

SGC ライブラリ-167

統計力学から理解する  
**超伝導理論**

[第2版]

北 孝文 著

サイエンス社

# 第2版へのまえがき

本書の第1版が世に出てから、7年半が過ぎようとしている。この間、第1版に基づいて、英語版 *Statistical Mechanics of Superconductivity* (Springer, Tokyo, 2015) を上梓した。その中では、日本語版の内容に加えて、「外部摂動への応答」、「トンネル現象とジョセフソン効果」、「表面と量子渦芯の電子状態」のそれぞれについて、新たに章を起こして詳述し、「準粒子状態密度」に関する記述もつけ加えた。それとともに、筆者自身のグループで、この本の題材に関連する研究において、いくつかの進展があった。具体例としては、カノニカル集団における“ウィックの定理”の導出、BCS 波動関数における粒子数についての重ね合わせの妥当性、超伝導状態におけるホール効果と帯電機構、などが挙げられる。今回の改訂では、これらの新たな材料を盛り込んで、統計力学と超伝導理論の基礎を、初学者によりわかりやすく包括的に提供することを目指した。

本書が読者のお役に立てれば、筆者にとってこの上ない喜びである。

2021年2月

北 孝文

# まえがき

本書の目的は、超伝導理論の基礎を、その理解に必要な技術も含めて余す所なく記述することにある。対象としている読者層は、熱力学と量子力学を学び終えた一般の学部3・4年生や大学院生で、それらの学生が自習できるようにと配慮した。

超伝導は、物理学の中で最も顕著な現象の一つであり、自発的対称性の破れた系の典型例である。それをみごとに解明したバーディーン-クーパー-シュリーファー理論 (Bardeen-Cooper-Schrieffer 理論、略して BCS 理論) は、物性物理学と統計物理学だけでなく、素粒子物理学や原子核物理学にも大きな影響を及ぼした<sup>[1]</sup>。従って、超伝導理論をきちんと理解することにより、現代物理学のエッセンスと手法のかなりの部分を消化・吸収できるであろうと期待できる。本書では、この超伝導を統計力学の視点でとらえ、その数学的・論理的構造をできるだけ明快に記述したいと考えた。

超伝導に関する従来の教科書や解説記事の多くは、まず、実験事実の説明から始まり、電子格子相互作用が引力をもたらすことを説明した後、クーパー問題と一様系の BCS 理論へと進む。その前にロンドン方程式やギンツブルグ-ランダウ理論の記述が加わることもある。確かに、この流れに従って学んで行けば、それらの理論が超伝導の実験事実を見事に説明できているのがわかり、実用面でも不自由はなくなる。しかし翻って、なぜ超流動性が生じるのか、なぜマイスナー効果が起こるのか、コヒーレンスの起源は何か、といった素朴な疑問に関しては、判然としないものを感じるのは筆者だけであろうか？ また、このアプローチは、固体電子論を専門として選ばない人にとって、取り組む際の敷居が高いように思われる。

そこで本書では、超伝導を統計力学の問題として理想気体の延長線上に置き、どのような要素がつけ加わって対凝縮と超流動性が生じるのかを順々に明らかにすることを試みた。その過程では、超伝導を記述するための必要な道具立て——第二量子化法、密度行列、ブロッホ-ドミニシスの定理、統計力学の変分原理、等々——を、それらの適用例と共に自己完結的に提供した。これらの例には、普遍性がある興味深くはあるが従来の統計力学の教科書ではあまり扱われてこなかった題材——二粒子相関の計算、ランダウのフェルミ液体論、等々——も含まれている。その後展開される超伝導の扱いにおいては、多粒子系の置換対称性を実現する手段としての「第二量子化法」を最大限に活用して、「二粒子束縛状態への対凝縮」があらわに見える形で理論を展開した。出発点となる実空間 BCS 波動関数は、レーザー光やボーズ-アインシュタイン凝縮を記述する「コヒーレント状態」の自然な拡張となっており、位相のコヒーレンスが明瞭に理解できるという利点がある。そして、非一様系や任意のクーパー対が扱える実空間で基本的な定式化を行って、基礎方程式である「ボゴリョボフ-ドジェンヌ方程式」を導き、その適用例として BCS 理論を記述した。

本書が、統計力学と超伝導を学ぶ読者のお役に立てれば、筆者のこの上ない喜びである。最後に、和田宏氏には、本書の大部分に目を通して頂き、貴重なご助言を頂いた。ここに感謝する。

2013年7月

北孝文

# 目次

<b>第1章 熱・統計力学のまとめ</b>	<b>1</b>
1.1 熱力学と山登り	1
1.2 状態量と状態方程式	3
1.3 熱力学の基本法則	4
1.3.1 熱力学第一法則	4
1.3.2 熱力学第二法則	5
1.3.3 熱力学第三法則	5
1.4 平衡熱力学	6
1.4.1 基本式	6
1.4.2 熱平衡条件	6
1.4.3 ルジャンドル変換と自由エネルギー	8
1.4.4 粒子数が変化する場合	9
1.5 エントロピーと内部エネルギーの熱力学的構成	10
1.6 エントロピーの統計力学的表式	11
1.7 平衡確率分布と熱力学関数	15
1.7.1 ミクロカノニカル分布	15
1.7.2 カノニカル分布	17
1.7.3 グランドカノニカル分布	19
<b>第2章 同種多粒子系の量子力学</b>	<b>22</b>
2.1 置換の基礎	22
2.2 同種多粒子系の置換対称性	24
2.3 置換演算子の固有空間の構成	26
2.4 多粒子波動関数のブラケット表示	28
2.4.1 ブラケット表示	28
2.4.2 規格直交性と完全性	29
2.4.3 ブラケット表示と演算子の行列要素	30
2.5 同種多粒子系の記述法 — まとめ	30
2.5.1 多粒子波動関数による記述法	30
2.5.2 第二量子化法	31
2.5.3 相互作用のない場合の第二量子化法	31
<b>第3章 量子理想気体の統計力学</b>	<b>37</b>
3.1 ボーズ分布とフェルミ分布	37
3.2 一粒子エネルギー状態密度	39
3.3 単原子分子の三次元理想気体	40
3.3.1 一粒子エネルギー状態密度	40
3.3.2 圧力と内部エネルギーの関係	41
3.3.3 無次元化	42
3.3.4 熱力学量の温度変化の図	43

3.4	高温からの展開	45
3.5	低温の三次元自由フェルミ粒子系	46
3.5.1	フェルミ・エネルギーとフェルミ波数	46
3.5.2	ゾンマーフェルト展開	47
3.5.3	低温の化学ポテンシャルと熱容量	48
3.6	低温の三次元自由ボーズ粒子系	49
3.6.1	ボーズ - アインシュタイン凝縮温度	50
3.6.2	$T < T_0$ の熱力学量	50
3.6.3	$T \gtrsim T_0$ における化学ポテンシャルと熱容量	51
3.7	ボーズ - アインシュタイン凝縮と状態密度	51
<b>第 4 章</b>	<b>密度行列と二粒子相関</b>	<b>54</b>
4.1	密度行列	54
4.2	ブロッホ - ドミニシスの定理	55
4.3	単原子分子理想気体の二粒子相関	61
<b>第 5 章</b>	<b>ハートリー - フォック近似とランダウのフェルミ液体論</b>	<b>65</b>
5.1	ハートリー - フォック近似の導出	65
5.1.1	変分原理による導出	65
5.1.2	簡便な導出	69
5.1.3	一様系のハートリー - フォック近似	70
5.2	低温の一様フェルミ粒子系への適用	71
5.2.1	フェルミ波数とフェルミ・エネルギー	71
5.2.2	有効質量・状態密度・熱容量	72
5.2.3	有効質量とランダウ・パラメータ	73
5.2.4	スピン磁化率	75
5.2.5	圧縮率	76
5.2.6	ランダウ・パラメータ	78
<b>第 6 章</b>	<b>引力ポテンシャルと束縛状態</b>	<b>80</b>
6.1	シュレーディンガー方程式の引力ポテンシャル問題	80
6.1.1	三次元井戸型ポテンシャル	81
6.1.2	二次元井戸型ポテンシャル	82
6.2	引力ポテンシャル問題の波数空間での考察	83
6.3	クーパー問題	86
<b>第 7 章</b>	<b>超伝導平均場理論の基礎方程式</b>	<b>88</b>
7.1	対凝縮の BCS 波動関数	88
7.2	励起を担う準粒子場	90
7.3	ボゴリュボフ - ドジェンヌ方程式	92
7.3.1	変分原理による導出	93
7.3.2	簡便な導出	99
7.3.3	スピン変数の行列表示	101
7.3.4	一様系のボゴリュボフ - ドジェンヌ方程式	103
7.4	相互作用ポテンシャルの固有関数展開	105

