

● はじめに ●

この教科書は、ほとんどの大学で理工系学部1年目の必修科目として教えられる線形代数の講義の用に供することを目的としている。多くの大学で1年間かけて講じられる内容を網羅し、詳細な説明を与え、講義の予習・復習など、講義以外の時間における学習に役立つことに焦点を置いている。記述は簡潔明瞭を旨とし、読者に多くの分量を読み通す負担を求めないよう工夫した。数学をより本格的に学ぶために必要となる事項についても記述を与えて、長く使える教科書になるよう配慮した。

そもそも線形代数がどのような数学を問題にする分野であるかはこの教科書の中で学んでいくことではあるが、ここでは線形代数が他の数学や数学以外の分野とどのように関係しているかについて簡単に説明しておこう。線形代数の「線形」とは、和を和に、定数倍を定数倍に写すような対応（関数、写像、作用素…）の性質のことを指している。例えば、関数 $f(x)$ が線形であるとは

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(cx) = cf(x) \quad c \text{ は定数}$$

が成り立つことを意味する。このような「線形性」は数学の様々な場面で現れるばかりでなく物理などでも頻繁に登場し、しばしば「重ね合わせの原理」などと呼ばれる。様々な現象が重ね合わせの原理によって理解でき、応用できるということは、「線形性」を数学的に扱う方法を理解することが、数学のみならず多くの理学、工学、情報科学、社会科学のより良い理解のために必要不可欠であることを意味しているのである。それが、理工系学部で最初に学ぶ数学の必修科目の1つとして線形代数が配置される理由に他ならない。

では、この「線形性」にまつわる数学を学ぶというのは具体的にはどのようなことを意味するだろうか。「線形性」それ自体は、上の式で表されるような非常に単純な性質だが、非常に抽象的な性質でもある。具体的に線形性を満たす対応が与えられたとき、それについて詳しい情報を取り出すには、抽象的な概念を具体的でより初等的なレベルの数学に落とし込んで記述することが必要となる。その道具として線形代数に現れるのが行列の概念である。線形性を満たす対応を行列によって表示するための橋渡しをするのがベクトル空間の基

底の概念であり、これもまた線形代数の中で中心的な概念の1つである。

ここで注意しておかなければならないのは、このような線形代数の「構造」には高校までの数学とは大きく異なる数学の側面が本質的な形で立ち現れてくるといことである。高校までの数学でも、与えられた問題を解決するにはまずは論理的な思考を行って、解くべき問題をより簡単な計算に帰着したうえで、その計算を実行して最終的な解を得るというようなプロセスをたどる。その基本的な筋道は、どんなに高度で複雑な問題を考える場合でも変わることはないが、高校までの数学の問題を解く作業においてはいかにして効率的に、正確に計算・作業を行うかという部分のウエイトが高く、与えられた問題や現象を計算の問題に帰着させる部分の議論について深く掘り下げて学ぶことは稀であったろう。しかし、線形代数（や微分積分）から始まる大学における数学の基礎・応用は、与えられた問題が計算問題に帰着されるまでの論理的プロセスにこそ重点があるといっても過言ではない。線形代数の場合、線形空間の次元を使った集合論的な考察や、与えられた線形写像を計算しやすい行列で表示するために基底をうまく取る（あるいは、基底を取り替える）操作がこの「論理的なプロセス」に相当し、この部分を理解することこそが線形代数を理解することに他ならないといえる。

書店の数学書のコーナーをたずねれば、あるいは、インターネットの書籍店で検索すれば、非常にたくさんの線形代数の教科書がすでに出版されていることがわかるだろう。それらの本の取り扱っている内容はどれもほとんど同じだが、解説の書かれ方は千差万別である。最近の線形代数の教科書で取られる「流行のスタイル」は、高校までの数学と同様、線形代数の具体的な計算に関わる側面、すなわち、行列にまつわる様々な問題の、計算による具体的な解法に重点を置くというものだ。中には、完全に大学受験参考書のような体裁で書かれているものもある。そのような教科書のいくつかは、大学に入りたての学生が数学を勉強するときの心理的ハードルを下げ、いわば安心して勉強に取り組めるように、「わかりやすい」印象を与える工夫が念入りに施されている。その一方、これらの教科書を用いる場合は、勉強する者が自分自身で非常に注意深く主体的に掘り下げていかない限り、上でその重要性を強調した「論理的なプロセス」について深く考え学ぶことになかなか結び付いていかないのではないかと危惧されるのである。

大学での「勉強」がどのようなものであるべきか，ということについては人によっていろいろな考え方があるだろう．将来何を専門にするかによって数学への取り組み方，数学との付き合い方はいろいろであることも事実である．しかし，大学で学ぶ線形代数（同じことは微分積分についてもいえるが）にはすでに説明したような高校数学との断絶があることも確かであり，それまで知らなかった考え方や物事の捉え方を学ぶことこそが，なにかを勉強するということの意味だとすれば，この教科書を手にとった皆さんが，新しい数学の考え方を身につけていかれることを期待してやまない．

謝 辞

丁寧に原稿を読み多数の有益な指摘を下された編集委員の先生方にはこの場を借りて感謝の意を表したい．本書の前身である講義ノートを読んだ学生諸君の誤植の指摘も原稿の準備のために大いに役立った．さらに，仕事の遅い筆者に忍耐強く付き合ってくださった，サイエンス社の田島伸彦，大溝良平，西川遣治各氏にも衷心から感謝するものである．

2025 年 12 月

永井 保成

目 次

第 1 章 連立 1 次方程式と行列	1
1.1 行 列	1
1.2 基本変形と掃き出し消去	10
1.3 正則行列と逆行列	20
第 2 章 数ベクトル空間と線形写像	27
2.1 数ベクトル空間とその部分空間	27
2.2 数ベクトル空間の線形写像	39
2.3 階数と次元定理	46
第 3 章 行 列 式	57
3.1 行 列 式	57
3.2 行列式の積公式, 転置不変性, 区分け	65
3.3 行列式の展開	72
3.4 行列式の多項式表示	78
第 4 章 線形写像の行列表示	86
4.1 ベクトル空間	86
4.2 基底による線形写像の行列表示	97
4.3 固有値と固有ベクトル	109
4.4 行列の標準化	119
4.5 行列の指数関数	128

第5章 内 積 空 間	142
5.1 ユークリッド空間と直交行列	142
5.2 内 積 空 間	150
5.3 エルミート内積と対称行列の対角化	158
5.4 2 次 形 式	172
付録 A 線 形 符 号	185
付録 B ジョルダン標準形	192
付録 C 内積とフーリエ級数展開	206
付録 D 体 の 定 義	210
索 引	213