SGC ライブラリ-179

量子多体系の対称性とトポロジー

統一的な理解を目指して

渡辺 悠樹　著

サイエンス社

はじめに

本書の内容は2019年から2021年まで東京大学の物理工学専攻で行った大学院講義「量子物理学」や，立教大学と茨城大学で行った集中講義，そして雑誌「固体物理」への連載記事[1]を土台として，詳細やより近年の発展なども含めて大幅に拡充したものである．

筆者は高校生の頃，ボールの放物運動から天体のケプラー運動までを統一的に記述するニュートン力学の美しい理論体系に感銘を受け，物理学を志した．それ以来，物理学最大の魅力は普遍的な少数の物理法則に基づいて多岐に渡る現象を説明し，そして予言できるという「物理法則の一般性」にあると感じている．しかし学部4年生の頃に物性理論と素粒子理論とで分野選択を迷っていた際，物性物理のコミュニティではどちらかというと統一的な理解というよりは具体的な物質，個々の物理現象の詳細な理解の方に興味があるような印象を受けた．物質を構成する元素の種類は100を超え，その組み合わせ次第で無数の組成を考えることができる．さらに圧力や温度，電磁場など外場のコントロールが可能であるため，興味深い新物質，新物理現象が毎年のように見つかっている．この豊かなバラエティを踏まえれば，個別の系に興味が出るのは当然とも言えるかもしれない．

そんな矢先，故・南部陽一郎先生がノーベル物理学賞を受賞され，連続的対称性が自発的に破れるとギャップレスの励起が現れるという「南部–ゴールドストーン定理」について学ぶ機会があった．この定理は素粒子物理学から物性物理学まで幅広く用いられる現代物理学の礎となっていることを知り，このように豊富な具体例を俯瞰させてくれる一般論を他にも作れないだろうかという野心を抱いた．特に，「対称性」の観点から「量子多体系」の基底状態のトポロジカルな性質や低エネルギー励起の性質を統一的に理解したい．さらに，この一般的理解に基づいて，逆に未知の現象の予言や，新しい物質の提案ができるかもしれない．このようなモチベーションをもってこれまで取り組んできた筆者自身の研究を交えながら，トポロジカル相の分類など近年の発展も含めて紹介するのが本書の目標である．

できるだけ専門の知識は必要とせず，摂動論や第2量子化など，学部レベルの量子力学の知識があれば，どの計算も1行ずつフォローできるように努めた．群論については最低限の知識を仮定したが，必要な定義はすべて本文中や脚注に記した．必要であれば適宜教科書[2]を参照されたい．

本書で用いる記法についてまとめておく．

- 換算プランク定数 $\hbar$ を 1 とする．
- A を B で定義するとき $A := B$ と書く．
- 整数全体の集合を $\mathbb{Z}$，自然数（1以上の整数）の集合を $\mathbb{N}$，実数全体の集合を $\mathbb{R}$，複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ とする．$\mathbb{Z}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ は n 次の巡回群，$\mathbb{Z}^n := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ $(n \in \mathbb{N})$ は $\mathbb{Z}$ の n 個の直積を表す．複素数 $z \in \mathbb{C}$ の複素共役を $z^* \in \mathbb{C}$ とする．$z + \mathrm{c.c.}$ は $z + z^*$ を表す．

- 実数 $x, a, b \in \mathbb{R}$ に対し，$x \in (a, b)$ は $a < x < b$，$x \in [a, b)$ は $a \leq x < b$，$x \in (a, b]$ は $a < x \leq b$，$x \in [a, b]$ は $a \leq x \leq b$ をそれぞれ意味する．集合 A,B の非交和 $A \sqcup B$ は共通部分 $A \cap B$ が空集合のときの和集合 $A \cup B$ を意味する．
- d 次元ユークリッド空間（1 章の脚注 1）を $\mathbb{E}^d$ と書く．$\mathbb{E}^d$ のベクトルを $\vec{x}, \vec{r}, \vec{t}, \vec{\delta}, \vec{k}, \cdots$ のように上付き矢印で表す．その他の意味でのベクトルは $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{u}, \cdots$ のように太文字で表記する．
- 行列 M の i 行 j 列成分を M_{ij} と書く．$M^\top$ は M の転置行列，M^* は M の各成分の複素共役をとった行列，$M^\dagger$ は M の複素転置行列 $(M^\top)^*$ を表す．パウリ行列を σ_a $(a = x, y, z)$ とする．単位行列は次元を区別せず $\mathbb{1}$ と書く．ただし 2 次元単位行列は σ_0 と書くことがある．
- 線形演算子 $\hat{O}$ の随伴演算子を $\hat{O}^\dagger$ と書く．$\hat{O} + \mathrm{h.c.}$ は $\hat{O} + \hat{O}^\dagger$ を表す．交換関係は $[\hat{O}, \hat{O}'] \coloneqq \hat{O}\hat{O}' - \hat{O}'\hat{O}$，反交換関係は $\{\hat{O}, \hat{O}'\} \coloneqq \hat{O}\hat{O}' + \hat{O}'\hat{O}$ と定義する．
- 多変数関数 $f(x, y, \cdots)$ の変数 x による偏微分を $\partial_x f(x, y, \cdots)$，$y$ による偏微分を $\partial_y f(x, y, \cdots)$ と書く．特に引数が x のみで 1 変数である場合でも区別せず ∂_x を用いる．
- 和は常にあらわに書き，添字が繰り返して現れたとしても縮約しない．
- $f(x)$ が x に滑らかに依存するとは何回でも微分可能（C^∞ 級）であることを意味する．
- 内容が難しく初読の際は読み飛ばすべき章や節のタイトルには † を付けた．
- 片仮名表記が一般的でない人名はアルファベット表記にし，複数の人名が連なる用語などでは仮名漢字表記またはアルファベット表記の何れかに揃えた．

最後に，本書の原稿の草稿に有益なコメントをくれた小林弘和氏，江澤雅彦氏，平﨑雄太氏，渡邊瀬名氏，筆者自身にもあやふやだった多くの点を解決するために相談にのってくださったり質問に答えてくださったりした田崎晴明氏，藤陽平氏，小野清志郎氏，小林良平氏，安藤貴政氏，塩崎謙氏，Xie Chen 氏，Meng Cheng 氏，そして古くからの共同研究者である Hoi Chun Po 氏に謝辞を述べたい．また，先述の大学院講義，集中講義中の質問が元になって理解が深まった点もいくつもあり，本書を執筆しながら参加者の顔ぶれが思い出された．改めて感謝したい．なお本書の執筆にあたっては日本学術振興会の科学研究費 (JP20H01825, JP21H01789) および科学技術振興機構さきがけ (JPMJPR18LA) のサポートを受けた．

2022 年 6 月

渡辺 悠樹

目　次

第 1 章
各種の模型とその対称性

本書では多数のスピンや粒子からなる量子多体系を扱う．以降の議論の準備として，本章ではこれらの系の定義や仮定をまとめる．さらに系が対称性をもつとはどういうことか，そしてその対称性がどのように表現されるのかについて議論する．本章の内容は基礎的ではあるものの，類書ではあまり触れられていないため筆者自身でまとめ直した部分も多い．既知の事項やわかりづらい事項があった場合には，どんどん読み飛ばして次の章に進んでいただいて構わない．その場合には，以降の章で参照されて必要になったときに随時当該の節に戻って目を通していただければ十分である．

1.1 模型の定義

本書で扱う模型はいずれも**格子** (lattice) 上に定義される．その格子点 $\vec{x}$ の集合を Λ とする．格子 Λ は d 次元**ユークリッド空間** (Euclidean space) $\mathbb{E}^d$ $(d \in \mathbb{N})$ の部分集合とする[*1)]．無限次元ヒルベルト空間の数学的な取り扱いを避けるため，適当な境界条件を課すことにより，Λ に含まれる格子点の数は有限とする．

まず**スピン系**，**フェルミオン系**，および**ボソン系**についてそれぞれ定義を簡単にまとめよう．

1.1.1 スピン系

スピン演算子 $\hat{s}^a_{\vec{x}}$ $(a = x, y, z)$ は**交換関係** (commutation relation)

*1) 正規直交座標を用いて $\vec{x}, \vec{x}' \in \mathbb{R}^d$ を $\vec{x} = (x, y, \cdots)$, $\vec{x}' = (x', y', \cdots)$ などと書くとき，任意の $\vec{x}, \vec{x}' \in \mathbb{R}^d$ に対して $|\vec{x} - \vec{x}'| := \sqrt{(\vec{x} - \vec{x}') \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + \cdots}$ で定まる距離をユークリッド距離という．d 次元空間 $\mathbb{R}^d$ に距離をユークリッド距離で定めたものを d 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}^d$ という．単に格子模型を議論する場合には他の距離の定義でも問題ないが，後で空間群を議論するために本書ではユークリッド距離を採用する．

第 2 章
模型の具体例

中学の理科の授業などで「物質の三相」について学んだ際，固体相，液体相，気体相は互いに異なる相であると教わったのではないだろうか．しかしこの常識は大学の学部になると覆されてしまう．すなわち，対称性の自発的破れの観点からは，空間並進対称性は分子の位置が固定される固体相においてのみ破れており，分子が乱雑に動き回る液体相と気体相では破れていない．実際，温度と圧力とうまくコントロールすることによって，液体相と気体相は相転移を経ずに滑らかに行き来できるため，液体相と気体相は実は本質的には同じ相だったということになる．