7.4.1	等方的な場合	105
7.4.2	異方的な場合	106
<b>第 8 章</b>	<b>BCS 理論</b>	<b>108</b>
8.1	自己無撞着方程式	108
8.2	弱結合の有効対形成ポテンシャル	111
8.3	ギャップ方程式とその解	114
8.4	熱力学量の計算	117
8.4.1	熱容量	118
8.4.2	準粒子状態密度	119
8.4.3	化学ポテンシャル	120
8.4.4	自由エネルギー	120
8.5	ランダウの二次相転移理論と超伝導	121
<b>第 9 章</b>	<b>超流動性・マイスナー効果・磁束量子化</b>	<b>124</b>
9.1	スピン磁化率と超流動密度	124
9.1.1	スピン磁化率	127
9.1.2	超流動密度	128
9.1.3	レゲットの超流動フェルミ液体論	130
9.2	マイスナー効果と磁束量子化	131
9.2.1	アンペールの法則の微視的導出	132
9.2.2	ロンドン方程式	133
9.2.3	マイスナー効果	134
9.2.4	磁束量子化	134
<b>第 10 章</b>	<b>時間変化する外場への応答</b>	<b>137</b>
10.1	線形応答理論	137
10.1.1	時間領域の応答	137
10.1.2	周波数領域での応答	139
10.1.3	エネルギー散逸	139
10.2	超音波吸収	141
10.3	核スピン緩和率	145
<b>第 11 章</b>	<b>トンネル現象・状態密度・ジョセフソン効果</b>	<b>152</b>
11.1	トンネル電流の一般的表式	152
11.2	NN 接合	159
11.3	SN 接合と状態密度	159
11.4	SS 接合とジョセフソン効果	160
<b>第 12 章</b>	<b><math>p</math> 波超流動</b>	<b>164</b>
12.1	有効対形成ポテンシャル	164
12.2	ギャップ行列の一般形	165
12.3	二つの超流動相	166
12.3.1	BW 状態	166

12.3.2	ABM 状態 . . . . .	168
12.4	ギャップの異方性と準粒子状態密度 . . . . .	171
<b>第 13 章</b>	<b>準古典方程式とギンツブルグーランダウ方程式</b>	<b>174</b>
13.1	松原グリーン関数 . . . . .	174
13.2	ゴルコフ方程式 . . . . .	177
13.2.1	場の演算子の運動方程式 . . . . .	177
13.2.2	ゴルコフ方程式の導出 . . . . .	178
13.2.3	スピン変数の行列表示 . . . . .	180
13.2.4	ゲージ変換とゲージ不変性 . . . . .	181
13.2.5	ゲージ不変なウイグナー変換 . . . . .	182
13.3	アイレンバーガー方程式の導出 . . . . .	184
13.3.1	アイレンバーガー方程式 . . . . .	184
13.3.2	ベア・ポテンシャル . . . . .	187
13.3.3	電流密度 . . . . .	189
13.3.4	アイレンバーガー方程式のまとめ . . . . .	189
13.4	ギンツブルグーランダウ方程式の導出 . . . . .	191
<b>第 14 章</b>	<b>アプリコソフの磁束格子</b>	<b>196</b>
14.1	ギンツブルグーランダウ方程式 . . . . .	196
14.2	微視的磁束密度と磁化ベクトル . . . . .	197
14.3	無次元化 . . . . .	198
14.4	上部臨界磁場 $H_{c2}$ と第一種・第二種の区別 . . . . .	199
14.5	$H_{c2}$ 近傍の磁束格子 . . . . .	200
14.5.1	基底関数の構成 . . . . .	201
14.5.2	自由エネルギーの最小化 . . . . .	204
14.6	下部臨界磁場 $H_{c1}$ . . . . .	207
<b>第 15 章</b>	<b>表面と量子渦芯の電子状態</b>	<b>212</b>
15.1	アンドレーエフ散乱 . . . . .	212
15.2	量子渦芯の電子状態 . . . . .	216
15.3	孤立量子渦の準古典方程式による解析 . . . . .	218
15.3.1	磁場中のアイレンバーガー方程式 . . . . .	219
15.3.2	リカッチ型方程式への変換 . . . . .	221
15.3.3	孤立渦に対する方程式 . . . . .	221
15.3.4	数値的な手続き . . . . .	224
15.3.5	数値計算結果 . . . . .	225
	<b>演習問題解答例</b>	<b>228</b>
	<b>参考文献</b>	<b>241</b>
	<b>索引</b>	<b>245</b>

# 第 1 章

## 熱・統計力学のまとめ

超伝導現象は，熱力学と統計力学を量子多粒子系に適用することにより，理論的に記述できる．そこで，学部授業の復習の意味も込めて，熱力学と統計力学の基礎を以下にまとめる．

### 1.1 熱力学と山登り

熱力学は，論理の組み立てが抽象的でとっつきにくい．その難しさを軽減するには，地図を持った山登りを思い浮かべるのが有効であろうか．地図上では，位置は二次元座標  $(x, y)$  で指定され，各位置に高度  $z(x, y)$  の情報がつけ加わっている．二次元平面上で，高度の同じ点を結んだのが等高線である．図 1.1 のような等高線を持つ山の山頂  $(x_P, y_P)$  に，山麓の点  $(x_A, y_A)$  から登ることを考えよう．登山道は  $C_1$  と  $C_2$  の二つある．どちらを選ぶかにより，歩く距離  $\Delta d$  は一般に異なる．しかし，登った高さ  $\Delta z$  は，二つの経路で同じで，始点と終点の高度だけを用いて， $\Delta z = z(x_P, y_P) - z(x_A, y_A)$  と表せる．

位置の関数としての高度  $z(x, y)$  のように，座標を指定すれば値が決まる量の

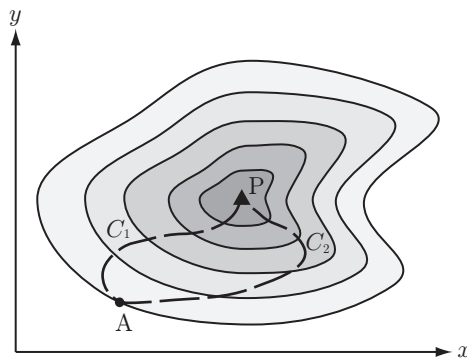


図 1.1 山の等高線と二つの登山道.



## 第 2 章

# 同種多粒子系の量子力学

超伝導現象を引き起こすのは金属中の電子であり、各々の電子は質量・電荷・スピンの大きさが全く同じである。一般に、このような同種多粒子系では、粒子の属性が同じことに由来する「置換対称性」が存在し、粒子を仮想的に入れ替えても状態は区別できない。この事実が、多粒子系の量子力学に深遠な影響を及ぼすことになる。置換対称性とスピンの関連や、置換対称性を簡潔に記述する方法としての「第二量子化法」について説明する。主な結果は (2.12), (2.31), および, (2.46) にまとめられている。先を急ぐ読者は、これらの結果を参照して次章に進みたい。

### 2.1 置換の基礎

まず、「置換」についての数学的背景をまとめておく。以下に現れる定理 (i)–(iv) の証明は他書に譲り<sup>[7]</sup>、ここでは定理の具体例を示すに止める。

円周上に、 $N$  個の椅子が等間隔で配置され、時計回りに  $i = 1, 2, \dots, N$  の番号がつけられている。「置換 (permutation)」とは、それら  $N$  個の席に座っている  $N$  人の人が互いに席を入れ替える操作を意味し、その演算子  $\hat{P}$  は

$$\hat{P} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & N \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_N \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

と表すことができる。ここで、第二行の  $p_i$  は、席  $i$  に座っていた人が席  $p_i$  に移ることを表す。従って、各  $p_i$  は 1 から  $N$  までの中の一つの値をとり、それらの間に重複はない。相異なる  $\hat{P}$  の数は  $N!$  である。置換の中で、特に、各人が時計回りに隣の席に移動するような置換を、「巡回置換 (cyclic permutation)」と呼ぶ。この巡回置換の演算子は、

$$\hat{C} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k-1 & k \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & k & 1 \end{pmatrix} \equiv (123 \cdots k) \quad (2.2)$$

