立つ。これを解くと $t = 18, 270$ が得られる。

$t = 18$ のとき均衡点は $P = 198, Q = 45$ である。したがって、死荷重は $18 \times 3 \div 2 = 27$ となり、(1)と一致する。

$t = 270$ のとき均衡点は $P = 282, Q = 3$ である。よって、死荷重は $270 \times 45 \div 2 = 6075$ となり、(1)と一致しない。

政府は死荷重損失が小さくなる課税をするため、 $t = 18$ を採用し、死荷重損失が(1)と同一であることが示される。

第5章練習問題 解答例

1. 補償変分

(1) 効用最大化条件より,

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

なので

$$x_2 = \frac{p_1}{p_2} x_1 \quad (5.1.1)$$

を得る。(5.1.1)を効用関数に代入して $u = 100$ とすると

$$\tilde{x}_1^2 = 100 \frac{p_2}{p_1}$$

が得られる。したがって

$$\tilde{x}_1 = 10 p_1^{-\frac{1}{2}} p_2^{\frac{1}{2}}$$

を得る。さらにこれを(5.1.1)に代入すると

$$\tilde{x}_2 = 10 p_1^{\frac{1}{2}} p_2^{-\frac{1}{2}}$$

を得る。また、支出関数 E は、定義により

$$E = p_1 \tilde{x}_1 + p_2 \tilde{x}_2 = 20 p_1^{\frac{1}{2}} p_2^{\frac{1}{2}}$$

となる。

(2) 定義に従い計算すると,

$$CV = \int_1^2 10 p_1^{\frac{1}{2}} p_2^{-\frac{1}{2}} dp_2 = \left[20 p_1^{\frac{1}{2}} p_2^{\frac{1}{2}} \right]_1^2 = 40\sqrt{2} - 20$$

となる。

2. 所得税と消費税

(1) 第1財の価格 p_1 , 第2財の価格 p_2 , 所得 I として間接効用関数 v を求める。予算制約式は

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$$

となる。また,

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = \frac{\frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

であるから、 $p_1x_1 = p_2x_2$ を得る。よって、各財の需要関数は

$$x_1 = \frac{I}{2p_1}, x_2 = \frac{I}{2p_2}$$

である。したがって、間接効用関数は

$$v = \frac{1}{2}I \left(\frac{1}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{p_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

となる。ここで、 $p_1 = 1.1$, $p_2 = 2.2$, 所得 $I = 110$ とすると、

$$v = 50^{\frac{1}{2}}25^{\frac{1}{2}} = 25\sqrt{2}$$

となる。

(2) 所得税率 t とすると課税後の所得は $110(1-t)$ となる。したがって、

$$25\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times 110(1-t) \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

が成り立つ。これを計算すると

$$t = \frac{1}{11}$$

を得る。

(3) (1)での税収は $0.1 \times 50 + 0.2 \times 25 = 10$ 。(2)での税収は $110 \times \frac{1}{11} = 10$ 。よって、両者は一致する。

3. 税の同値性

財価格 p_i ($i = 1, \dots, n$), 所得 I とする。予算制約式は

$$\sum_{i=1}^n (1 + \tau) p_i x_i = (1 - \tau_l) I$$

となる。 $\tau = \frac{\tau_l}{1 - \tau_l}$ のとき、消費税収は

$$\sum_{i=1}^n \tau p_i x_i$$

である。条件より以下が成り立つ。最初の項は消費税収、最後の項は所得税収を示す。

$$\sum_{i=1}^n \tau p_i x_i = \tau \sum_{i=1}^n p_i x_i = \tau I = \frac{\tau_l}{1 - \tau_l} I$$

$\tau_l = \frac{\tau}{1 + \tau}$ のとき、所得税収は $\tau_l I$ である。条件より以下が成り立つ。なお、最初の項は所得税収、最後の項は消費税収を示す。

$$\tau_l I = \frac{\tau}{1+\tau} I = \frac{\tau}{1+\tau} \sum_{i=1}^n (1+\tau) p_i x_i = \sum_{i=1}^n \tau p_i x_i$$