近年，この対称性の自発的破れの機構以外に，物質のもつトポロジカルな性質に基づいても「相」が区別されることが明らかになり，それまで認識されていたものよりももっと多くの相があることがわかった．そこで物性物理学分野では，様々な設定のもとで可能なトポロジカル相をすべて列挙し，それらを滑らかな変形で互いに繋がるかによって分類しようという研究が世界中で大きな盛り上がりをみせた．この潮流のきっかけとなったのは，1 つ 1 つの非自明な具体例の発見であり，この個別の具体例の研究を経て，では他にどのような可能性があるのか，それらの例をどのように分類すればいいのかという研究が生まれたと考えられる．

この背景を踏まえ，この章ではトポロジカル相の簡単で教育的な具体例を紹介したい．そしてこれらの例を通して，量子多体系の基底状態の縮退や低エネルギー励起の性質にどのようなパターンがあるのかを概観しよう．空間 1,2 次元の非自明な模型のみに限ったが，少し分量が多くなってしまったため，いくつかの具体例に目を通して雰囲気を掴んだら次の章に進んでも構わない．

2.1　スピン模型の例

まずスピン模型の具体例をみていく．量子スピン系に関しては既に優

第 3 章
絶対零度の量子相の分類

2 章ではスピン系やフェルミオン系の具体例を通して，基底状態の縮退や励起ギャップの有無に関して様々なバラエティがあることや，開放境界条件のもとで系の基本的な自由度とは異なる状態が端に現れることがあることをみた．1 章にまとめた「局所相互作用する格子模型」という限られた設定でも，これほどまでに豊かなバラエティがあることは実に驚くべきことである．この章ではこれらの例を系統的に分類する方法について議論する．

3.1 対称性の自発的破れに基づく分類

系の自由エネルギーを対称性に基づいて秩序変数の場で展開し，相関関数や応答関数の相転移点近傍の振る舞いを調べる理論は**ランダウ理論** (Landau theory) と総称され，相転移・臨界現象を取り扱う上で中心的な役割を担ってきた．

すでに 2.1.4 節の横磁場イジング模型や 2.1.3 節の MG 模型で例をみたように, 系が対称性をもっていたとしても状態が同じ対称性をもつとは限らない．対称性 G をもつ系を考えたとき, 基底状態がその部分群 $H < G$（1 章の脚注 16）のみの対称性をもつとき，G のうち H に含まれない元 $G \setminus H := \{g \in G \mid g \notin H\}$ は自発的に破れたという．この対称性の破れのパターン $G \to H$ にしたがって相を分類することができる（図 3.1）．特に基底状態は少なくとも $|G/H|$ だけ縮退する．

ハミルトニアン $\hat{H}$ と対称性の演算子 $\hat{g}$ は可換であるため，有限系の基底状態 $|\Phi_0\rangle$ は，常に $\hat{H}$ と $\hat{g}$ の同時固有状態に選ぶことができる．例えば 2.1.4 節の横磁場イジング模型では，$J > 2|h^z| > 0$ のとき (2.17) 式のような重ね合わせ状態が基底状態となるのだった．そのため，対称性の自発的破れを正確に定義するには対称性を破る外場を導入するか，または相関関数の長距離での振る舞いを調べる必要がある．ここでは前者の方法で取り扱う．あるエルミート演

第 4 章
空間 1 次元の Lieb–Schultz–Mattis 定理と分極

これまでみてきた例からもわかるように，スピンやフェルミオンの自由度が定義される格子点の配置や，相互作用の詳細，そして系に仮定する対称性の組み合わせには非常に多くの可能性がある．この無数にある模型を 1 つずつ別個に取り扱い，性質を詳細に調べていくのは効率が悪いだけでなく見通しが悪い．逆に，模型の格子の構造や対称性，あるいは系に含まれる粒子数といった「模型を書き下した段階で明白な情報」に基づいて模型自体をシステマティックに分類し，その系の基底状態の縮退や励起ギャップの有無といった「系の低エネルギーの性質」に一般的，非摂動的な制限をかけることができれば，統一的な理解を得るための助けになるだろう．本書の中心テーマである **Lieb–Schultz–Mattis 定理**（以下 LSM 定理と略す）はそのような定理の 1 つである．

4.1　Lieb–Schultz–Mattis 定理の概要

LSM 定理は，基底状態が唯一で励起ギャップをもつための条件を与える一連の定理である．逆にこの条件が満たされていない場合，基底状態が縮退するか，もしくはギャップレスの励起が存在しなければならない．相互作用の形や強さといった模型の詳細によらずこのような定理が一般的に成立することは実に驚くべきことである．縮退の起源は自発的対称性の破れ（3.1 節）であることが多いが，トポロジカル縮退（3.2.2 節）の場合の方が理論的にはより興味深い．同様に，ギャップレス励起の起源は自発的対称性の破れに伴う南部–ゴールドストーンモード（3.1 節）やフェルミ面近傍の粒子正孔対励起（図 2.3(c)）であることが多いが，ギャップレススピン液体のスピノン励起などよりエギゾティックな可能性も残される．LSM 定理の条件が満たされていない場合，なんらかの縮退やギャップレス励起の存在が保証されるため，LSM 定理はこれらの非自明な相を実現するための指針として使うことができる．

もともと LSM 定理は空間 1 次元の系に関するものであった．まず Lieb,

第 5 章
磁束の挿入に関する話題

高次元の LSM 定理の議論の準備として，本章ではひねり演算子とゲージ場の関係について整理する．これに基づいて粒子数保存則に対応するカレント演算子を定義し，4 章の多くの議論の鍵となっていたひねり演算子とカレント演算子の関係である (4.17) 式を証明する．またこれらの準備をもとに，量子輸送の整数量子化の例であるサウレスポンプ（5.3.1 節）や多体系の分極のベリー位相公式（5.3.2 節），ホール伝導率とチャーン数の関係（5.3.3 節）などの話題にも触れる．

5.1　磁束の挿入とひねり演算子

この節では，図 5.1(a) に示したように，周期境界条件のもとで x 軸がなす輪に**磁束** (flux)ϕ を通したハミルトニアン $\hat{H}(\phi)$ を構成する手続きを紹介する[*1]．系のハミルトニアン $\hat{H}$ としては引き続き (1.12) 式のものを考える．粒子数演算子 $\hat{N}$ が保存するという $U(1)$ 対称性は仮定するが，並進対称性は仮定しなくともよい．

5.1.1　系の分割

ハミルトニアンは $U(1)$ 対称性をもつため，$e^{i\phi\hat{N}}$ を作用させてもまったく変化しない．そこで $[0, L)$ を

$$\Gamma := \left[0, \frac{1}{2}L\right), \tag{5.1}$$

$$\bar{\Gamma} := \left[\frac{1}{2}L, L\right) \tag{5.2}$$

*1）　もともとの $\hat{H}$ が既に磁束 ϕ_0 を含んでいた場合には，そこへ ϕ を追加すると考える．また，磁場は系がなす輪の空洞部分にのみかかっており，系に直接物理的な磁場がかかるのではない．

第 6 章

$U(1)$ 対称性をもつ高次元系の Lieb–Schultz–Mattis 定理

4 章では空間 1 次元の LSM 定理を紹介した．もともとは具体的なスピン模型に関する定理であったが，$U(1)$ 対称性と並進対称性をもつ模型へと一般化されており，最終的に，単位胞あたりの平均粒子数 ν が整数であることが非縮退で励起ギャップをもつ基底状態の必要条件になるのであった．この LSM 定理は 2000 年以降になって空間 2 次元以上の高次元へと一般化された．本章ではこの高次元版の LSM 定理や関連する話題を紹介する．

押川[120] はスピン系，粒子系を問わず，1 次元の場合と同様に単位胞あたりの平均粒子数が整数であるかどうかが問題であることを示した．しかしこの議論は「励起ギャップをもつ系に磁束 ϕ を入れてもギャップは閉じないだろう」という物理的な仮定に基づいていた．Hastings[118] や，それを数学的に厳密にした Nachtergaele–Sims[121] では，この点が改良されているものの，スピン系に限定した議論となっており，さらにハミルトニアンの離散的対称性に関する追加の仮定を用いている*1)．

最近，Bachmann, Bols, De Roeck, Fraas らによって多体指標（many-body index）に基づいた新たな証明が公開された[123]．この証明には特に追加の仮定もなく，証明のステップも比較的簡単なので，概略を付録 C にまとめた．

*1） Hasting[118] の脚注 19 や Nachtergaele–Sims[121] の Condition LSM6 をみよ．この条件は磁束 ϕ を通した基底状態のエネルギー $E_0(\phi)$ が ϕ にまったく依存しないことや，$\phi = 0$ の基底状態におけるカレントの期待値が厳密に 0 であることを保証している．前章でみたように，系にギャップが開いているときには基底状態エネルギーの ϕ の依存性やカレント期待値は指数関数的に小さいことが示せるが，ϕ を入れたときにギャップが閉じないことは仮定しない場合，この仮定がどれだけ本質的なのかは自明ではない．関連する文献[122] ではこの仮定に一切触れられていない．

第 7 章
空間群の対称性

これまで LSM 定理の議論では空間的な対称性として並進対称性しか考えてこなかった．しかし実際の結晶や興味がある模型は並進対称性の以上の対称性をもつことも多く，これらの対称性を利用しないのは単に勿体無いだけの可能性がある．今後の章で，空間的な対称性もきちんと考慮したときに基底状態のトポロジカルな性質や低エネルギー励起に対してどういう制限をかけることができるのかについて考察する．このための準備として，そもそも空間群の対称性とはなにか，そしてその対称性をもつ模型はどのように構成されるのかについて，一度きちんと整理しよう．