## 第 3 章

# 量子理想気体の統計力学

この章では、量子力学に従う相互作用のない多粒子系を考察し、基本的な熱力学量を計算する。具体的に取り上げる系は、単原子分子の理想ボーズ粒子系とフェルミ粒子系で、標準的な教科書に載っている内容である。ただし、ここでは、特に次の二点に重点を置いて議論を進める。(i) 相互作用のない系の熱力学量は、一粒子エネルギー状態密度を用いて普遍的に表現できる。(ii) 異なる系における熱力学量の温度依存性は、無次元化を行うことにより統一的に理解できる。(ii)の結果は図 3.1 にまとめられている。既習の方は、適当に読み飛ばして頂きたい。

### 3.1 ボーズ分布とフェルミ分布

前章の (2.46) にまとめられているように、相互作用のない同種多粒子系の全エネルギー  $\mathcal{E}_\nu$  と粒子数  $\mathcal{N}_\nu$  は、一粒子固有エネルギー  $\varepsilon_q$  とその占有数  $n_q$  を用いて、それぞれ

$$\mathcal{E}_\nu = \sum_q n_q \varepsilon_q, \quad \mathcal{N}_\nu = \sum_q n_q \quad (3.1a)$$

と表すことができる。ただし、 $q$  は一粒子状態を指定する量子数である。また、多粒子状態  $\nu$  は、各一粒子状態  $(q_1, q_2, q_3, \dots)$  を占める粒子数の組  $\{n_q\}_q$  で完全に指定され、具体的に  $|\nu\rangle = |n_{q_1}, n_{q_2}, n_{q_3}, \dots\rangle$  のようにケットベクトルで表せる。さらに、各々の  $n_q$  は、粒子のスピン  $s$  の大きさ  $s$  が整数か半整数かにより、

$$n_q = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots & : \text{ボーズ粒子 } (\sigma = 1) \\ 0, 1 & : \text{フェルミ粒子 } (\sigma = -1) \end{cases} \quad (3.1b)$$

と、取り得る値が異なる。ただし、 $\sigma$  は互換演算子 (2.3) の固有値である。

ここでは、この量子系に 1.7 節における統計力学の定式化を適用し、基本的な

## 第 4 章

# 密度行列と二粒子相関

この章では、まず、統計力学における重要な概念である「密度行列」と「縮約された密度行列」を導入する。縮約された密度行列は、熱平衡系における多粒子相関と密接な関わりがある。次に、相互作用のない系における多粒子相関を一粒子相関を用いて表す「ブロッホー ドミニシスの定理」、すなわち、以下の (4.9) を証明する。この定理は、相互作用に関しての摂動展開でも使われる非常に有用な定理で、絶対零度で「ウィックの定理」に移行する。最後に、ブロッホー ドミニシスの定理を用いて、理想ボーズ粒子系とフェルミ粒子系の二粒子相関を具体的に計算する。結果は図 4.1 にまとめられている。これにより、(i) 低温の量子系では同種粒子間の置換対称性に基づく特異な相関が現れ、(ii) その相関はボーズ粒子系とフェルミ粒子系で全く異なる様相を示す、ということが明らかになる。

### 4.1 密度行列

平衡状態の密度行列演算子  $\hat{\rho}$  は、シュレーディンガー方程式 (2.31b) の固有状態  $|\Phi_\nu\rangle$  とその実現確率  $w_\nu$  を用いて、

$$\hat{\rho} \equiv \sum_{\nu} |\Phi_\nu\rangle w_\nu \langle \Phi_\nu| \quad (4.1)$$

で定義される。確率  $w_\nu$  として標準的に用いられるのは、ミクロカノニカル分布 (1.43a)、カノニカル分布 (1.47a)、グランドカノニカル分布 (1.53a) のいずれかである。密度行列が求まると、任意の演算子  $\hat{O}$  の期待値  $\langle \hat{O} \rangle$  が、

$$\langle \hat{O} \rangle \equiv \text{Tr} \hat{\rho} \hat{O} = \sum_{\nu} w_\nu \langle \Phi_\nu | \hat{O} | \Phi_\nu \rangle \quad (4.2)$$

により計算できる。ここで  $\text{Tr}$  は対角和である。

次に、縮約された密度行列  $\rho^{(n)}$  を、

## 第 5 章

# ハートリー – フォック近似と ランダウのフェルミ液体論

第 3 章と第 4 章では、量子力学に従う相互作用のない多粒子系を統計力学的に考察し、熱力学量や二粒子相関を近似なしで正確に計算した。そして、同種粒子間の置換対称性が、系の統計力学的性質に決定的な影響を及ぼすことを見た。しかし、現実の系には粒子間の相互作用が存在する。そのため、統計力学的計算を厳密に行うことは非常に難しくなり、何らかの近似に頼らざるを得なくなる場合がほとんどである。ここでは、まず、量子力学において相互作用を取り込む最も簡単な近似法である「ハートリー – フォック近似」を、温度の効果も取り込んで統計力学的に導出する。この近似は、相互作用ポテンシャルが弱く斥力的な場合に有効である。引力が働く場合のフェルミ粒子系については次章以下で議論する。次に、ハートリー – フォック近似を低温の三次元一様フェルミ粒子系に適用し、相互作用が系の性質にどのような特徴を付与するかを明らかにする。この考察により、「ランダウのフェルミ液体論」<sup>[22]</sup>の基礎が微視的に理解できることになる。

### 5.1 ハートリー – フォック近似の導出

凝縮のない正常相を考え、ハートリー – フォック近似を二つの異なる方法で導出する。第一の方法は平衡統計力学の変分原理に基づき、第二はウィック分解による簡便な方法である。そして、それらが同じ結果 (5.11) をもたらすことを確認する。

#### 5.1.1 変分原理による導出

外界と熱および粒子のやり取りのある系の熱平衡状態はグランドカノニカル分布 (1.53a) であり、汎関数 (1.52) を最小にするという条件により得られる。つまり (1.52) は、統計力学における一つの変分原理を与えている。

まず、(1.52) を、(4.1) で導入された密度行列演算子  $\hat{\rho}$  を用いて書き換えよ

## 第 6 章

# 引力ポテンシャルと束縛状態

クーパーは、1955 年、アメリカ合衆国東部の名門プリンストン大学で高エネルギー物理学を研究するポスドクから、中部イリノイ大学で超伝導理論の構築を目指すバーディーンの後継者へと転身した。それ以前には「超伝導」の言葉さえ聞いたこともなかったという。そして、一から勉強と研究を始めて暗中模索する中で、フェルミ面上につけ加えられた二電子間に引力が働く問題へとたどり着き、無限小の引力により束縛状態が形成されることを見出した<sup>[1]</sup>。超伝導理論構築の突破口となったこの「クーパー問題」は、実は、学部で理解できる二次元の井戸型ポテンシャル問題と実質的に等価である。この章では、引力ポテンシャルが働く場合のシュレーディンガー方程式を解き、束縛状態が形成される条件と状態密度の関係を明らかにする。まず、一粒子井戸型ポテンシャル問題を扱い、三次元ではポテンシャルの深さが有限でないと束縛状態ができないが、二次元では無限小の引力で束縛状態が形成されることを示す。そして、この次元による束縛状態の異なる振る舞いが、状態密度の立ち上がりの違いに起因することを見る。最後にクーパー問題を考察し、フェルミ面の存在によりその直上の状態密度が有限になり、クーパー問題が二次元の一粒子井戸型ポテンシャル問題と同等になることを示す。

### 6.1 シュレーディンガー方程式の引力ポテンシャル問題

量子力学によると、中心力ポテンシャル  $V(r)$  の下での粒子の運動は、一粒子シュレーディンガー方程式

$$\left[ \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(r) \right] \phi(\mathbf{r}) = \epsilon \phi(\mathbf{r}) \quad (6.1)$$

により記述できる。ここで  $\hat{p}$  は運動量演算子、 $m$  は粒子の質量、 $\phi(\mathbf{r})$  は軌道運動の波動関数、 $\epsilon$  は固有エネルギーである。この節では、図 6.1 のような井戸

## 第 7 章

# 超伝導平均場理論の基礎方程式

前節のクーパーの考察により、相互作用のない電子系の基底状態である「フェルミ球」が、電子間の引力により不安定になることが明らかになった。新たな基底状態は何か？そして、超伝導現象とどのように関連しているのか？それらの問題解決のための突破口を切り開いたのが、バーディーンBardeenの大学院生であったシュリーファーである。彼は、クーパーの考察に触発され、朝永振一郎の中間子に関する変分理論<sup>[31]</sup>を参考にして、引力の働く多電子系に対する基底状態の変分波動関数を書き下した<sup>[4]</sup>。