第 6 章練習問題 解答例

1. 財の性質

(1) 第 2 象限 (2) 第 1 象限 (3) 第 3 象限 (4) 第 4 象限

2. 公共財の最適供給

(1) $SMB = MB_A + MB_B = (18 - 2G) + (12 - G) = 30 - 3G$

(2) 最適供給条件は $SMB = MC$ である。したがって、 $30 - 3G = 4 + G$ を解いて、 $G^* = 6.5$ を得る。社会的純便益 $= 6.5 \times [30 - (30 - 3 \times 6.5)] \div 2 = 63.375$ となる。

第 7 章練習問題 解答例

1. 公共財の効率的・最適供給条件

(1) 個人 1 の効用最大化問題は

$$\begin{aligned} \max_{x_1, G} x_1^{0.7} G^{0.3} \\ s. t. \quad \bar{U}_2 = x_2^{0.7} G^{0.3} \\ x_1 + x_2 + G = 100 \end{aligned}$$

未定乗数 λ_1, λ_2 とすると

$$L = x_1^{0.7} G^{0.3} + \lambda_1 (\bar{U}_2 - x_2^{0.7} G^{0.3}) + \lambda_2 (x_1 + x_2 + G - 100)$$

1 階条件は

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0.7 x_1^{-0.3} G^{0.3} + \lambda_2 = 0 \quad (7.1.1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -0.7 \lambda_1 x_2^{-0.3} G^{0.3} + \lambda_2 = 0 \quad (7.1.2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial G} = 0.3 x_1^{0.7} G^{-0.7} - 0.3 \lambda_1 x_2^{0.7} G^{-0.7} + \lambda_2 = 0 \quad (7.1.3)$$

(7.1.3) に (7.1.1) 及び (7.1.2) を代入すると

$$0.3 x_1^{0.7} G^{-0.7} + 0.3 x_1^{-0.3} x_2 G^{-0.7} - 0.7 x_1^{-0.3} G^{0.3} = 0$$

したがって

$$\frac{3x_1}{7G} + \frac{3x_2}{7G} x_2 = 1 \quad (7.1.4)$$

(2) (1) より

$$\frac{3}{7} (x_1 + x_2) G^{-1} = 1$$

また, $X + G = 100$, $X = x_1 + x_2$ なので

$$\frac{3}{7} (100 - G) G^{-1} = 1$$

したがって

$$G = 30, X = 70$$

このとき

$$\frac{3x_1}{7G} + \frac{3x_2}{7G} = \frac{3x_1}{7G} + \frac{3(70 - x_1)}{7G} = 1$$

であるから, 任意の $0 \leq x_1 \leq 70$ と対応する x_2 からなる配分は (1) の条件を満たし, これは一意ではない。

(3) 最大化問題は

$$\max_{x_1, x_2, G} x_1^{0.7} G^{0.3} + x_2^{0.7} G^{0.3}$$

$$s. t. X + G = 100, X = x_1 + x_2$$

未定乗数 μ_1, μ_2 とすると

$$L = x_1^{0.7} G^{0.3} + x_2^{0.7} G^{0.3} + \mu_1 (X + G - 100) + \mu_2 (X - x_1 - x_2)$$

1 階条件は

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0.7 x_1^{-0.3} G^{0.3} - \mu_2 = 0 \quad (7.1.5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0.7 x_2^{-0.3} G^{0.3} - \mu_2 = 0 \quad (7.1.6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial G} = 0.3 x_1^{0.7} G^{-0.7} + 0.3 x_2^{0.7} G^{-0.7} + \mu_1 = 0 \quad (7.1.7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = \mu_1 + \mu_2 = 0 \quad (7.1.8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = X + G - 100 = 0 \quad (7.1.9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = X - x_1 - x_2 = 0 \quad (7.1.10)$$