なお，日本語で書かれた空間群の教科書には [2], [126] などがあり，英語の教科書としては [127] が詳しい．

7.1 空間群の基礎

まず空間群について基本的な事項をまとめる．3 次元の系だけでなく（擬）1,2 次元系の低次元系にも興味があるため，本章では空間次元 d が 1,2,3 のいずれかであるとして話を進める．

7.1.1 空間群の種類と元の表示

結晶の対称操作には，これまで議論してきた離散的な並進操作の他にも，反転，回転，鏡映や，これらと並進を組み合わせたものが考えられる．一般に，ユークリッド空間（1 章の脚注 1）の任意の 2 点の距離を変えない変換を総称して合同変換という．d 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}^d$ の合同変換全体からなる群の部分群（1 章の脚注 16）のうち，離散的な並進操作のみを含むものを空間群という．空間群 $\mathcal{G}$ の元 g は $\vec{x} \in \mathbb{E}^d$ を

$$g(\vec{x}) \coloneqq p_g\vec{x} + \vec{t}_g \in \mathbb{E}^d \tag{7.1}$$

第 8 章

$U(1)$ 対称性をもつ系の LSM 定理の精密化

この章では，系が並進対称性に加えて時間反転対称性や空間群の対称性をもつときに，基底状態が唯一で励起ギャップをもつための条件がどのように強められるのかを議論する．元々の LSM 定理によれば，単位胞あたりの平均粒子数が整数であることが必要であったが，追加の対称性がある場合には整数であるだけでは不十分で，ある倍数の整数になることが必要となる．

8.1 時間反転不変な半整数スピンフェルミオンの系に対する定理の改良

8.1.1 設定と主張

d 次元空間の $S=\frac{1}{2}$ のスピン自由度をもつフェルミオンの系を考える．各方向への空間並進対称性を仮定する．まず粒子数 $\hat{N}=\sum_{\vec{x}\in\Lambda}\hat{n}_{\vec{x}}$ とスピンの z 成分 $\hat{S}^z=\sum_{\vec{x}\in\Lambda}\hat{s}^z_{\vec{x}}$ がともに保存すると仮定する．すると，スピンの z 成分が $\pm\frac{1}{2}$ である粒子数 $\hat{N}^{\pm}=\sum_{\vec{x}\in\Lambda}\hat{n}^{\pm}_{\vec{x}}$ がそれぞれ保存することになる．この各々に対して LSM 定理を適用することにより，基底状態が唯一で励起ギャップをもつためには，スピン成分ごとのフィリング

$$\nu^+ := \frac{N_0^+}{V}, \quad \nu^- := \frac{N_0^-}{V} \tag{8.1}$$

がともに整数である必要があることがわかる．

さらに時間反転対称性 $\hat{\mathcal{T}}$（1.6.4 節）を仮定しよう．粒子数 $\hat{N}$ は時間反転不変 ($\hat{\mathcal{T}}\hat{N}\hat{\mathcal{T}}^{-1}=\hat{N}$) だが，スピンの z 成分は時間反転で反転する ($\hat{\mathcal{T}}\hat{S}^z\hat{\mathcal{T}}^{-1}=-\hat{S}^z$)．すると $\hat{\mathcal{T}}\hat{N}^{\pm}\hat{\mathcal{T}}^{-1}=\hat{N}^{\mp}$ が従い，時間反転対称性が破れない限り $N_0^-=N_0^+$ である．この場合，基底状態が唯一で励起ギャップをもつための条件は，合計のフィリング

$$\nu=\nu^++\nu^-=2\nu^+ \tag{8.2}$$

第 9 章

離散対称性をもつスピン系に対する LSM 定理

これまでの章では $U(1)$ 対称性をもつ系に対して，基底状態が唯一で励起ギャップをもつためのフィリングに関する条件を議論してきた．この章では粒子系のことは一旦忘れて，スピン系に対する条件を考察する．この場合は射影表現が鍵となることや，1 つ高い次元のトポロジカル相との対応関係が明らかになる．

9.1　射影表現の配置の格子ホモトピーに基づく分類

大域的な内部対称性 G_{int} をもつ空間 d 次元のスピン系を考えよう．この章では空間群の操作は単に格子点の入れ替えをするだけで，スピンは一切変換しないとする．この系の射影表現の空間的な配置は，スピンが置かれている位置 $\vec{x} \in \Lambda$ とその点のスピンの大きさ $S_{\vec{x}}$ の組によって特徴付けられる．

空間 1 次元で $\mathcal{H}^2[G_{\mathrm{int}}, U(1)] = \mathbb{Z}_2$ の場合を考えよう．例えば，(1.76) 式の $\mathcal{R}_{a,2}$ $(a = x, y, z)$ は，それぞれの軸周りにスピンを π だけ回転する操作であった．1.5.1.1 節や 1.6.3.2 節で議論したように，これらの要素からなる群 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ の射影表現の分類は $\mathcal{H}^2[G_{\mathrm{int}}, U(1)] = \mathbb{Z}_2$ で与えられ，この自明な元，非自明な元はそれぞれ整数スピン，半整数スピンに対応するのだった．1.6.4 節では時間反転対称性 $\mathbb{Z}_2^T$ の射影表現も同様に決まることをみた．

いま $\vec{x} \in \Lambda$ に大きさ $S = S_{\vec{x}}$ のスピンが置かれているという配置から出発し，仮定するすべての対称性を保ちながら，各スピンの位置を連続的に動かすことを考えよう．ただし複数のスピンが 1 点に集まった際には，図 9.1 (a), (b), (c) に示したルールに従って 1 つのスピンへとまとめる．すなわち，1 点に集まる半整数スピンの数が奇数個のときには半整数スピン，偶数個のときには整数スピンとする．また，このルールを逆に使って 1 つのスピンを複数のスピンへと分裂させてもよい．これらの取り決めに基づいたスピン配置の変形を**格子ホモトピー** (lattice homotopy) の変形と呼ぶ[137]．整数スピンには $S = 0$

第 10 章 トポロジーの対称性指標

「はじめに」で述べたように，物質を構成する元素の種類やその組み合わせの数は膨大にある．3 章でトポロジカル相の分類について解説したが，このような無数にある物質の中から興味があるトポロジーをもつ具体的な物質例を探すことは容易ではなく，なんらかの指針が必要となる．さらに，具体的な系の基底状態のトポロジーを調べるためには一般に系の基底状態に関する詳細な情報が必要となる．例えばバンド絶縁体の場合にベリー位相を計算するためには，すべての波数点，もしくは細かく離散化した波数点に対してブロッホ関数を計算しベリー接続の積分を評価する必要がある．このような困難を避け，基底状態に関する情報のうちごく限られたものを使ってそのトポロジーが簡便に判定できると便利であろう．そこで本章では，基底状態のもつ対称性の表現に基づいてそのトポロジーを調べる「対称性指標の方法」について解説する．

まず 10.1 節で基本的な例を通してアイディアを説明し，バンド絶縁体だけでなく相互作用系に対しても応用例があることをみる．その後 10.2 節でバンド絶縁体に対する一般論を展開したのち，10.3 節で重要な例を紹介する．最後に 10.4 節で超伝導の問題への拡張を議論する．

10.1 対称性指標の方法のアイディアと具体例

10.1.1 スピンの向きと巻き付き数の関係

図 10.1 のように xy 面内の単位円上にスピンが並んでいるとしよう．スピンの向きが揃う方がエネルギーが低くなるように，隣接するスピンの間には強磁性相互作用が働いており，隣合うスピンはほぼ同じ向きを向いている．また，スピンの向きは xy 面内に拘束されており，z 軸方向の成分をもたないと仮定する．このような状況を実現するには例えば (2.2) 式の XXZ 模型で $J<0$, $\Delta_z=0$ とすればよい．位置 $\vec{x}=(\cos\theta,\sin\theta)$ のスピンの期待値 $\langle\Phi_0|\boldsymbol{s}_{\vec{x}}|\Phi_0\rangle$ の方向を単位ベクトル $\boldsymbol{n}(\theta)=(\cos\Phi(\theta),\sin\Phi(\theta),0)$ で表すと，$\boldsymbol{n}(\theta)$ が θ の

第 11 章
多極子と表面電荷

この章では，境界をもつ絶縁体を考えたときにその境界付近に現れる電荷の分布について考察する．3.5 節では非自明なトポロジーをもつ相のバルク境界対応を議論したが，実は直積状態と断熱的につながる自明な絶縁体も結晶の表面や角に分数電荷をもつことがある．しかもこの分数電荷は点群の対称性のもとで量子化されており，さらにバルクのトポロジカル不変量から予言することが可能という意味で**自明な絶縁体のバルク境界対応**と言える．分数電荷の興味深い例として，NaCl の立方体型結晶の角に現れる $\pm\frac{1}{8}e$ の電荷について紹介する．

11.1　絶縁体バルクの電荷分布と粗視化

絶縁体の電荷分布は，一般に系を構成する正負の電荷をもった粒子（絶縁体なら電子と局在イオン）からの寄与からなるが，すべての寄与を足し合わせた全電荷分布を $\rho(\vec{x})$ とする．絶縁体というとバンド絶縁体を指すことが多いが，本章ではより一般に $U(1)$ 対称性と並進対称性をもつ系の基底状態が唯一で励起ギャップをもつとき**絶縁体**と表現する．

並進対称性の仮定により $\rho(\vec{x}+\vec{m})=\rho(\vec{x})$ が成り立つため，$\rho(\vec{x})$ は

$$\rho(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in\Lambda_{\mathrm{UC}}} \rho_0(\vec{x}-\vec{m}) \tag{11.1}$$