超伝導は、ある意味で、電子系でのボーズ - アインシュタイン凝縮と見なせる。 $s = 1/2$  のフェルミ粒子系では、パウリの排他原理により一粒子状態への凝縮は起こりえないが、同じ二粒子束縛状態に対凝縮することは原理的に可能である。シュリーファーが書き下した変分波動関数は、この「クーパー対凝縮」の数学的表現と見なせる。

ここでは、まず、シュリーファーが書き下した変分波動関数を非一様系に一般化し、対凝縮と位相のコヒーレンスがあらわな「BCS 波動関数」を構成する。続いて、凝縮状態からの励起を記述する「ボゴリュボフ - バラティン演算子」を導出する。最後に、それらに基づき、超伝導平均場理論の基礎方程式である「ボゴリュボフ - ドジェンヌ方程式」を導く。その際に用いる手法は第 5 章と同じで、「ハートリー - フォック・ポテンシャル」に加えて、超伝導状態を特徴づける「ペア・ポテンシャル」が、新たな自己無撞着場として方程式に加わることになる。

### 7.1 対凝縮の BCS 波動関数

まず、基底状態におけるクーパー対凝縮の波動関数を書き下そう。この節の目標は (7.6) である。

理想気体のボーズ - アインシュタイン凝縮は、最低一粒子状態に、巨視的な

## 第 8 章

# BCS 理論

シュリーファーが変分波動関数を書き下した後は、バーディーンBardeenの超伝導に関する深い知識が戦列に加わり、BCS 理論が一気に完成した<sup>[48]</sup>。理論と実験の一致は見事であった。これは、古典的超伝導体ではクーパー対が非常に弱い引力で形成されているため、平均場理論が大変よい記述となるからである。ここでは、前章の定式化に基づき、基本的な熱力学量に関する BCS 理論の主な結果を詳述する。

### 8.1 自己無撞着方程式

BCS 理論では、一様系における  $s$  波 ( $\ell = 0$ ) クーパー対の可能性が考察された。(7.69a) と  $Y_{00}(\hat{\mathbf{k}}) = (4\pi)^{-1/2}$  より、この場合のギャップ行列は  $\underline{\Delta}(\mathbf{k}) = \underline{\Delta}_{00}(k)$  と等方的で、また (7.70) より、対称性  $\underline{\Delta}_{00}(k) = -\underline{\Delta}_{00}^T(k)$  を持つことがわかる。従って、 $\underline{\Delta}(\mathbf{k})$  を

$$\underline{\Delta}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} 0 & \Delta_k \\ -\Delta_k & 0 \end{bmatrix} = i\sigma_y \Delta_k \quad (8.1)$$

と表すことができる。ただし  $\sigma_y$  は、(7.33) で定義されたパウリ行列の  $y$  成分である。このように、 $s$  波超伝導は、 $\uparrow$  スピンと  $\downarrow$  スピンの電子対が等方的な束縛状態を形成することで発現する。さらに外部磁場がかかっていない状況では、自己無撞着に決まるハートリー-フォック・ポテンシャルも、 $\underline{\mathcal{U}}_{\text{HF}}(\mathbf{k}) = \sigma_0 \mathcal{U}_k^{\text{HF}}$  と対角的かつ等方的になることが予想される。そこで、(7.60) を

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{K}}_{\text{HF}}(\mathbf{k}) &= \sigma_0 \xi_k, \\ \xi_k &\equiv \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \mathcal{U}_k^{\text{HF}} - \mu \end{aligned} \quad (8.2)$$

と表し、(8.1) と共に (7.61) に代入すると、固有値問題

## 第 9 章

# 超流動性・マイスナー効果・磁束量子化

超伝導の最も顕著な性質は、減衰のない電流が金属中を流れうることである。しかし、電荷を持った粒子の流れは、アンペールの法則により磁場と結合するため、現象がより複雑になる。ここでは、摩擦のない流れの本質を理解するため、まず、電荷を持たない粒子系を考え、「超流動性」の由来を明らかにしよう。その考察は、9.2.2 節で荷電系へと一般化され、ロンドン方程式が導かれる。

### 9.1 スピン磁化率と超流動密度

超流動・超伝導状態が示す「減衰のない流れ」は、アボガドロ数程度の莫大な数の粒子が、同一の量子状態を占有すること、すなわち、単一の波動関数で記述される状態となることに由来する。これらの粒子が巨視的波動関数で記述され、位相が揃ってコヒーレンスを獲得するのである。そして、そのことを直接的に反映する物理量が超流動密度である。この超流動密度をスピン磁化率と共に考察する。外部ポテンシャルはない ( $U = 0$ ) ものとする。

対波動関数のスピン自由度を、 $\underline{\phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv (\phi(\mathbf{r}_1\alpha_1, \mathbf{r}_2\alpha_2))$  と  $2 \times 2$  行列で表そう。すると、束縛粒子対が重心運動量  $\hbar\mathbf{q}$  で動いている状況は、(7.75) の形の展開に重心運動をつけ加え、

$$\begin{aligned}\underline{\phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \underline{\phi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)} e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)/2} \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \underline{\phi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}_+\cdot\mathbf{r}_1 - i\mathbf{k}_-\cdot\mathbf{r}_2}\end{aligned}\tag{9.1}$$

と表せる。ただし、 $\mathbf{k}_{\pm}$  は

$$\mathbf{k}_{\pm} \equiv \mathbf{k} \pm \frac{\mathbf{q}}{2}\tag{9.2}$$

で定義されている。同様に  $\underline{\phi}^\dagger(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv (\phi^*(\mathbf{r}_2\alpha_2, \mathbf{r}_1\alpha_1))$  は、



## 第 10 章

# 時間変化する外場への応答

液体・固体などの凝縮相を実験的に研究するには、時間変化する弱い外場をかけてその応答を観測する手法が非常に有用である。その外場としては、電磁場・超音波などが用いられる。ここでは、まず、そのような測定結果を解析するための理論的枠組みである「線形応答理論」を構築する。次に、その手法を  $s$  波超伝導体に適用し、超音波への応答と核スピンの緩和時間を理論的に計算する。

### 10.1 線形応答理論

時刻  $t = -\infty$  でグランドカノニカル分布の熱平衡状態にある任意の系を考え、そのハミルトニアンを  $\hat{H}$  で表す。この系に、 $t > -\infty$  で微小な摂動  $\hat{H}'(t)$  を加えて、その応答を観測する。結果を解析するための「線形応答理論」を、久保<sup>[56]</sup>に従って構成する。得られる公式は、時間領域の応答に関する (10.5) と (10.7)、周波数領域の応答に関する (10.12b)、エネルギー散逸に関する (10.16) と (10.18) である。

#### 10.1.1 時間領域の応答

線形応答理論を構築するための出発点は、密度行列演算子 (4.1) である。そのブラとケットは、時間に依存したシュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{d|\Phi_\nu\rangle}{dt} = (\hat{H} + \hat{H}')|\Phi_\nu\rangle, \quad -i\hbar \frac{d\langle\Phi_\nu|}{dt} = \langle\Phi_\nu|(\hat{H} + \hat{H}') \quad (10.1)$$

に従うものとする。熱平衡状態の密度行列演算子 (4.1) は、この基底の定義変更によっても不変である。すなわち、 $|\Phi_\nu\rangle$  の定義変更に伴う余分の因子  $e^{-i\varepsilon_\nu t/\hbar}$  は、 $\langle\Phi_\nu|$  の因子  $e^{i\varepsilon_\nu t/\hbar}$  と相殺する。(10.1) を用いて、(4.1) を時間  $t$  について微分する。その際、摂動 (perturbation) がかかっていることを強調するために、密度行列演算子の表記を  $\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}_p(t)$  と変更する。このようにして、 $\hat{\rho}_p(t)$

## 第 11 章

# トンネル現象・状態密度・ジョセフソン効果

超伝導体と正常金属 (SN) の接合や超伝導体と超伝導体 (SS) の接合を流れる電流の情報からは、準粒子状態密度や凝縮波動関数に関する貴重な情報が得られる。ここでは、まず、前章で定式化した線形応答理論を用いて、SS 接合を流れるトンネル電流の一般的表式 (11.26) を導く。この表式は、一方のエネルギーギャップを 0 とすることで、SN 接合の場合にも適用できる。その SN 接合を流れる電流電圧特性を計算し、図 11.2 に示すように、超伝導体の準粒子状態密度に関する情報が得られることを示す。次に、SS 接合の電流電圧特性を考察し、その結果を図 11.4 に示す。この場合には、ギャップの大きさが違う場合に生じる新たな構造に加えて、電圧 0 で流れる「直流ジョセフソン電流」が出現し、その大きさは、二つの超伝導体のギャップ関数の位相差によって決まってくることを見る。このように、二つの超伝導体を弱く結合させると、自発的対称性の破れを特徴づける「凝縮波動関数の位相」が観測可能である。

### 11.1 トンネル電流の一般的表式

図 11.1 のように、二つの超伝導体 L と R の間に薄い絶縁層を挟んだ系を考える。絶縁層に電流が生じる状況では、二つの超伝導体の化学ポテンシャルは一般に異なり、その差は、

$$\mu_L - \mu_R = eV \quad (11.1)$$



図 11.1 薄い絶縁層によって隔てられた二つの超伝導体 L と R.