(7.1.7)に(7.1.5), (7.1.6), (7.1.8)を代入すると

$$0.3 x_1^{0.7} G^{-0.7} + 0.3 x_2^{0.7} G^{-0.7} = 0.7 x_1^{-0.3} G^{0.3}$$

したがって

$$\frac{3x_1}{7G} + \frac{3x_1^{0.3}x_2^{0.7}}{7G} = 1 \quad (7.1.11)$$

ここで(7.1.5)と(7.1.6)より $x_1 = x_2$ となるから, (7.1.11)に代入して

$$\frac{3x_1}{7G} + \frac{3x_2}{7G} = 1$$

となり, (1)の条件と一致する。また, (7.1.4), (7.1.9), (7.1.10)より

$$G = 30, X = 70$$

を得る。 $X = x_1 + x_2, x_1 = x_2$ なので

$$x_1 = 35, x_2 = 35$$

となる。

2. 自発的供給

(1) 所得 I_i とすると、個人 i の効用最大化問題は

$$\max_{g_i} x_i^{0.6} G^{0.4}$$

$$s. t. x_i + g_i = I_i, g_i + g_j = G, g_j = \bar{g}_j$$

未定乗数 λ_1, λ_2 とすると

$$L = x_i^{0.6} G^{0.4} + \lambda_1(x_i + g_i - I_i) + \lambda_2(G - g_i - g_j)$$

1 階条件より

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0.6x_i^{-0.4}G^{0.4} + \lambda_1 = 0 \quad (7.3.1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial G} = 0.4x_i^{0.6}G^{-0.6} + \lambda_2 = 0 \quad (7.3.2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial g_i} = -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad (7.3.3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x_i + g_i - I_i = 0 \quad (7.3.4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = G - g_i - g_j = 0 \quad (7.3.5)$$

(7.3.1), (7.3.2), (7.3.3), (7.3.5)より

$$\frac{3}{2}(g_i + g_j) = x_i \quad (7.3.6)$$

(7.3.6)に(7.3.4)を代入すると

$$\frac{3}{2}(g_i + g_j) = I_i - g_i \quad (7.3.7)$$

(7.3.7)を整理すると

$$g_i = \frac{2}{5}I_i - \frac{3}{5}g_j \quad (7.3.8)$$

(2) (7.3.8)に $I_1 = 100, I_2 = 20$ を代入して, g_1, g_2, G について解くと, $(g_1, g_2, G) = (55, -25, 30)$ が得られる。しかし、これは $g_2 \geq 0$ より不適。したがって, $g_2 = 0$ として,(7.3.8)及び $I_1 = 100$ より, 均衡は $(g_1, g_2, G) = (40, 0, 40)$ となる。

(3) パレート改善ではない。

3. 最適課税と公共財の最適供給

$$\sum_{i=1}^2 \frac{bG^{b-1}}{ax_i^{a-1}(1-l_i)^{1-a}} = \frac{1}{1+t}$$

第8章練習問題 解答例

1. 図解

2. 負の外部性

(1) 市場均衡は需要曲線と私的限界費用曲線の交点に一致する。 $180 - 2q = q$ より、 $q^* = 60$ 、同様にして、 $p^* = 60$ を得る。したがって、

$$SS^* = \underbrace{180 \times 60 \div 2}_{\text{消費者余剰・生産者余剰}} - \underbrace{60 \times (120 - 60) \div 2}_{\text{外部費用}} = 3600$$

である。

(2) 最適均衡は需要曲線と社会的限界費用曲線の交点に一致する。 $180 - 2q = 2q$ より、 $q^o = 45$ 、同様にして、 $p^o = 90$ を得る。このとき、社会的余剰は、

$$SS^o = 180 \times 45 \div 2 = 4050$$

となる。したがって、

$$\text{死荷重損失} = SS^o - SS^* = 450$$

(3) 従量税 t を課したとき、課税後の私的限界費用曲線の式は $q + t$ である。最適価格は90であるから、最適な従量税は $90 = q^o + t = 45 + t$ を満たす。ゆえに、 $t = 45$ を得る。

(4) 従価税 $\tau \times 100\%$ とすると、課税後の私的限界費用曲線の式は $q/(1 - \tau)$ である。最適価格は90であるから、最適な従価税は $90 = q^o/(1 - \tau) = 45/(1 - \tau)$ を満たす。したがって、 $\tau = 0.5$ を得る。