のように繰り返し単位 $\rho_0(\vec{x})$ を周期的に並べたものして表すことができる（図 11.1(a), (b)）．絶縁体の電荷中性条件から

$$\int_{\mathrm{E}^d} d^d x\, \rho_0(\vec{x}) = 0 \tag{11.2}$$

である．$\rho_0(\vec{x})$ には任意性があり一意には定まらないが，$\vec{x}=0$ 付近に指数的に局在するという仮定さえ満たせば任意に選んでよい．バンド絶縁体の電子の

付録 A
フロベニウス–シューアの指標

群 G の既約表現を既知とする．群 G に反ユニタリ演算子で表現される元 a_0 を追加した群 $G \sqcup A$ $(A := a_0 G)$ を考える．この付録 A では群 G の既約表現をもとにして $G \sqcup A$ の既約表現を構成する方法について議論する．

A.1 設定

いま $\{|i\rangle\}_{i=1}^{d^\alpha}$ $(d^\alpha := \dim(u^\alpha))$ は乗数系を ω とする G の既約表現 u^α の基底とする．

$$\hat{g}|i\rangle = \sum_{i'=1}^{d^\alpha} |i'\rangle [u^\alpha(g)]_{i'i} \tag{A.1}$$

すると $\hat{a}_0|i\rangle$ は $(\hat{a}_0\hat{g}(\hat{a}_0)^{-1})\hat{a}_0|i\rangle = \sum_{i'=1}^{d^\alpha} \hat{a}_0|i'\rangle[u^\alpha(g)^*]_{i'i}$ を満たす[*1]．$g' := a_0 g a_0^{-1}$ と定義すると

$$\hat{a}_0\hat{g} = \omega(a_0, g)\widehat{a_0 g} = \omega(a_0, a_0^{-1}g'a_0)\widehat{g'a_0} = \frac{\omega(a_0, a_0^{-1}g'a_0)}{\omega(g', a_0)}\hat{g}'\hat{a}_0 \tag{A.3}$$

であるため，g' を改めて g と書くことにより

$$\hat{g}\hat{a}_0|i\rangle = \sum_{i'=1}^{d^\alpha} \hat{a}_0|i'\rangle [\bar{u}^\alpha(g)]_{i'i}, \tag{A.4}$$

$$\bar{u}^\alpha(g) := \frac{\omega(g, a_0)}{\omega(a_0, a_0^{-1}ga_0)} u^\alpha(a_0^{-1}ga_0)^* \tag{A.5}$$

を得る．つまり $\{\hat{a}_0|i\rangle\}_{i=1}^{d^\alpha}$ は表現 $\bar{u}^\alpha(g)$ の基底である．

いま仮に，u^α と $\bar{u}^\alpha$ は同値な表現であり，すべての $g \in G$ に対して

---

*1） 一般に

$$\widehat{a_0^{-1}} = \omega(a_0^{-1}, a_0)(\hat{a}_0)^{-1} = \omega(a_0, a_0^{-1})^*(\hat{a}_0)^{-1} \tag{A.2}$$

であるため，$\widehat{a_0^{-1}}$ と $(\hat{a}_0)^{-1}$ は明確に区別しなければならない．

付録 B

格子模型における南部–ゴールドストーン定理

B.1 定理の主張

付録 B では格子模型に対する南部–ゴールドストーン定理を文献 [176], [177] に基づいて証明する．ハミルトニアン $\hat{H}$ が $\hat{Q} := \sum_{\vec{x}\in\Lambda} \hat{q}_{\vec{x}}$ で生成される連続対称性 $e^{i\theta\hat{Q}}$ をもつ，つまり $[\hat{H}, \hat{Q}] = 0$ と仮定する．

この対称性の自発的破れを定式化するために，エルミート演算子 $\hat{O} := \sum_{\vec{x}\in\Lambda} \hat{o}_{\vec{x}}$ を 1 つ選び $\delta\hat{O} := [i\hat{Q}, \hat{O}] \neq 0$ とする*1)．これを用いて (3.3) 式のように外場をかけたハミルトニアンを考える．$\hat{H}(h)$ の基底状態 $|\Phi_0(h)\rangle$ は，格子の並進対称性 $\hat{T}_{\vec{m}}$ の固有状態で $\hat{T}_{\vec{m}}|\Phi_0(h)\rangle = |\Phi_0(h)\rangle$ を満たすと仮定する．連続対称性対称性 $e^{i\theta\hat{Q}}$ の自発的破れは

$$o(h) := \frac{\langle\Phi_0(h)|\delta\hat{O}|\Phi_0(h)\rangle}{V} = \frac{\langle\Phi_0(h)|[i\hat{Q}, \hat{O}]|\Phi_0(h)\rangle}{V}, \tag{B.1}$$

$$o := \lim_{h\to+0} \lim_{V\to\infty} o(h) \neq 0 \tag{B.2}$$

を満たすような $\hat{O}$ が存在することと定義される．o は系の秩序を測る秩序パラメータである．なお $\hat{q}_{\vec{x}}$ と $\hat{o}_{\vec{x}}$ のどちらも $\vec{x} \in \Lambda$ から距離 R の格子点にしか作用しない局所演算子で，並進操作のもとで $\hat{T}_{\vec{m}}\hat{q}_{\vec{x}}\hat{T}^\dagger_{\vec{m}} = \hat{q}_{\vec{x}+\vec{m}}, \hat{T}_{\vec{m}}\hat{o}_{\vec{x}}\hat{T}^\dagger_{\vec{m}} = \hat{o}_{\vec{x}+\vec{m}}$ と変換する．

以上の仮定のもとで，並進対称性 $\hat{T}_{\vec{m}}$ の固有値 $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{m}}$ のセクター内の励起エネルギー $\omega_{\vec{k}}$ は

$$\lim_{V\to\infty} \omega_{\vec{k}} \leq \frac{\sqrt{\tilde{\gamma}}}{o} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} \alpha_{ij} k_i k_j + \beta h + O(|\vec{k}|^3, h|\vec{k}|^2, h^2)} \tag{B.3}$$

と，線形分散に外場によるギャップ $\sqrt{h}$ が加わったものによって上から評価することができる．この評価に現れる係数は

*1)　これは (3.2) 式で $\hat{g} = e^{i\theta\hat{Q}}$ とし，$\theta \to 0$ としたものに対応する．

付録 C
Bachmann–Bols–De Roeck–Fraas の多体指標に基づく LSM 定理の証明

6.2 節の押川の議論は直感的でわかりやすかったが，$\hat{H}$ が励起ギャップをもっていた場合に $\hat{H}(\phi)$ も励起ギャップをもつことを仮定していた．この付録 C では文献 [123] に基づいて，このような仮定のない高次元 LSM 定理の証明を紹介したい．なおこの文献では，以下の議論の並進対称性を他の様々なユニタリ変換と取り替えることで，LSM 定理だけでなく 5.3.1 節のサウレスポンプや 5.3.3 節のホール伝導率なども厳密に議論されている．

C.1　局所的な粒子数揺らぎ

この証明では 5.1.1 節で導入した部分領域 Γ や Λ_n $(n = 1, 2, 3, 4)$ への分割を用いる．ただし L は L_1 と読み替えなければならない．基底状態 $|\Phi_0\rangle$ は，一般に部分領域 Γ の粒子数演算子 $\hat{N}_\Gamma$ の固有状態ではない．しかし $\hat{H}$ の基底状態が唯一で励起ギャップもつとき，実は $\hat{N}_\Gamma$ に Γ の境界の寄与を加えた演算子の固有状態となる．これが Bachmann らによる証明[123]の鍵となる．

文献 [178] に基づいて具体的にこの $\hat{N}_\Gamma$ の補正項を構成しよう．ハミルトニアン $\hat{H}$ の固有状態を $|\Phi_n\rangle$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ とし，そのエネルギー固有値を E_n と書こう．$n = 0$ が基底状態に対応し，$n \geq 1$ のとき $|E_n - E_0| \geq \Delta$ を満たすとする．

関数 $F(t)$ に対するフーリエ変換をおよび逆変換を

$$\tilde{F}(\omega) \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} dt\, F(t) e^{-i\omega t}, \quad F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{F}(\omega) e^{i\omega t} \tag{C.1}$$

と定義する．$|\omega| \geq \Delta$ のとき

$$\tilde{F}_\Delta(\omega) = -\frac{i}{\omega} \tag{C.2}$$

かつ $\int_{-\infty}^{\infty} dt |F_\Delta(t)| < \infty$ となる関数 $F_\Delta(t)$ を 1 つとり*1)，演算子 $\hat{O}$ に対して

*1)　このような関数の例は文献 [179] に与えられている

おわりに

本書を通して，物性の多岐にわたる系をできる限り統一的に理解するための様々な試みや結果について紹介してきた．自分自身が勉強した際に「こうやってまとめてあったら良かったのに」と感じていたことを思うがままに書いてしまったため，少々難しくなり過ぎてしまった嫌いがあるが，逆にユニークな一冊になったのではないかと期待している．

物性分野の最前線の研究の進展はとても早く，非エルミート系やフロッケ理論で取り扱われる周期駆動系に代表される非平衡系の話題，多体系の局在や時間結晶にまつわる話題，非相反応答や高次応答の話題，ひねり積層系，高次対称性など，ここ数年に絞ってもどんどん新しい系，新しい話題が盛り上がっている．これらに関してはまったく触れることができなかったが，平衡系の低エネルギー状態に関する本書の考察はこれらの新しい系を理解する上でもきっと助けになるはずである．

11 章では，「塩」という身近な物質の結晶の角に $\frac{1}{8}e$ に量子化された分数電荷が現れるという筆者自身にとっても驚きの結果を紹介した．これは結晶の角に生じる電荷をバルクの電荷分布に基づいて予言する (11.19) 式の公式があって初めて思いつくことができたという意味で，「はじめに」で述べた一般論に基づく新物性の予言の 1 つの成功例であると考えている．分野や研究トピックに違いはあれど，本書が読者の今後の学習や研究の一助になれば幸いである．

なお，誤植や不正確と思われる記述，その他の質問は筆者 hwatanabe@g.ecc.u-tokyo.ac.jp まで電子メールでご連絡いただきたい．訂正箇所は筆者の研究室のウェブサイト

https://sites.google.com/view/watanabegroup/

に随時アップしていく予定である．

参考文献

[1] 渡辺悠樹. 「空間群の表現論とバンド構造のトポロジー（その 1)–(その 5)」誌上セミナー. 固体物理, Vol. 54, No. 4, 5, 7, 10, Vol. 55, No. 4, 2019–2020.