## 第 12 章

# $p$ 波超流動

1972年、オシエロフ、リチャードソン、リーにより、極低温 ( $\lesssim 3\text{mK}$ ) の液体  $^3\text{He}$  で超流動現象が発見された<sup>[71],[72]</sup>。 $^3\text{He}$  原子は、陽子 2 個・中性子 1 個の原子核と電子 2 個からなる  $s = 1/2$  のフェルミ粒子で、第ゼロ近似として剛体球とみなすことができる。そのため、二粒子が同じ位置を占める可能性のある  $s$  波束縛状態は不可能である。しかし、(7.65) の展開における高次 ( $\ell \geq 1$ ) のチャンネルを用いれば、剛体芯斥力を避けながら束縛状態を形成できる可能性がある。BCS 理論発表 (1957 年) の直後から、多くの理論家により  $p$  波、 $d$  波等の可能性が議論されたが、実際に見つかったのは  $\ell = 1$  の  $p$  波であった。

表 3.1 によると、液体  $^3\text{He}$  で量子効果が効き始める温度  $T_Q \sim \varepsilon_F/k_B$  は数 K のオーダーであり、超流動はそれよりも  $10^{-3}$  も低い温度で発現することがわかる。この系は、クーパー対が  $s = 1$  のスピンを持ち、スピン自由度 ( $\alpha = \pm 1, 0$ ) と軌道自由度 ( $\ell_z = \pm 1, 0$ ) を合わせると、 $3 \times 3 = 9$  個の内部自由度がある非常にユニークな超流動相となっている。実際、B 相 (BW 状態) に加えて、高圧の転移点近傍に A 相 (ABM 状態) という別の相が実現し、また、境界条件や外部摂動により多彩な物理を示すことが知られている。ここでは、この系に対する理論<sup>[23],[73]</sup> を簡単に紹介する。

### 12.1 有効対形成ポテンシャル

$p$  波超流動では、第ゼロ近似として、「ギャップ関数の展開式 (7.69a) で  $\ell = 1$  項のみが有限である」と見なすことができる。対応する球面調和関数  $Y_{1m}(\hat{\mathbf{k}})$  は、(7.66) より、

$$Y_{1,\pm 1}(\hat{\mathbf{k}}) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}}(\hat{k}_x \pm i\hat{k}_y), \quad Y_{10}(\hat{\mathbf{k}}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\hat{k}_z \quad (12.1)$$

と  $\hat{\mathbf{k}} \equiv \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$  の一次関数であることがわかる。その対形成ポテンシャルを微視

## 第 13 章

# 準古典方程式と

# ギンツブルグ – ランダウ方程式

超伝導状態の特筆すべき特徴の一つは、準巨視的スケールの非一様性を持つ熱平衡状態が実現されることであり、その典型例としては、第二種超伝導体が外部磁場下で示す磁束格子が挙げられる。ここでは、非一様な超伝導状態を簡便に扱うために、7.3 節で導いたボゴリユボフ – ドジェンヌ方程式の簡略化を行う。まず、ボゴリユボフ – ドジェンヌ方程式を、松原グリーン関数に対する「ゴルコフ方程式」に書き換える。次に、ゴルコフ方程式から変数の一つを消去して「アイレンバーガー方程式」を導く。この変数消去は、準粒子エネルギーの離散的な分布を塗りつぶして連続分布で置き換えることに対応する。この事実から、アイレンバーガー方程式は「準古典方程式」とも呼ばれている。最後に、転移温度付近に注目し、アイレンバーガー方程式から「ギンツブルグ – ランダウ方程式」を導く。主に物理現象に興味のある方は、この章を飛ばして次章に進めたい。

### 13.1 松原グリーン関数

1955 年に松原武生によって統計力学に導入された「松原グリーン関数」は<sup>[84]</sup>、今日、統計力学や物性物理学の理論的研究にとって必須の道具となっている。この節では、フェルミ粒子系の松原グリーン関数を導入し、その基本的な性質をまとめる。

まず、 $0 \leq \tau_1 \leq \beta \equiv 1/k_B T$  で定義された変数  $\tau_1$  を用いて、場の演算子の“虚時間”ハイゼンベルグ表示を、

$$\hat{\psi}_1(\xi_1, \tau_1) \equiv e^{\tau_1 \hat{H}} \hat{\psi}(\xi_1) e^{-\tau_1 \hat{H}}, \quad \hat{\psi}_2(\xi_1, \tau_1) \equiv e^{\tau_1 \hat{H}} \hat{\psi}^\dagger(\xi_1) e^{-\tau_1 \hat{H}} \quad (13.1)$$

により導入する。 $\tau_1 \rightarrow it_1/\hbar$  により実時間  $t_1$  に移ると、通常ハイゼンベルグ表示になる。(13.1) のように生成消滅演算子を下つき添字  $j = 1, 2$  で区別すると便利である<sup>[85]</sup>。引数  $(\xi_1, \tau_1)$  についても、以下では数字で  $1 \equiv (\xi_1, \tau_1)$  と

## 第 14 章

# アブリコソフの磁束格子

超伝導体は、磁場を内部から完全に排斥する「第一種超伝導体」と、磁場が超伝導体内部に侵入できる「第二種超伝導体」に分類できる。ギンツブルグ–ランダウ方程式を解いて第二種超伝導体の詳細を明らかにしたのがアブリコソフである。1957年に発表されたアブリコソフ理論<sup>[100]</sup>では、下部臨界磁場  $H_{c1}$  と上部臨界磁場  $H_{c2}$  との間で、量子化された磁束が周期的に配列して格子を作ることが予言され、それは後に実験で見事に確認された。ここではこの「磁束格子」を議論する。

### 14.1 ギンツブルグ–ランダウ方程式

ギンツブルグとランダウは、零磁場における超伝導転移温度  $T_c$  近傍に着目し、そこでの自由エネルギーを、超伝導秩序変数  $\Psi(\mathbf{r})$  とベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  の汎関数として現象論的に書き下した (1950年)<sup>[97]</sup>。その微視的導出は後にゴルコフにより行われ<sup>[86]</sup>、同じ温度での零磁場の正常状態との自由エネルギー差が、空間依存性を持つ  $s$  波のギャップ関数  $\Delta(\mathbf{r})$  を用いて、

$$F_{\text{sn}} = \int d^3r \left[ a_2 |\Delta|^2 + \frac{a_4}{2} |\Delta|^4 + b_2 \Delta^* \left( \frac{\nabla}{i} - \frac{2e}{\hbar} \mathbf{A} \right)^2 \Delta + \frac{(\nabla \times \mathbf{A})^2}{2\mu_0} \right] \quad (14.1)$$

と表せることが示された ((13.67) 参照)。ここで、 $\mu_0$  は真空の透磁率であり、また、係数  $a_2, a_4, b_2$  の基本的特徴として、二次の係数  $a_2$  は  $T - T_c$  に比例して  $T < T_c$  で負となり、 $a_4$  と  $b_2$  は正の定数とみなせ、 $b_2$  は不純物散乱の効果で小さくなることが挙げられる。それらの微視的表式は (13.65) に与えられている。

熱平衡状態は、極値条件である  $\delta F_{\text{sn}} / \delta \Delta^*(\mathbf{r}) = 0$  と  $\delta F_{\text{sn}} / \delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$  より決まり、それぞれ

# 第 15 章

## 表面と量子渦芯の電子状態

この章では、表面や量子渦近傍など、非一様な超伝導状態に関する話題を取り上げる。まず、正常金属と超伝導体の接合面に、正常金属の方から入射する電子を考察し、この電子が、「アンドレーエフ散乱」と呼ばれる特異な散乱を被ることを明らかにする。この散乱により、界面におけるエネルギーの流れが、低温において抑制されることになる。第二に、 $s$  波超伝導体の量子渦近傍における準粒子状態を考察し、「カロリドジェンヌーマトリコン (CdGM) モード」と呼ばれる局在した励起モードが、バルクのギャップより低いエネルギー領域に存在することを示す。この CdGM モードは、磁場中熱容量に温度  $T$  に比例する寄与を与え、量子渦の運動に伴って生じる有限の電気抵抗の原因となることが知られている。最後に、準古典アイレンバーガー方程式を  $s$  波孤立量子渦に対して数値的に解き、渦芯近傍の秩序変数、磁束密度、準粒子状態密度の空間依存性を明らかにする。結果は図 15.3–15.5 に与えられている。