3. 正の外部性

(1) 市場均衡は私的限界便益曲線と限界費用曲線の交点に一致する。 $60 - 3q = q$ より、 $q^* = 15$ 、同様にして、 $p^* = 15$ を得る。したがって、

$$SS^* = \{80 + [(80 - 60) - 15]\} \times 15 \div 2 = 637.5$$

である。

(2) 最適均衡は社会的便益曲線と限界費用曲線の交点に一致する。 $80 - 4q = q$ より、 $q^o = 16$ 、同様にして、 $p^o = 16$ を得る。このとき、社会的余剰は、

$$SS^o = 80 \times 16 \div 2 = 640$$

となる。したがって、

$$\text{死荷重損失} = SS^o - SS^* = 2.5$$

(3)4 重量補助金を s とすると、政策実施時の私的限界便益曲線の式は $60 - 3q + s$ となる。最適価格は16であるから、最適な従量税は $16 = 60 - 3q^o + s = 12 + s$ を満たす。ゆえに、 $s = 45$ を得る。

第9章練習問題 解答

1. 分権化定理

(1) A 地域と B 地域の社会的純便益最大化条件は

$$\frac{16 - g + 10 - g}{2} = 8$$

よって、 $g = 5$ を得る。また、A 地域の純便益は $(16 + 11) \times 5 \times 0.5 - 8 \times 5 = 27.5$, B 地域の純便益は $(10 + 5) \times 5 \times 0.5 - 8 \times 5 = -2.5$ となる。

(2) A 地域: $16 - g = 8$ より, 供給水準 8, 純便益 32。B 地域: $10 - g = 8$ より, 供給水準 2, 純便益 4 となる。

(3) 各地域, 合計共に(2)の方が大きい。

2. 足による投票

(1) H, L の社会的純便益は

$$U_H + U_L = 18G - G^2$$

したがって

$$\frac{d(U_H + U_L)}{dG} = 18 - 2G = 0$$

より, $G = 8$ を得る。

(2) H の純便益最大化条件は

$$\frac{dU_H}{dG} = 11 - G = 0$$

より, $G_H = 10$ を得る。 L については

$$\frac{dU_L}{dG} = 7 - G = 0$$

より, $G_L = 7$ となる。

(3) 画一的供給: $(U_H, U_L) = (56, 24)$ 分権的供給: $(U_H, U_L) = (60, 24.5)$

したがって, タイプごとの住み分けは効率性を高める。

3. 最適地域規模

(1) 1 人当たり費用関数 C/n より

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{C}{n}\right) = -900n^{-2} + 0.01 = 0$$

したがって、これを解いて、 $n^* = 300$ を獲る。

(2) $n = 150$ のとき、 $C/n = 9.5$, $n = 300$ のとき、 $C/n = 8$ となり、合併した方が一人当たり費用が小さくなる。

(3) 1人当たり費用関数 C/n なので

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{C}{n}\right) = -400n^{-2} + 0.01 = 0$$

したがって、これを解いて、 $n^* = 200$ を得る。混雑効果の存在により、最適人口規模が小さくなった。

第 10 章練習問題 解答例

2. 投票

(1) ペアごとに投票した時の勝者はそれぞれ

国防 vs 教育 → 教育

教育 vs 福祉 → 教育

国防 vs 福祉 → 国防

となるため、教育が選ばれる。

(2) 1 回目の投票では国防 2 票, 教育 2 票, 福祉 1 票。2 回目の投票では国防 2 票, 教育 3 票を得るため, 教育が選ばれる。

3. ニスカネン・モデル

(1) 純便益 NB とすると, $NB = 2G - G^2$ である。 NB の最大化条件は

$$\frac{dNB}{dG} = 2 - 2G = 0$$

より, $G = 1$

(2) $NB = 2G - G^2 = 0$ より, $G = 2$ を得る。

第 11 章練習問題 解答例

1. プライマリーバランス

$$\begin{aligned}\text{基礎的財政収支} &= \text{租税・税外収入} - \text{政府支出} = \text{公債元利償還費} - \text{公債収入} \\ &= 20 - 30 = -10\end{aligned}$$

2. 公債残高の動学

(11.8)に当てはめると

$$\Delta\left(\frac{B}{Y}\right) = (0.01 - 0.015) - (-0.05) = 0.045 > 0$$

となる。したがって、国債残高対 GDP 比は時間と共に増加する。

第 12 章練習問題 解答例

1. リスクプレミアム (p.212 参照)