[2] 犬井鉄郎, 田辺行人, 小野寺嘉孝. 応用群論 – 群表現と物理学. 裳華房, 1980.

[3] Zheng-Cheng Gu, Zhenghan Wang, and Xiao-Gang Wen. Classification of two-dimensional fermionic and bosonic topological orders. *Phys. Rev. B*, Vol. 91, p. 125149, Mar. 2015.

[4] Hal Tasaki. *Physics and mathematics of quantum many-body systems*. Springer, 2020.

[5] M.B. Hastings. Locality in quantum systems. *arXiv:1008.5137*, 2010.

[6] Xie Chen, Zheng-Cheng Gu, Zheng-Xin Liu, and Xiao-Gang Wen. Symmetry protected topological orders and the group cohomology of their symmetry group. *Phys. Rev. B*, Vol. 87, p. 155114, Apr. 2013.

[7] Bilbao Crystallographic Server. https://www.cryst.ehu.es.

[8] Ian Affleck and Elliott H. Lieb. A proof of part of Haldane's conjecture on spin chains. *Letters in Mathematical Physics*, Vol. 12, No. 1, pp. 57–69, Jul. 1986.

[9] 田崎晴明. 量子スピン系の理論. 物性研究, Vol. 58, pp. 121– 178, 1992.

[10] 久保健. 量子スピン系における秩序. 物性研究, Vol. 75, pp. 175–226, 2000.

[11] A. Auerbach. *Interacting electrons and quantum magnetism*. Graduate Texts in Contemporary Physics. Springer, New York, 1994.

[12] 久保健, 田中秀数. 磁性 I. 朝倉物性物理シリーズ 7, 朝倉書店, 2008.

[13] F.D.M. Haldane. Nonlinear field theory of large-spin Heisenberg antiferromagnets: Semiclassically quantized solitons of the one-dimensional easy-axis Néel state. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 50, pp. 1153–1156, Apr. 1983.

[14] 堺和光. 1 次元量子系にみられる特異な輸送特性 —厳密解からのアプローチ—. 物性研究, Vol. 87, pp. 214–266, 2006.

[15] Ian Affleck, Tom Kennedy, Elliott H. Lieb, and Hal Tasaki. Valence bond ground states in isotropic quantum antiferromagnets. *Communications in Mathematical Physics*, Vol. 115, No. 3, pp. 477 – 528, 1988.

[16] Frank Pollmann, Erez Berg, Ari M. Turner, and Masaki Oshikawa. Symmetry protection of topological phases in one-dimensional quantum spin systems. *Phys. Rev. B*, Vol. 85, p. 075125, Feb. 2012.

[17] Kazuhiro Sano and Ken'ichi Takano. Spin gap of the one-dimensional t-J-J' model. *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol. 62, No. 11, pp. 3809–3812, 1993.

[18] Eric Dennis, Alexei Kitaev, Andrew Landahl, and John Preskill. Topological quantum

memory. *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 43, No. 9, pp. 4452–4505, 2002.

[19] Sergey Bravyi, Matthew B. Hastings, and Spyridon Michalakis. Topological quantum order: Stability under local perturbations. *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 51, No. 9, p. 093512, 2010.

[20] Bei Zeng, Xie Chen, Duan-Lu Zhou, and Xiao-Gang Wen. *Quantum information meets quantum matter: From quantum entanglement to topological phases of many-body systems*. Springer, 2019.

[21] Maissam Barkeshli, Parsa Bonderson, Meng Cheng, Chao-Ming Jian, and Kevin Walker. Reflection and time reversal symmetry enriched topological phases of matter: Path integrals, non-orientable manifolds, and anomalies. *Communications in Mathematical Physics*, Vol. 374, No. 2, pp. 1021–1124, 2020.

[22] Yohei Fuji. Anisotropic layer construction of anisotropic fracton models. *Phys. Rev. B*, Vol. 100, p. 235115, Dec. 2019.

[23] Rahul M. Nandkishore and Michael Hermele. Fractons. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, Vol. 10, No. 1, pp. 295–313, 2019.

[24] Michael Pretko, Xie Chen, and Yizhi You. Fracton phases of matter. *International Journal of Modern Physics A*, Vol. 35, No. 06, p. 2030003, 2020.

[25] 野村健太郎. トポロジカル絶縁体・超伝導体. 現代理論物理学シリーズ 6, 丸善出版, 2016.

[26] 安藤陽一. トポロジカル絶縁体入門. KS 物理専門書, 講談社, 2014.

[27] 古崎昭. トポロジカル絶縁体・超伝導体の分類学. 表面科学, Vol. 32, No. 4, pp. 209–215, 2011.

[28] David Vanderbilt. *Berry phases in electronic structure theory: electric polarization, orbital magnetization and topological insulators*. Cambridge University Press, 2018.

[29] R.D. King-Smith and David Vanderbilt. Theory of polarization of crystalline solids. *Phys. Rev. B*, Vol. 47, pp. 1651–1654, Jan. 1993.

[30] D.J. Thouless, M. Kohmoto, M.P. Nightingale, and M. den Nijs. Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 49, pp. 405–408, Aug. 1982.

[31] Mahito Kohmoto. Topological invariant and the quantization of the Hall conductance. *Annals of Physics*, Vol. 160, No. 2, pp. 343–354, 1985.

[32] Takahiro Fukui, Yasuhiro Hatsugai, and Hiroshi Suzuki. Chern numbers in discretized Brillouin zone: Efficient method of computing (spin) Hall conductances. *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol. 74, No. 6, pp. 1674–1677, 2005.

[33] W.P. Su, J.R. Schrieffer, and A.J. Heeger. Solitons in polyacetylene. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 42, pp. 1698–1701, Jun. 1979.

[34] Ching-Kai Chiu, Jeffrey C.Y. Teo, Andreas P. Schnyder, and Shinsei Ryu. Classification of topological quantum matter with symmetries. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 88, p. 035005, Aug. 2016.

[35] Taylor L. Hughes, Emil Prodan, and B. Andrei Bernevig. Inversion-symmetric topological insulators. *Phys. Rev. B*, Vol. 83, p. 245132, Jun. 2011.

[36] 三角樹弘, 他. 特集 量子異常の拡がり –アノマリーがつなぐ新たな物理–. 数理科学, No. 679, pp. 5–64, サイエンス社, Jan. 2020.

[37] A Yu Kitaev. Unpaired Majorana fermions in quantum wires. *Physics-Uspekhi*, Vol. 44, No. 10S, pp. 131–136, Oct. 2001.

[38] Jason Alicea. New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems. *Reports on Progress in Physics*, Vol. 75, No. 7, p. 076501, Jun. 2012.

[39] Ken Shiozaki, Hassan Shapourian, and Shinsei Ryu. Many-body topological invariants in fermionic symmetry-protected topological phases: Cases of point group symmetries. *Phys. Rev. B*, Vol. 95, p. 205139, May 2017.

[40] Kohei Kawabata, Ryohei Kobayashi, Ning Wu, and Hosho Katsura. Exact zero modes in twisted Kitaev chains. *Phys. Rev. B*, Vol. 95, p. 195140, May 2017.

[41] N. Read and Dmitry Green. Paired states of fermions in two dimensions with breaking of parity and time-reversal symmetries and the fractional quantum Hall effect. *Phys. Rev. B*, Vol. 61, pp. 10267–10297, Apr. 2000.

[42] Yoichiro Nambu. Quasi-particles and gauge invariance in the theory of superconductivity. *Phys. Rev.*, Vol. 117, pp. 648–663, Feb. 1960.

[43] J. Goldstone. Field theories with superconductor solutions. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, Vol. 19, No. 1, pp. 154–164, Jan. 1961.

[44] 渡辺悠樹, 村山斉. 南部・ゴールドストーンボソンの統一的理解 (交流). 日本物理学会誌, Vol. 68, No. 4, pp. 200–208, 2013.

[45] 渡辺悠樹. 対称性の "破れ". 数理科学, No. 669, pp. 48–53, サイエンス社, Mar. 2019.

[46] 日高義将. 対称性の自発的破れと量子的破れ. 物性研究（電子版）, Vol. 8, No. 1, p. 081203, 2020.

[47] Haruki Watanabe. Counting rules of Nambu–Goldstone modes. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, Vol. 11, No. 1, pp. 169–187, 2020.

[48] O. Golinelli, Th. Jolicoeur, and R. Lacaze. Finite-lattice extrapolations for a Haldane-gap antiferromagnet. *Phys. Rev. B*, Vol. 50, pp. 3037–3044, Aug. 1994.