### 15.1 アンドレーエフ散乱

図 15.1 のような NS 接合面を考え、正常金属から超伝導体に入射する電子も

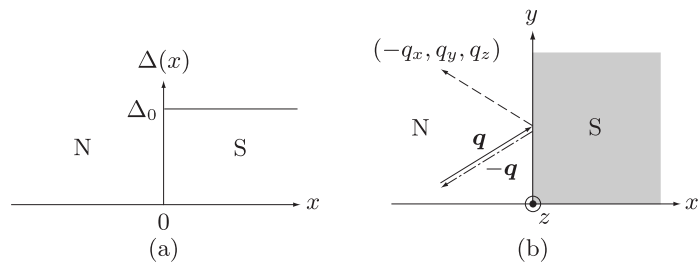


図 15.1 (a) 正常-超伝導 (NS) 接合をモデル化した図。 (b) NS 接合面でのアンドレーエフ散乱 (一点鎖線)。

# 演習問題解答例

1.1 (a) 状態方程式より,

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{nR}{V-nb}, \quad T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P = a\frac{n^2}{V^2}$$

が得られる. これらをそれぞれ (1.30a) と (1.30b) に代入すると, エントロピーと内部エネルギーの微小変化が,

$$dS = \frac{C_V}{T}dT + \frac{nR}{V-nb}dV, \quad dU = C_VdT + a\frac{n^2}{V^2}dV$$

と表せる.

(b)  $U$  は状態量であるから, マクスウェルの関係式

$$\frac{\partial C_V}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial T} \left( a\frac{n^2}{V^2} \right) = 0$$

が成立する. これは  $C_V$  が体積に依存しないことを表す.  $dS$  から同じ結論が得られる.

(c) (a) の表式を  $C_V$  が定数であることを考慮して積分すると, エントロピーと内部エネルギーが,

$$S = C_V \ln T + nR \ln(V-nb) + S_0, \quad U = C_V T - a\frac{n^2}{V} + U_0$$

と求まる. ただし,  $S_0$  と  $U_0$  は定数である.

(d) 準静的断熱過程ではエントロピーは変化しない. (c) で得たエントロピーの表式を用いてこの事実を表現すると, 「 $T(V-nb)^{nR/C_V} = \text{一定}$ 」となる.

(e) 断熱自由膨張では  $d'Q = d'W = 0$  が成立している. 従って, 熱力学第一法則より, この過程で内部エネルギーは変化しない. その際の温度変化を求めるため, 始状態から  $dU = 0$  の熱平衡状態に沿って終状態に至る迂回路を考える. 迂回路での微小変化では, (a) の結果より,

$$C_V dT + a\frac{n^2}{V^2}dV = 0 \iff \frac{dT}{dV} = -\frac{an^2}{C_V V^2}$$

が成立する. これより, 求める温度変化が,

$$\Delta T = \int_{V_1}^{V_2} \frac{dT}{dV} dV = \frac{an^2}{C_V} \left( \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) < 0$$

と得られる.

1.2 確率  $P_k^n$  は  $kP_k^n = npP_{k-1}^{n-1}$  を満たす. これを用いると, 期待値が,

$$\langle k \rangle = np \sum_{k=1}^n P_{k-1}^{n-1} = np \sum_{k'=0}^{n-1} P_{k'}^{n-1} = np$$

と計算できる. また,  $k^2 P_k^n = [k(k-1) + k] P_k^n = n(n-1)p^2 P_{k-2}^{n-2} + np P_{k-1}^{n-1}$  より,  $\langle k^2 \rangle$  が

$$\langle k^2 \rangle = n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^n P_{k-2}^{n-2} + np \sum_{k=1}^n P_{k-1}^{n-1} = n(n-1)p^2 + np$$

と求まる. 以上より,  $\sigma_k \equiv \sqrt{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2} = \sqrt{np(1-p)}$  が得られる.

## 参考文献

- [1] L.N. Cooper, D. Feldman eds., *BCS: 50 Years*, World Scientific, Singapore, 2111.
- [2] J.W. Gibbs, *Elementary Principles in Statistical Mechanics*, Yale University Press, 1902, pp. 44–45 and p. 168.
- [3] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, 1955.
- [4] C.E. Shannon, *Bell System Tech. J.* **27** (1948) 379.
- [5] O. Penrose, *Foundations of Statistical Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, 1970. 213 ページ脚注参照.
- [6] E.T. Jaynes, *Phys. Rev.* **106** (1957) 620.
- [7] 浅野啓三, 永尾汎, 『群論』, 岩波全書, 1965.
- [8] 猪木慶治, 川合光, 『量子力学 I, II』, 講談社, 1994.
- [9] 齋藤正彦, 『線型代数入門』, 東京大学出版会, 1966.
- [10] M. Fierz, *Helv. Phys. Acta* **12** (1939) 3.
- [11] W. Pauli, *Phys. Rev.* **58** (1940) 716.
- [12] R.F. Streater, A.S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics, and All That*, W.A. Benjamin, New York, 1964.
- [13] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, vol. III, Addison–Wesley, 1965, 4–1 節.
- [14] R.C. Weast (ed.), *Handbook of Chemistry and Physics*, Chemical Rubber, 1965.
- [15] Teragon’s Summary of Cryogen Properties ([www.trgn.com/database/cryogen.html](http://www.trgn.com/database/cryogen.html))
- [16] G.C. Wick, *Phys. Rev.* **80** (1950) 268.
- [17] C. Bloch and C. de Donimicis, *Nucl. Phys.* **7** (1958) 459.
- [18] M. Gaudin, *Nucl. Phys.* **15** (1960) 89.
- [19] K. Tsutsui, T. Kita, *J. Phys. Soc. Jpn.* **85** (2016) 114603.
- [20] P.T. Landsberg, *Thermodynamics With Quantum Statistical Illustrations* (Interscience, New York, 1961), p. 435, Eq. (E.10).
- [21] C.N. Yang, *Rev. Mod. Phys.* **34** (1962) 694.
- [22] L.D. Landau, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **30** (1956) 1058 [*Sov. Phys. JETP* **3** (1957) 920].
- [23] D. Vollhardt, P. Wölfle, *The Superfluid Phases of Helium 3*, Taylor&Francis, 1990, p. 31.
- [24] L.N. Cooper, *Phys. Rev.* **104** (1956) 1189.
- [25] 矢野健太郎, 石原繁, 『大学演習 ベクトル解析』, 裳華房, 1964.
- [26] 森口繁一, 宇田川銈久, 一松信, 『数学公式 III』, 岩波書店, 1960.
- [27] H. Frölich, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A215** (1952) 291.
- [28] J. Bardeen, D. Pines, *Phys. Rev.* **99** (1955) 1140.