2. 期待効用とリスク回避

(1) 期待所得は

$$\frac{1}{4} \times 40 + \frac{3}{4} \times 200 = 160$$

(2) 期待効用は

$$Eu = \frac{1}{4} \times \sqrt{40} + \frac{3}{4} \times \sqrt{200} = \frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{15\sqrt{2}}{2}$$

(3) (1)より,

$$u = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$$

(4) (3)の効用水準の方が(1)より大きい:

$$4\sqrt{10} \approx 12.65 > 12.19 \approx \frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{15\sqrt{2}}{2}$$

したがって、この個人はリスク回避的である。

3. 保険

高リスクと低リスクの人の期待所得はそれぞれ

$$p_H y_L + (1 - p_H) y_H = w - p_H d$$

$$p_L y_L + (1 - p_L) y_H = w - p_L d$$

である。この2線が交わる点 A の座標は

$$(y_H, y_L) = (w, w - d)$$

である。また、高リスクと低リスクの人の期待所得の総計はそれぞれ

$$\theta p_H y_L + \theta(1 - p_H) y_H = \theta w - \theta p_H d$$

$$(1 - \theta) p_L y_L + (1 - \theta)(1 - p_L) y_H = (1 - \theta) w - (1 - \theta) p_L d$$

である。これを合算すると、

$$\theta p_H y_L + \theta(1 - p_H) y_H + (1 - \theta) p_L y_L + (1 - \theta)(1 - p_L) y_H = w - (1 - \theta) p_L d - \theta p_H d$$

となる。ここで、 $p = (1 - \theta) p_L + \theta p_H$ を用いると、

$$p y_L + (1 - p) y_H = w - p d$$

を得る。上式の左辺に2線が交わる座標の値を代入すると、

$$p y_L + (1 - p) y_H = p(w - d) + (1 - p) w = w - p d$$

となり、右辺と一致する。すなわち、平均的な所得線は点 A を通る。

第 13 章練習問題 解答例

1. 人的資本の形成

教育時間、教育支出、教育の質など一般的な教育に関することに加えて、業務に関するスキルの修得なども含めて幅広い。本文中の OECD のレポートなどを参照のこと。

2. シグナリング

情報の非対称性があるため、企業は採用前に学生の職業スキル・適正を正確に把握できない。さらに、学生の学歴が同一であれば、学歴がシグナルとして機能しない。これに対して、学生はガクチカを提示することで、自分の能力や性格を企業に伝達する。

3. (13.3)式の導出

生産関数、(13.1)式、(13.2)式より、

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} = \frac{Ak_{t+1}^\theta h_{t+1}^{1-\theta}}{y_t} = \frac{A[(1-\tau)\alpha y_t]^\theta [B\tau y_t]^{1-\theta}}{y_t} = \alpha^\theta AB^{1-\theta} (1-\tau)^\theta \tau^{1-\theta}$$

4. 子供の数の選択モデル

(1) 予算制約式： $c_t + n_{t+1}e_t = (1 - \delta n_{t+1})wh_t$

(2) 条件付き効用最大化問題は

$$\max_{c_t, n_{t+1}, e_t} u(c_t, n_{t+1}, h_{t+1})$$

$$\text{s.t. } c_t + e_t = (1 - \delta n_{t+1})wh_t, h_{t+1} = e_t$$

である。制約条件式を整理し、効用関数に代入すると（ラグランジュ未定乗数法を使っても解ける）、

$$u = \log[(1 - \delta n_{t+1})wh_t - e_t] + \gamma \log n_{t+1} + \gamma \log e_t$$

を得る。ただし、 h_t は個人にとって所与であることに注意する（自分の親世代によって決定されているため）。一階の条件は

$$\frac{\partial u}{\partial e_t} = -\frac{1}{(1 - \delta n_{t+1})wh_t - e_t} + \frac{\gamma}{e_t} = 0 \quad (13.4.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_{t+1}} = -\frac{\delta wh_t}{(1 - \delta n_{t+1})wh_t - e_t} + \frac{\gamma}{n_{t+1}} = 0 \quad (13.4.2)$$