[49] Steven R. White and David A. Huse. Numerical renormalization-group study of low-lying eigenstates of the antiferromagnetic $S = 1$ Heisenberg chain. *Phys. Rev. B*, Vol. 48, pp. 3844–3852, Aug. 1993.

[50] Xiao-Gang Wen. Colloquium: Zoo of quantum-topological phases of matter. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 89, p. 041004, Dec. 2017.

[51] Xiao-Gang Wen. *Quantum field theory of many-body systems: From the origin of sound to an origin of light and electrons.* Oxford University Press, New York, 2004.

[52] Xiao-Gang Wen. Vacuum degeneracy of chiral spin states in compactified space. *Phys. Rev. B*, Vol. 40, pp. 7387–7390, Oct. 1989.

[53] Maissam Barkeshli, Parsa Bonderson, Meng Cheng, and Zhenghan Wang. Symmetry fractionalization, defects, and gauging of topological phases. *Phys. Rev. B*, Vol. 100, p. 115147, Sep. 2019.

[54] Yohei Fuji, Frank Pollmann, and Masaki Oshikawa. Distinct trivial phases protected by a point-group symmetry in quantum spin chains. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 114, p. 177204, May 2015.

[55] Hoi Chun Po, Ashvin Vishwanath, and Haruki Watanabe. Symmetry-based indicators of band topology in the 230 space groups. *Nature Communications*, Vol. 8, No. 1, p. 50, 2017.

[56] Daniel S. Freed and Gregory W. Moore. Twisted equivariant matter. *Annales Henri Poincaré*, Vol. 14, No. 8, pp. 1927–2023, Dec. 2013.

[57] Guo Chuan Thiang. On the K-theoretic classification of topological phases of matter. *Annales Henri Poincaré*, Vol. 17, No. 4, pp. 757–794, Apr. 2016.

[58] 五味清紀. トポロジカル絶縁体入門—トポロジーの視点から—. 数学, Vol. 74, No. 1, pp. 54–80, 2022.

[59] Hoi Chun Po, Haruki Watanabe, and Ashvin Vishwanath. Fragile topology and Wannier obstructions. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 121, p. 126402, Sep. 2018.

[60] Dominic V. Else, Hoi Chun Po, and Haruki Watanabe. Fragile topological phases in interacting systems. *Phys. Rev. B*, Vol. 99, p. 125122, Mar. 2019.

[61] Maissam Barkeshli, Yu-An Chen, Po-Shen Hsin, and Naren Manjunath. Classification of (2+1)d invertible fermionic topological phases with symmetry. *Phys. Rev. B*, Vol. 105, p. 235143, Jun. 2022.

[62] Ryohei Kobayashi. Lattice construction of exotic invertible topological phases. *Phys. Rev. B*, Vol. 105, p. 035153, Jan. 2022.

[63] Anton Kapustin, Ryan Thorngren, Alex Turzillo, and Zitao Wang. Fermionic symmetry protected topological phases and cobordisms. *Journal of High Energy Physics*, Vol. 2015, No. 12, pp. 1–21, Dec. 2015.

[64] Daniel S Freed and Michael J Hopkins. Reflection positivity and invertible topological phases. *Geometry & Topology*, Vol. 25, No. 3, pp. 1165–1330, 2021.

[65] Ken Shiozaki, Hassan Shapourian, Kiyonori Gomi, and Shinsei Ryu. Many-body topological invariants for fermionic short-range entangled topological phases protected by antiunitary symmetries. *Phys. Rev. B*, Vol. 98, p. 035151, Jul. 2018.

[66] Mayuko Yamashita and Kazuya Yonekura. Differential models for the Anderson dual to bordism theories and invertible QFT's, I. *arXiv:2106.09270*, 2021.

[67] Christopher Schommer-Pries. Tori detect invertibility of topological field theories. *Geometry & Topology*, Vol. 22, No. 5, pp. 2713–2756, 2018.

[68] Zheng-Cheng Gu, Zhenghan Wang, and Xiao-Gang Wen. Classification of two-dimensional fermionic and bosonic topological orders. *Phys. Rev. B*, Vol. 91, p. 125149,

Mar. 2015.

[69] Yichen Huang and Xie Chen. Quantum circuit complexity of one-dimensional topological phases. *Phys. Rev. B*, Vol. 91, p. 195143, May 2015.

[70] Alexei Kitaev. Anyons in an exactly solved model and beyond. *Annals of Physics*, Vol. 321, No. 1, pp. 2–111, 2006. January Special Issue.

[71] Yuan-Ming Lu and Ashvin Vishwanath. Theory and classification of interacting integer topological phases in two dimensions: A Chern-Simons approach. *Phys. Rev. B*, Vol. 86, p. 125119, Sep. 2012.

[72] Chong Wang, Andrew C. Potter, and T. Senthil. Gapped symmetry preserving surface state for the electron topological insulator. *Phys. Rev. B*, Vol. 88, p. 115137, Sep. 2013.

[73] Ashvin Vishwanath and T. Senthil. Physics of three-dimensional bosonic topological insulators: Surface-deconfined criticality and quantized magnetoelectric effect. *Phys. Rev. X*, Vol. 3, p. 011016, Feb. 2013.

[74] Juven Wang, Xiao-Gang Wen, and Edward Witten. Symmetric gapped interfaces of SPT and SET states: Systematic constructions. *Phys. Rev. X*, Vol. 8, p. 031048, Aug. 2018.

[75] Ryohei Kobayashi, Kantaro Ohmori, and Yuji Tachikawa. On gapped boundaries for SPT phases beyond group cohomology. *Journal of High Energy Physics*, Vol. 2019, No. 11, p. 131, 2019.

[76] Edward Witten. Fermion path integrals and topological phases. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 88, p. 035001, Jul. 2016.

[77] Davide Gaiotto, Anton Kapustin, Zohar Komargodski, and Nathan Seiberg. Theta, time reversal and temperature. *Journal of High Energy Physics*, Vol. 2017, No. 5, p. 91, May 2017.

[78] Frank Schindler, Ashley M. Cook, Maia G. Vergniory, Zhijun Wang, Stuart S.P. Parkin, B. Andrei Bernevig, and Titus Neupert. Higher-order topological insulators. *Science Advances*, Vol. 4, No. 6, p. eaat0346, 2018.

[79] Nicola Marzari, Arash A. Mostofi, Jonathan R. Yates, Ivo Souza, and David Vanderbilt. Maximally localized Wannier functions: Theory and applications. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 84, pp. 1419–1475, Oct. 2012.

[80] Christian Brouder, Gianluca Panati, Matteo Calandra, Christophe Mourougane, and Nicola Marzari. Exponential localization of Wannier functions in insulators. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 98, p. 046402, Jan. 2007.

[81] Alexey A. Soluyanov and David Vanderbilt. Wannier representation of $\mathbb{Z}_2$ topological insulators. *Phys. Rev. B*, Vol. 83, p. 035108, Jan. 2011.

[82] A. Alexandradinata and J. Höller. No-go theorem for topological insulators and high-throughput identification of Chern insulators. *Phys. Rev. B*, Vol. 98, p. 184305, Nov. 2018.

[83] Andreas P. Schnyder, Shinsei Ryu, Akira Furusaki, and Andreas W.W. Ludwig. Classification of topological insulators and superconductors in three spatial dimensions. *Phys. Rev. B*, Vol. 78, p. 195125, Nov. 2008.

[84] Alexei Kitaev. Periodic table for topological insulators and superconductors. *AIP Conference Proceedings*, Vol. 1134, No. 1, pp. 22–30, 2009.

[85] 森本高裕, 古崎昭. トポロジカル絶縁体・超伝導体の分類理論とトポロジカル結晶絶縁体への応用. 固体物理, Vol. 50, No. 6, pp. 297–307, 2015.

[86] Alexander Altland and Martin R. Zirnbauer. Nonstandard symmetry classes in mesoscopic normal-superconducting hybrid structures. *Phys. Rev. B*, Vol. 55, pp. 1142–1161, Jan. 1997.

[87] Lukasz Fidkowski and Alexei Kitaev. Effects of interactions on the topological classification of free fermion systems. *Phys. Rev. B*, Vol. 81, p. 134509, Apr. 2010.

[88] Lukasz Fidkowski and Alexei Kitaev. Topological phases of fermions in one dimension. *Phys. Rev. B*, Vol. 83, p. 075103, Feb. 2011.

[89] Elliott Lieb, Theodore Schultz, and Daniel Mattis. Two soluble models of an antiferromagnetic chain. *Annals of Physics*, Vol. 16, No. 3, pp. 407–466, 1961.

[90] Masaki Oshikawa, Masanori Yamanaka, and Ian Affleck. Magnetization plateaus in spin chains: “Haldane gap” for half-integer spins. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 78, pp. 1984–1987, Mar. 1997.

[91] Masanori Yamanaka, Masaki Oshikawa, and Ian Affleck. Nonperturbative approach to Luttinger’s theorem in one dimension. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 79, pp. 1110–1113, Aug. 1997.

[92] Hal Tasaki. The Lieb-Schultz-Mattis theorem: A topological point of view. *arXiv:2202.06243*, 2022.

[93] Haruki Watanabe. Energy gap of neutral excitations implies vanishing charge susceptibility. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 118, p. 117205, Mar. 2017.

[94] Lei Gioia and Chong Wang. Non-zero momentum requires long-range entanglement. *Phys. Rev. X*, Vol. 12, p. 031007, Jul. 2022.

[95] Haruki Watanabe and Masaki Oshikawa. Generalized f-sum rules and Kohn formulas on nonlinear conductivities. *Phys. Rev. B*, Vol. 102, p. 165137, Oct. 2020.