- [29] M.R. Schafroth, *Phys. Rev.* **96** (1954) 1442; M.R. Schafroth, S.T. Butler, J.M. Blatt, *Helv. Phys. Acta* **30** (1957) 93.
- [30] M.R. Schafroth, *Phys. Rev.* **96** (1954) 1149; **100** (1955) 463.
- [31] S. Tomonaga, *Prog. Theoret. Phys.* **2** (1947) 6.
- [32] V. Ambegaokar, in *Superconductivity* (ed. R.D. Parks), Vol. I, Chap. 5.
- [33] M. Ishikawa, *Prog. Theor. Phys.* **57** (1977) 1836.
- [34] T. Kita, *J. Phys. Soc. Jpn.* **65** (1996) 1355.
- [35] E.C.G. Sudarshan, *Phys. Rev. Lett.* **10** (1963) 277.
- [36] R.J. Glauber, *Phys. Rev.* **131** (1963) 2766.
- [37] A.J. Leggett, F. Sols., *Found. Phys.* **21** (1991) 353.
- [38] A.J. Leggett, *Quantum Liquids: Bose Condensation and Cooper-Pairing in Condensed Matter Systems*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2006.
- [39] X. Si, W. Kohno, T. Kita, *J. Phys. Soc. Jpn.* **87** (2018) 104703.
- [40] N.N. Bogoliubov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **34** (1958) 58 [*Sov. Phys. JETP* **7** (1958) 41]; *Nuovo Cimento* **7** (1958) 794.
- [41] N.N. Bogoliubov, V.V. Tolmachev, D.V. Shirkov, *A New Method in the Theory of Superconductivity*, Consultants Bureau, 1959.
- [42] J.G. Valatin, *Nuovo Cimento* **7** (1958) 843.
- [43] C. Caroli, P.G. de Gennes, J. Matricon, *Phys. Lett.* **9** (1964) 307.
- [44] P.G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys*, W.A. Benjamin, 1966.
- [45] A.F. Andreev, *J. Exptl. Theoret. Phys.* **46** (1964) 1823 [*Sov. Phys. JETP* **19** (1964) 1228].
- [46] T. Kita, M. Arai, *Phys. Rev. B* **70** (2004) 224522.
- [47] 犬井鉄郎, 田辺行人, 小野寺嘉孝, 『応用群論』, 裳華房, 1980.
- [48] J. Bardeen, L.N. Cooper, J.R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **108** (1957) 1175.
- [49] D.E. Gray (ed.), *American Institute of Physics Handbook*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1972.
- [50] R.D. Parks (ed.), *Superconductivity*, Vol. 1, Marcel Dekker, 1969, Chap. 3.
- [51] L.D. Landau, in *Collected Papers of L.D. Landau*, edited by D. Ter Haar (Pergamon, Oxford, 1965) p. 193; L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Statistical Physics Part 1* (Pergamon, New York, 1980) p. 446.
- [52] P.W. Anderson, *Basic Notions of Condensed Matter Physics*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, 1984.
- [53] K. Yosida, *Phys. Rev.* **110** (1958) 769.
- [54] A.J. Leggett, *Phys. Rev.* **140** (1965) A1869.
- [55] W. Meissner, R. Ochsenfeld, *Naturwissenschaften* **21** (1933) 787.
- [56] R. Kubo, *J. Phys. Soc. Jpn.* **12** (1957) 570.
- [57] R.W. Morse, H.V. Bohm, *Phys. Rev.* **108** (1957) 1094.
- [58] W.D. Knight, *Phys. Rev.* **76** (1949) 1259; W.D. Knight, in *Solid State Physics* Vol. 2, ed. by F. Seitz and D. Turnbull (Academic Press, New York, 1956) pp. 93–136.

- [59] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, Wiley, New York, 2005.
- [60] A.R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, 1957.
- [61] C.P. Slichter, *Principles of Magnetic Resonance*, Springer, Berlin, 2010.
- [62] J. Koringa, *Physica* **16** (1950) 601.
- [63] L.C. Hebel, C.P. Slichter, *Phys. Rev.* **113**, (1959) 1504.
- [64] M.H. Cohen, L.M. Falicov, J.C. Phillips, *Phys. Rev. Lett.* **8** (1962) 316.
- [65] J. Bardeen, *Phys. Rev. Lett.* **6** (1961) 57.
- [66] R.E. Prange, *Phys. Rev.* **131** (1963) 1083.
- [67] I. Giaever, *Phys. Rev. Lett.* **5** (1960) 147.
- [68] B.D. Josephson, *Phys. Lett.* **1** (1962) 251.
- [69] V. Ambegaokar, A. Baratoff, *Phys. Rev. Lett.* **10** (1963) 486; **11** (1963) 104.
- [70] A. Barone, G. Paternò, *Physics and Applications of the Josephson Effect*, John Wiley & Sons, New York, 1982.
- [71] D.D. Osheroff, R.C. Richardson, D.M. Lee, *Phys. Rev. Lett.* **28** (1972) 885.
- [72] D.D. Osheroff, W.J. Gully, R.C. Richardson, D.M. Lee, *Phys. Rev. Lett.* **29** (1972) 920.
- [73] A.J. Leggett, *Rev. Mod. Phys.* **47** (1975) 331.
- [74] P.W. Anderson, P. Morel, *Phys. Rev.* **123** (1961) 1911.
- [75] J.W. Serene, D. Rainer, *Phys. Rep.* **101** (1983) 221.
- [76] J.C. Wheatley, *Rev. Mod. Phys.* **47** (1975) 415.
- [77] D.S. Greywall, *Phys. Rev. B* **33** (1986) 7520.
- [78] R. Balian, N.R. Werthamer, *Phys. Rev.* **131** (1963) 1553.
- [79] P.W. Anderson, W.F. Brinkman, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1108.
- [80] T. Kita, *J. Phys. Soc. Jpn.* **67** (1998) 216.
- [81] H. Ikegami, Y. Tsutsumi, K. Kohno, *Science* **341** (2013) 59; *J. Phys. Soc. Jpn.* **84** (2015) 044602.
- [82] O. Shevtsov, J.A. Sauls, *Phys. Rev. B* **94** (2016) 064511.
- [83] M. Sigrist, K. Ueda, *Rev. Mod. Phys.* **63** (1991) 239.
- [84] T. Matsubara, *Prog. Theor. Phys.* **14** (1955) 351.
- [85] T. Kita, *J. Phys. Soc. Jpn.* **80** (2011) 124704.
- [86] L.P. Gor'kov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **36** (1959) 1918 [*Sov. Phys. JETP* **9** (1959) 1364]; *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **37** (1959) 1407 [*Sov. Phys. JETP* **10** (1960) 998].
- [87] Y. Nambu, *Phys. Rev.* **117** (1960) 648.
- [88] E.P. Wigner, *Phys. Rev.* **40** (1932) 749.
- [89] R.L. Stratonovich, *Dok. Akad. Nauk USSR* **1** (1956) 72 [*Sov. Phys. Doklady* **1** (1956) 414].
- [90] T. Kita, *Phys. Rev. B* **64** (2001) 054503.
- [91] G. Eilenberger, *Z. Phys.* **214** (1968) 195.

- [92] A.I. Larkin, Yu.N. Ovchinnikov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **55** (1968) 2262 [*Sov. Phys. JETP* **28** (1969) 1200].
- [93] Y. Nagato, S. Higashitani, K. Yamada, K. Nagai, *J. Low Temp. Phys.* **103** (1996) 1.
- [94] N.B. Kopnin, *J. Low Temp. Phys.* **97** (1994) 157.
- [95] D.I. Khomskii, A. Freimuth, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 1384.
- [96] H. Ueki, M. Ouchci, T. Kita, *J. Phys. Soc. Jpn.* **87** (2018) 044704.
- [97] V.L. Ginzburg, L.D. Landau, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **20** (1950) 1064.
- [98] A.A. Abrikosov, L.P. Gor'kov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **36** (1959) 319 [*Sov. Phys. JETP* **9** (1959) 220].
- [99] P.W. Anderson, *J. Phys. Chem. Solids* **11** (1959) 26.
- [100] A.A. Abrikosov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **32** (1957) 1442 [*Sov. Phys. JETP* **5** (1957) 1174].  
非常に明快な歴史的論文で、一読を勧めるが、幾つか誤りがある。第一に、(20)–(22)式で与えられた四角格子は準安定状態で、平衡状態は $\beta = 1.16$ を持つ三角格子である<sup>[104]</sup>。本文の(14.48)も参照されたい。第二に、(36)式と(37)式の数値定数は、それぞれ、 $0.08 \rightarrow 0.497$ および $0.18 \rightarrow 0.282$ と修正すべきことがわかっている<sup>[107]</sup>。
- [101] E. Brown, *Phys. Rev.* **133** (1964) A1038.
- [102] T. Kita, *J. Phys. Soc. Jpn.* **67** (1998) 2067.
- [103] イ・エム・ゲリファント, エス・ヴェ・フォーミン, 『変分法』, 文一総合出版, 1970.
- [104] W.H. Kleiner, L.M. Roth, S.H. Autler, *Phys. Rev.* **133** (1964) A1226.
- [105] H.M. Adachi, M. Ishikawa, T. Hirano, M. Ichioka, K. Machida, *J. Phys. Soc. Jpn.* **80** (2011) 113702.
- [106] J.L. Harden and V. Arp, *Cryogenics* **3** (1963) 105.
- [107] C.-R. Hu, *Phys. Rev. B* **6** (1972) 1756.
- [108] G.E. Blonder, M. Tinkham, T.M. Klapwijk, *Phys. Rev. B* **25** (1982) 4515.
- [109] C. Caroli, P.G. de Gennes, J. Matricon, *Phys. Lett.* **9** (1964) 307.
- [110] F. Gygi, M. Schlüter, *Phys. Rev. B* **43** (1991) 7609.
- [111] E.V. Thuneberg, J. Kurkijärvi, D. Rainer, *Phys. Rev. B* **29** (1984) 3913.
- [112] U. Klein, *J. Low Temp. Phys.* **69** (1987) 1.
- [113] M. Ichioka, N. Hayashi, N. Enomoto, K. Machida, *Phys. Rev. B* **53** (1996) 15316.
- [114] Y. Nagato, K. Nagai, J. Hara, *J. Low Temp. Phys.* **93** (1993) 33.
- [115] N. Schopohl, K. Maki, *Phys. Rev. B* **52** (1995) 490.
- [116] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing* 3rd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.
- [117] L. Kramer, W. Pesch, *Z. Phys.* **269** (1974) 59.
- [118] W. Pesch, L. Kramer, *J. Low Temp. Phys.* **15** (1974) 367.
- [119] N. Hayashi, T. Isoshima, M. Ichioka, K. Machida, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 2921.
- [120] H.F. Hess, R.B. Robinson, R.C. Dynes, J.M. Valles, Jr., J.V. Waszczak, *Phys. Rev. Lett.* **62** (1989) 214.