で与えられる。(13.4.1)式と(13.4.2)式を整理すると、

$$\frac{e_t}{(1 - \delta n_{t+1})wh_t - e_t} = \gamma \quad (13.4.3)$$

$$\frac{\delta w n_{t+1} h_t}{(1 - \delta n_{t+1}) w h_t - e_t} = \gamma \quad (13.4.4)$$

(13.4.3)式と(13.4.4)式より、

$$e_t = \delta w n_{t+1} h_t \quad (13.4.5)$$

(13.4.5)式を(13.4.3)式に代入して、整理すると、

$$\frac{\delta n_{t+1}}{(1 - \delta n_{t+1}) - \delta n_{t+1}} = \gamma$$

となる。これを解いて、

$$n_{t+1} = \frac{\gamma}{(1 + 2\gamma)\delta} \quad (13.4.6)$$

を得る。(13.4.6)式を(13.4.5)式に代入して、

$$e_t = \frac{\gamma}{1 + 2\gamma} w h_t \quad (13.4.7)$$

となり、(13.4.6)式と(13.4.7)式を予算制約式に代入すると、

$$c_t = (1 - \delta n_{t+1}) w h_t - e_t = \left(1 - \frac{\gamma}{1 + 2\gamma}\right) w h_t - \frac{\gamma}{1 + 2\gamma} w h_t = \left(1 - \frac{2\gamma}{1 + 2\gamma}\right) w h_t \quad (13.4.8)$$

を得る。

(3) (13.4.6)式を δ で偏微分して、

$$\frac{\partial n_{t+1}}{\partial \delta} = -\frac{\gamma}{(1 + 2\gamma)\delta^2} < 0$$

となる。したがって、子育て時間の上昇は子供の数を減少させる（子供を持つ機械費用の上昇：一階の条件参照）。(13.4.7)式と(13.4.8)式より、子育て時間は消費と教育支出に影響を与えない（ここでは、子供の数を減らして、変化前の可処分所得を維持できるので、支出配分に影響しない：効果が相殺される）。このため、間接効用関数を δ で偏微分すると

$$\frac{\partial V}{\partial \delta} = \frac{\gamma}{n_{t+1}} \frac{\partial n_{t+1}}{\partial \delta} < 0$$

となる。子育て時間の上昇は間接効用を減少させる。

第 14 章練習問題 解答例

1. 割引現在価値

$$PV_{1\%} = 50 + \frac{150}{1.01} + \frac{100}{1.01^2} + \frac{100}{1.01^3} = 393.60 \dots \approx 393.6$$

$$PV_{3\%} = 50 + \frac{150}{1.03} + \frac{100}{1.03^2} + \frac{100}{1.03^3} = 381.40 \dots \approx 381.4$$

2. 社会資本の生産弾力性

生産関数を対数微分すると、

$$\frac{\partial \log Y}{\partial G} = \frac{1}{Y} \frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{\alpha_G}{G}$$

となる。したがって、社会資本の弾力性は、

$$\frac{G}{Y} \frac{\partial Y}{\partial G} = \alpha_G$$

と計算される。

3. 最適な社会資本ストック

(1) 第 1 期 : $c_1 = y_1 - k_2 - g_2$ 第 2 期 : $c_2 = y_2$

(2) 最適化問題は

$$\begin{aligned} & \max_{k_2, g_2} W \\ & \text{s.t. } c_1 = y_1 - k_2 - g_2, \quad c_2 = y_2, \quad y_t = Ak_t^\alpha g_t^\beta \end{aligned}$$

である。制約条件式を目的関数に代入すると、

$$W = \log [Ak_1^\alpha g_1^\beta - k_2 - g_2] + \frac{1}{1+\rho} \log Ak_2^\alpha g_2^\beta$$

となる。 g_2 に関する最適化条件は

$$\frac{\partial W}{\partial g_2} = -1 + \frac{1}{1+\rho} \frac{\beta}{g_2} = 0$$

であるから、

$$g_2 = \frac{\beta}{1+\rho}$$

を得る。