[96] Kazuaki Takasan, Masaki Oshikawa, and Haruki Watanabe. Adiabatic transport in one-dimensional systems with a single defect. *arXiv:2105.11378*, 2021.

[97] D. Bohm. Note on a theorem of Bloch concerning possible causes of superconductivity. *Phys. Rev.*, Vol. 75, pp. 502–504, Feb. 1949.

[98] Naoki Yamamoto. Generalized Bloch theorem and chiral transport phenomena. *Phys. Rev. D*, Vol. 92, p. 085011, Oct. 2015.

[99] Haruki Watanabe. A proof of the Bloch theorem for lattice models. *Journal of Statistical Physics*, Vol. 177, No. 4, pp. 717–726, Nov. 2019.

[100] Léon Brillouin. Le champ self-consistent, pour des électrons liés; la supraconductibilité. *Journal de Physique et Le Radium*, Vol. 4, pp. 333–361, 1933.

[101] Hirokazu Kobayashi and Haruki Watanabe. Vanishing and non-vanishing persistent currents of various conserved quantities. *arXiv:2112.0221*, 2021.

[102] Dominic V. Else and T. Senthil. Critical drag as a mechanism for resistivity. *Phys. Rev. B*, Vol. 104, p. 205132, Nov. 2021.

[103] Haruki Watanabe. Bloch theorem in the presence of an additional conserved charge. *Phys. Rev. Research*, Vol. 4, p. 013043, Jan. 2022.

[104] Anton Kapustin and Lev Spodyneiko. Absence of energy currents in an equilibrium state and chiral anomalies. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 123, p. 060601, Aug. 2019.

[105] Q. Niu and D.J. Thouless. Quantised adiabatic charge transport in the presence of substrate disorder and many-body interaction. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, Vol. 17, No. 12, pp. 2453–2462, Aug. 1984.

[106] Raffaele Resta. Quantum-mechanical position operator in extended systems. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 80, pp. 1800–1803, Mar. 1998.

[107] Masaaki Nakamura and Synge Todo. Order parameter to characterize valence-bond-solid states in quantum spin chains. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 89, p. 077204, Jul. 2002.

[108] Masaaki Nakamura and Johannes Voit. Lattice twist operators and vertex operators in sine-Gordon theory in one dimension. *Phys. Rev. B*, Vol. 65, p. 153110, Apr. 2002.

[109] Hal Tasaki. Topological phase transition and $\mathbb{Z}_2$ index for $S = 1$ quantum spin chains. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 121, p. 140604, Oct. 2018.

[110] Haruki Watanabe and Masaki Oshikawa. Inequivalent Berry phases for the bulk polarization. *Phys. Rev. X*, Vol. 8, p. 021065, Jun. 2018.

[111] J.M. Luttinger. Fermi surface and some simple equilibrium properties of a system of interacting fermions. *Phys. Rev.*, Vol. 119, pp. 1153–1163, Aug. 1960.

[112] 中原幹夫, 佐久間一浩. 理論物理学のための幾何学とトポロジー I, II. ピアソンエデュケーション, I: 2000, II: 2001.

[113] Gerardo Ortiz and Richard M. Martin. Macroscopic polarization as a geometric quantum phase: Many-body formulation. *Phys. Rev. B*, Vol. 49, pp. 14202–14210, May 1994.

[114] Ivo Souza, Tim Wilkens, and Richard M. Martin. Polarization and localization in insulators: Generating function approach. *Phys. Rev. B*, Vol. 62, pp. 1666–1683, Jul. 2000.

[115] Qian Niu, D.J. Thouless, and Yong-Shi Wu. Quantized Hall conductance as a topological invariant. *Phys. Rev. B*, Vol. 31, pp. 3372–3377, Mar. 1985.

[116] Matthew B. Hastings and Spyridon Michalakis. Quantization of Hall conductance for interacting electrons on a torus. *Communications in Mathematical Physics*, Vol. 334, No. 1, pp. 433–471, Feb. 2015.

[117] Koji Kudo, Haruki Watanabe, Toshikaze Kariyado, and Yasuhiro Hatsugai. Many-body

Chern number without integration. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 122, p. 146601, Apr. 2019.

[118] Matthew B. Hastings. Lieb-Schultz-Mattis in higher dimensions. *Phys. Rev. B*, Vol. 69, p. 104431, Mar. 2004.

[119] Haruki Watanabe. Insensitivity of bulk properties to the twisted boundary condition. *Phys. Rev. B*, Vol. 98, p. 155137, Oct. 2018.

[120] Masaki Oshikawa. Commensurability, excitation gap, and topology in quantum many-particle systems on a periodic lattice. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 84, pp. 1535–1538, Feb. 2000.

[121] Bruno Nachtergaele and Robert Sims. A multi-dimensional Lieb-Schultz-Mattis theorem. *Communications in Mathematical Physics*, Vol. 276, No. 2, pp. 437–472, Dec. 2007.

[122] M.B Hastings. Sufficient conditions for topological order in insulators. *Europhysics Letters (EPL)*, Vol. 70, No. 6, pp. 824–830, Jun. 2005.

[123] Sven Bachmann, Alex Bols, Wojciech De Roeck, and Martin Fraas. A many-body index for quantum charge transport. *Communications in Mathematical Physics*, Vol. 375, No. 2, pp. 1249–1272, Apr. 2020.

[124] T. Hirano, H. Katsura, and Y. Hatsugai. Degeneracy and consistency condition for Berry phases: Gap closing under a local gauge twist. *Phys. Rev. B*, Vol. 78, p. 054431, Aug. 2008.

[125] Masaki Oshikawa. Topological approach to Luttinger's theorem and the Fermi surface of a Kondo lattice. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 84, pp. 3370–3373, Apr. 2000.

[126] 河野俊丈. 結晶群. 共立出版, 2015.

[127] Christopher Bradley and Arthur Cracknell. *The mathematical theory of symmetry in solids: representation theory for point groups and space groups*. Oxford University Press, 2010.

[128] M.I. Aroyo, editor. *International Tables for Crystallography*, Vol. A: Space-group symmetry. Springer, 2nd online edition, 2016.

[129] V. Kopský and D.B. Litvin, editors. *International Tables for Crystallography*, Vol. E: Subperiodic groups. Springer, 2nd online edition, 2010.

[130] Haruki Watanabe. Lieb-Schultz-Mattis-type filling constraints in the 1651 magnetic space groups. *Phys. Rev. B*, Vol. 97, p. 165117, Apr. 2018.

[131] Haruki Watanabe, Hoi Chun Po, and Ashvin Vishwanath. Structure and topology of band structures in the 1651 magnetic space groups. *Science Advances*, Vol. 4, No. 8, p. eaat8685, 2018.

[132] Haruki Watanabe, Hoi Chun Po, Ashvin Vishwanath, and Michael Zaletel. Filling constraints for spin-orbit coupled insulators in symmorphic and nonsymmorphic crystals. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol. 112, No. 47, pp. 14551–14556, 2015.

[133] Siddharth A. Parameswaran, Ari M. Turner, Daniel P. Arovas, and Ashvin Vishwanath. Topological order and absence of band insulators at integer filling in non-symmorphic crystals. *Nature Physics*, Vol. 9, No. 5, pp. 299–303, May 2013.

[134] Haruki Watanabe, Hoi Chun Po, Michael P. Zaletel, and Ashvin Vishwanath. Filling-enforced gaplessness in band structures of the 230 space groups. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 117, p. 096404, Aug. 2016.

[135] Hoi Chun Po, Haruki Watanabe, Michael P. Zaletel, and Ashvin Vishwanath. Filling-enforced quantum band insulators in spin-orbit coupled crystals. *Science Advances*, Vol. 2, No. 4, p. e1501782, 2016.

[136] Yuan Yao and Masaki Oshikawa. Generalized boundary condition applied to Lieb-Schultz-Mattis-type ingappabilities and many-body Chern numbers. *Phys. Rev. X*, Vol. 10, p. 031008, Jul. 2020.

[137] Hoi Chun Po, Haruki Watanabe, Chao-Ming Jian, and Michael P. Zaletel. Lattice homotopy constraints on phases of quantum magnets. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 119, p. 127202, Sep. 2017.

[138] Dominic V. Else and Ryan Thorngren. Topological theory of Lieb-Schultz-Mattis theorems in quantum spin systems. *Phys. Rev. B*, Vol. 101, p. 224437, Jun. 2020.

[139] Dominic V. Else and Ryan Thorngren. Crystalline topological phases as defect networks. *Phys. Rev. B*, Vol. 99, p. 115116, Mar. 2019.

[140] Yoshiko Ogata. A classification of pure states on quantum spin chains satisfying the split property with on-site finite group symmetries. *Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B*, Vol. 8, No. 2, pp. 39–65, 2021.

[141] Yoshiko Ogata, Yuji Tachikawa, and Hal Tasaki. General Lieb–Schultz–Mattis type theorems for quantum spin chains. *Communications in Mathematical Physics*, Vol. 385, No. 1, pp. 79–99, Jul. 2021.

[142] Meng Cheng, Michael Zaletel, Maissam Barkeshli, Ashvin Vishwanath, and Parsa Bonderson. Translational symmetry and microscopic constraints on symmetry-enriched topological phases: A view from the surface. *Phys. Rev. X*, Vol. 6, p. 041068, Dec. 2016.

[143] Timothy H. Hsieh, Gábor B. Halász, and Tarun Grover. All majorana models with translation symmetry are supersymmetric. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 117, p. 166802, Oct. 2016.

[144] Chen Fang, Matthew J. Gilbert, and B. Andrei Bernevig. Bulk topological invariants in noninteracting point group symmetric insulators. *Phys. Rev. B*, Vol. 86, p. 115112, Sep. 2012.