# 索引

- ア**
- アイレンバーガー方程式 186, 190  
アインシュタインの縮約 90  
圧縮率 77  
アボガドロ数 14  
アンダーソンの定理 194  
アンドレーエフ反射 216  
アンペールの法則 131  
ウイグナー変換 182  
    ゲージ不変な— 183  
ウィック分解 57  
ABM 状態 168  
エネルギー散逸 140  
エントロピー 5, 6, 14  
エントロピー最大原理 15
- カ**
- 化学ポテンシャル 9  
可逆過程 4  
核スピン緩和率 145  
カノニカル分布 18  
下部臨界磁場 207, 208  
カロリ - ドジェンヌ - マトリコ  
    ン (CdGM) モード 218  
完全規格直交性 29, 32  
気体定数 3  
ギブス・エントロピー 14  
ギブス - デュエムの関係式 76  
ギャップ方程式  
     $s$  波の— 115  
     $p$  波 ABM 状態の— 169  
ギンツブルグ - ランダウ方程式  
    193  
クーパー対 87
- クーパー対生成演算子 89  
クラウジウス不等式 5  
クラーマー - ペッシュ効果 226  
グランドカノニカル分布 20  
グランドポテンシャル 9  
クロネッカーのデルタ 14  
系 3  
ゲージ対称性の破れ 182  
ゲージ不変性 182  
ゲージ変換 181  
交換ホール 63  
勾配 2  
交流ジョセフソン効果 161  
互換 23  
コヒーレンス因子 143  
コヒーレンス長 198  
コヒーレント状態 107  
孤立系 6, 15  
コリンハ則 150  
ゴルフ方程式 180, 181
- サ**
- 最大仕事の原理 9  
GL パラメーター 199  
磁気長 201  
磁気プロット・ベクトル 203  
磁気並進演算子 202  
示強変数 4  
仕事 5  
磁束の量子化 135  
磁束量子 135  
自発的ゲージ対称性の破れ 122, 162  
自発的対称性の破れ 122  
シャノン・エントロピー 14  
縮約された密度行列 54
- 準古典グリーン関数 186  
    —の規格化条件 186, 189  
準古典理論 190  
準粒子状態密度 119  
準粒子場 90  
小正準分布 16  
状態変数 3  
状態方程式 3  
    ファンデルワールスの— 3  
    理想気体の— 3  
状態密度 39  
    三次元一様系の— 41  
    単位体積・1 スピン成分当り  
        の— 84  
状態量 2  
衝突係数 217  
上部臨界磁場 200  
示量変数 4  
真空の透磁率 146  
スピン磁化率  
    正常状態の— 76  
    超伝導状態の— 128, 131  
スピン - 統計定理 25  
スレーター行列式 33  
正準分布 18  
ゼーマン効果 146  
線形応答理論 137-139  
全微分 2  
ゾンマーフェルト展開 48
- タ**
- 第一種超伝導体 198, 200  
大正準分布 20  
第二種超伝導体 200  
第二量子化 31  
大分配関数 20

縦緩和時間 149  
 置換 22  
 置換の偶奇 23  
 秩序変数 122  
 超音波吸収 141, 145  
 超伝導量子干渉計 (SQUID)  
 163  
 超微細相互作用 146  
 超流動  $^3\text{He}$  164  
 超流動密度 129, 131  
 直流ジョセフソン効果 161  
 定積熱容量 10  
 デイラックのデルタ関数 39  
 等重率の原理 16  
 閉じた系 17

## ナ

ナイト・シフト 146  
 内部エネルギー 5  
 二次相転移 123  
 熱平衡条件 8  
 熱力学第一法則 4  
 熱力学第三法則 5  
 熱力学第二法則 5  
 熱力学的臨界磁場 198  
 熱量 5  
 ネルンストの定理 5

## ハ

ハートリー-フォック方程式  
 一様系の— 70  
 非一様系の— 68  
 パウリの排他原理 33, 63

場の演算子 26  
 BCS 波動関数 89  
 BCS 理論 108  
 BW 状態 167  
 非状態量 2  
 標準偏差 12  
 開いた系 19  
 フェルミ液体論  
 ランダウの— 78  
 レグットの超流動— 130  
 フェルミ・エネルギー 46  
 フェルミ真空 34  
 フェルミの接触相互作用 146  
 フェルミ波数 47  
 フェルミ分布 39  
 フェルミ面総和則 72  
 フェルミ粒子 25  
 フォンノイマン・エントロピー  
 14  
 ブロツホー-ドミニシスの定理  
 56  
 分配関数 18  
 平均値 12  
 ヘーベル-スリクター・ピーク  
 151  
 ヘルムホルツの自由エネルギー  
 8  
 ボーズ-アインシュタイン凝縮  
 49  
 ボーズ分布 39  
 ボーズ粒子 25  
 ボーラー状態 171

ボゴリュボフ-ドジェンヌ方程式  
 一様系の— 104  
 非一様系の— 97, 102  
 ボゴリュボフ-バラティン演算子  
 92  
 ボテンシャル 2  
 ボルツマン定数 14  
 ボルツマンの原理 16

## マ

マイスナー効果 132, 134  
 マクスウェルの関係式 3, 10  
 マクスウェル-ボルツマン分布  
 39  
 松原グリーン関数 175  
 ミクロカノニカル分布 16  
 密度行列 54

## ヤ

有効質量 72, 74  
 ゆらぎ 12  
 揺動領域 122  
 芳田関数 127

## ラ

ラグランジュの未定常数 15, 16  
 ランダウ準位 201  
 ランダウ・パラメータ 74, 78  
 粒子・空孔対称性 97  
 ルジャンドル変換 8  
 ロンドンの磁場侵入長 134, 198  
 ロンドン方程式 133

## 著者略歴

### 北 孝文

きた たかふみ

1984年 東京大学大学院工学系研究科物理工学専攻修士課程修了  
1985年 東京大学大学院工学系研究科物理工学専攻博士課程中退  
1985年 東京大学工学部物理工学科助手  
1988年 工学博士（東京大学）  
1988年 東京大学物性研究所助手  
1991年 米国イリノイ大学客員研究員  
1993年 北海道大学理学部物理学科助教授  
2000年～2001年 山田科学振興財団海外派遣研究員  
[ドイツ連邦共和国カールスルーエ大学, パイロイト大学]  
現在 北海道大学大学院理学研究院物理学部門教授  
専門 物性理論・統計力学

#### 主要著書

*Statistical Mechanics of Superconductivity*

(Springer, 2015, 本書第1版の英語版)

演習しよう熱・統計力学（数理工学社，2018）

SGC ライブラリ-167

### 統計力学から理解する 超伝導理論 [第2版]

(電子版)

2024年9月25日 © 初版発行

この電子書籍は2021年4月25日初版発行の  
同タイトルを底本としています。

著者 北 孝文

発行者 森 平 敏 孝

発行所 株式会社 サ イ エ ン ス 社

〒151-0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1丁目3番25号

営業 ☎ (03) 5474-8500 (代) 振替 00170-7-2387

編集 ☎ (03) 5474-8600 (代)

FAX ☎ (03) 5474-8900

組版 プレイン

#### 《検印省略》

本書の内容を無断で複写複製することは、著作者および  
出版者の権利を侵害することがありますので、その場合  
にはあらかじめ小社あて許諾をお求め下さい。

ISBN978-4-7819-9020-0

サイエンス社のホームページのご案内

<https://www.saiensu.co.jp>

ご意見・ご要望は

sk@saiensu.co.jp まで