[145] Akishi Matsugatani, Yuri Ishiguro, Ken Shiozaki, and Haruki Watanabe. Universal relation among the many-body Chern number, rotation symmetry, and filling. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 120, p. 096601, Feb. 2018.

[146] Yuan-Ming Lu, Ying Ran, and Masaki Oshikawa. Filling-enforced constraint on the

quantized Hall conductivity on a periodic lattice. *Annals of Physics*, Vol. 413, p. 168060, 2020.

[147] Ian Affleck and J. Brad Marston. Large-n limit of the Heisenberg-Hubbard model: Implications for high-T_c superconductors. *Phys. Rev. B*, Vol. 37, pp. 3774–3777, Mar. 1988.

[148] Barry Bradlyn, L. Elcoro, Jennifer Cano, M.G. Vergniory, Zhijun Wang, C. Felser, M.I. Aroyo, and B. Andrei Bernevig. Topological quantum chemistry. *Nature*, Vol. 547, No. 7663, pp. 298–305, Jul. 2017.

[149] Ari M. Turner, Yi Zhang, Roger S.K. Mong, and Ashvin Vishwanath. Quantized response and topology of magnetic insulators with inversion symmetry. *Phys. Rev. B*, Vol. 85, p. 165120, Apr. 2012.

[150] Seishiro Ono and Haruki Watanabe. Unified understanding of symmetry indicators for all internal symmetry classes. *Phys. Rev. B*, Vol. 98, p. 115150, Sep. 2018.

[151] Zhida Song, Tiantian Zhang, and Chen Fang. Diagnosis for nonmagnetic topological semimetals in the absence of spin-orbital coupling. *Phys. Rev. X*, Vol. 8, p. 031069, Sep. 2018.

[152] Zhida Song, Tiantian Zhang, Zhong Fang, and Chen Fang. Quantitative mappings between symmetry and topology in solids. *Nature Communications*, Vol. 9, No. 1, p. 3530, 2018.

[153] Eslam Khalaf, Hoi Chun Po, Ashvin Vishwanath, and Haruki Watanabe. Symmetry indicators and anomalous surface states of topological crystalline insulators. *Phys. Rev. X*, Vol. 8, p. 031070, Sep. 2018.

[154] Bingrui Peng, Yi Jiang, Zhong Fang, Hongming Weng, and Chen Fang. Topological classification and diagnosis in magnetically ordered electronic materials. *Phys. Rev. B*, Vol. 105, p. 235138, Jun. 2022.

[155] Tiantian Zhang, Yi Jiang, Zhida Song, He Huang, Yuqing He, Zhong Fang, Hongming Weng, and Chen Fang. Catalogue of topological electronic materials. *Nature*, Vol. 566, No. 7745, pp. 475–479, Feb. 2019.

[156] Feng Tang, Hoi Chun Po, Ashvin Vishwanath, and Xiangang Wan. Comprehensive search for topological materials using symmetry indicators. *Nature*, Vol. 566, No. 7745, pp. 486–489, Feb. 2019.

[157] M.G. Vergniory, L. Elcoro, Claudia Felser, Nicolas Regnault, B. Andrei Bernevig, and Zhijun Wang. A complete catalogue of high-quality topological materials. *Nature*, Vol. 566, No. 7745, pp. 480–485, Feb. 2019.

[158] Liang Fu and C.L. Kane. Topological insulators with inversion symmetry. *Phys. Rev. B*, Vol. 76, p. 045302, Jul. 2007.

[159] Chen Fang and Liang Fu. New classes of topological crystalline insulators having surface rotation anomaly. *Science Advances*, Vol. 5, No. 12, p. eaat2374, 2019.

[160] Anastasiia Skurativska, Titus Neupert, and Mark H. Fischer. Atomic limit and inversion-symmetry indicators for topological superconductors. *Phys. Rev. Research*, Vol. 2, p. 013064, Jan. 2020.

[161] Seishiro Ono, Hoi Chun Po, and Haruki Watanabe. Refined symmetry indicators for topological superconductors in all space groups. *Science Advances*, Vol. 6, No. 18, p. eaaz8367, 2020.

[162] Ken Shiozaki. Variants of the symmetry-based indicator. *arXiv:1907.13632*, 2019.

[163] Max Geier, Piet W. Brouwer, and Luka Trifunovic. Symmetry-based indicators for topological Bogoliubov–de Gennes Hamiltonians. *Phys. Rev. B*, Vol. 101, p. 245128, Jun. 2020.

[164] Seishiro Ono, Hoi Chun Po, and Ken Shiozaki. $\mathbb{Z}_2$-enriched symmetry indicators for topological superconductors in the 1651 magnetic space groups. *Phys. Rev. Research*, Vol. 3, p. 023086, May 2021.

[165] Feng Tang, Seishiro Ono, Xiangang Wan, and Haruki Watanabe. High-throughput investigations of topological and nodal superconductors. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 129, p. 027001, Jul. 2022.

[166] Seishiro Ono, Youichi Yanase, and Haruki Watanabe. Symmetry indicators for topological superconductors. *Phys. Rev. Research*, Vol. 1, p. 013012, Aug. 2019.

[167] John David Jackson. *Classical electrodynamics*. Wiley, New York, 3rd edition, 1999.

[168] Haruki Watanabe and Seishiro Ono. Corner charge and bulk multipole moment in periodic systems. *Phys. Rev. B*, Vol. 102, p. 165120, Oct. 2020.

[169] Wladimir A. Benalcazar, B. Andrei Bernevig, and Taylor L. Hughes. Quantized electric multipole insulators. *Science*, Vol. 357, No. 6346, pp. 61–66, 2017.

[170] Wladimir A. Benalcazar, B. Andrei Bernevig, and Taylor L. Hughes. Electric multipole moments, topological multipole moment pumping, and chiral hinge states in crystalline insulators. *Phys. Rev. B*, Vol. 96, p. 245115, Dec. 2017.

[171] Seishiro Ono, Luka Trifunovic, and Haruki Watanabe. Difficulties in operator-based formulation of the bulk quadrupole moment. *Phys. Rev. B*, Vol. 100, p. 245133, Dec. 2019.

[172] Wladimir A. Benalcazar, Tianhe Li, and Taylor L. Hughes. Quantization of fractional corner charge in C_n-symmetric higher-order topological crystalline insulators. *Phys. Rev. B*, Vol. 99, p. 245151, Jun. 2019.

[173] Ryo Takahashi, Tiantian Zhang, and Shuichi Murakami. General corner charge formula in two-dimensional C_n-symmetric higher-order topological insulators. *Phys. Rev. B*, Vol. 103, p. 205123, May 2021.

[174] Haruki Watanabe and Hoi Chun Po. Fractional corner charge of sodium chloride. *Phys. Rev. X*, Vol. 11, p. 041064, Dec. 2021.

[175] Katsuaki Naito, Ryo Takahashi, Haruki Watanabe, and Shuichi Murakami. Fractional

hinge and corner charges in various crystal shapes with cubic symmetry. *Phys. Rev. B*, Vol. 105, p. 045126, Jan. 2022.

[176] Herbert Wagner. Long-wavelength excitations and the Goldstone theorem in many-particle systems with "broken symmetries". *Zeitschrift für Physik*, Vol. 195, No. 3, pp. 273–299, 1966.

[177] S. Stringari. Spin excitations and sum rules in the Heisenberg antiferromagnet. *Phys. Rev. B*, Vol. 49, pp. 6710–6717, Mar. 1994.

[178] Sven Bachmann, Wojciech De Roeck, and Martin Fraas. The adiabatic theorem and linear response theory for extended quantum systems. *Communications in Mathematical Physics*, Vol. 361, No. 3, pp. 997–1027, Aug. 2018.

[179] Sven Bachmann, Spyridon Michalakis, Bruno Nachtergaele, and Robert Sims. Automorphic equivalence within gapped phases of quantum lattice systems. *Communications in Mathematical Physics*, Vol. 309, No. 3, pp. 835–871, Feb. 2012.

索　　引

欧字

ア

カ

サ

タ

ナ

ハ

マ

ヤ

ラ

ワ

著 者 略 歴

渡辺 悠樹
わたなべ　はる き

1986 年　長野県生まれ
2010 年　東京大学理学部物理学科卒業
2015 年　米カリフォルニア大学バークレー校 Ph. D. 取得
米マサチューセッツ工科大学パッパラードフェロー研究員，東京大学工学系研究科物理工学専攻講師を経て，
2019 年　東京大学工学系研究科物理工学専攻准教授
南部ゴールドストーン定理を一般化する研究で西宮湯川記念賞，トポロジカル相の研究で凝縮系科学賞，時間結晶に関する研究で物理学ニューホライズン賞などを受賞.
専　門　物性理論

SGC ライブラリ-179
量子多体系の対称性とトポロジー
統一的な理解を目指して（電子版）

2024 年 9 月 25 日 ©　　　　初　版　発　行

この電子書籍は 2022 年 9 月 25 日初版発行の
同タイトルを底本としています.

著　者　渡辺 悠樹　　　　発行者　森 平 敏 孝

発行所　　**株式会社　サ イ エ ン ス 社**
〒151-0051　東京都渋谷区千駄ヶ谷 1 丁目 3 番 25 号
営業　☎（03）5474-8500（代）　振替 00170-7-2387
編集　☎（03）5474-8600（代）
FAX　☎（03）5474-8900

組版　三美印刷（株）

ISBN978–4–7819–9021–7

サイエンス社のホームページのご案内
https://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は
sk@saiensu.co.jp　まで